

# 具有非轴对称缺陷双曲冷却塔 的动力有限元解

高世桥 卢文达

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年3月23日收到)

## 摘 要

本文针对双曲冷却塔非轴对称缺陷的动力问题, 提出了一种解决谐波间耦合问题的近似方法。利用这种方法, 本文对具有一般局部几何缺陷双曲冷却塔旋转壳的频率和动力响应进行了分析和计算。

## 一、前 言

在工程计算中, 谐波间耦合的问题是经常存在的, 如旋转壳的一般几何缺陷问题<sup>[1]</sup>, 旋转壳的一般裂纹缺陷问题<sup>[2]</sup>, 旋转壳的非轴对称加肋问题<sup>[3]</sup>等。由于耦合作用的存在, 在计算中必须同时考虑所有谐波。这样就使得系统的自由度变得非常大, 以致在大型计算机上都难于实现计算。例如, 对旋转壳若取八个单元五个谐波, 其总刚阵的维数将从无耦合问题的784增至102400。可见其维数增加得非常多。为了解决这一问题, 本文用李兹近似的方法, 把原来的物理坐标转换成模态坐标, 然后利用频率截取原则, 把高阶模态的作用略去, 进而达到了缩减自由度的目的。

## 二、坐标转换与模态截取

谐波间耦合问题的一般振动方程为:

$$[M_{ii}]\{\ddot{\alpha}_i\} + [K_{ii}]\{\alpha_i\} + \sum_{j=0}^N [K'_{ij}]\{\alpha_j\} = \{f_i\} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.1)$$

其中:  $[M_{ii}]$ 为第*i*阶谐波的总质阵;  $[K_{ii}]$ 为第*i*谐波的无耦合总刚阵;  $[K'_{ij}]$ 为耦合刚度阵;  $\{\alpha_i\}$ 为第*i*阶谐波的位移列阵;  $\{f_i\}$ 为外力列阵; *N*为所取的谐波总数。

当(2.1)式中没有耦合项  $[K'_{ij}]$ 存在时, 可得无耦合的振动微分方程为:

$$[M_{ii}]\{\ddot{\alpha}_i\} + [K_{ii}]\{\alpha_i\} = \{f_i\} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

设无耦合时系统的振动模态为  $\{\psi_{ik}\}$  ( $i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, M$ ) 其中*i*代表谐波数, *k*代表振型阶数。则  $\{\psi_{ik}\}$  应为下列特征值问题的归一化特征向量:

$$(-\omega_{ik}^2[M_{ii}] + [K_{ii}])\{\psi_{ik}\} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, M) \quad (2.3)$$

利用无耦合的振动模态 $\{\psi_{ik}\}$ , 可将(2.1)式中的物理坐标 $\{\alpha_i\}$ 转换成模态坐标 $\{q_i\}$ , 其变换关系为:

$$\{\alpha_i\} = [\Psi_i^M]\{q_i\} = \sum_{r=1}^M \{\psi_{ir}\}q_{ir} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

其中 $[\Psi_i^M]$ 为无耦合时的模态阵, 且 $[\Psi_i^M] = [\{\psi_{i1}\} \{\psi_{i2}\} \dots \{\psi_{iM}\}]$ , 指标 $M$ 为 $\{\alpha_i\}$  (或 $\{q_i\}$ )的维数。

然而, 由于 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{q_i\}$ 的维数都是 $M$ , 并未达到缩减自由度的目的。但仔细分析一下,  $\{q_i\}$ 与 $\{\alpha_i\}$ 确实存在着不同, 其不同之处在于:  $\{\alpha_i\}$ 是纯粹的物理量, 它的每个元素对结构响应的贡献都是同等地重要; 然而 $\{q_i\}$ 却不是这样, 它有明显的模态意义, 其 $r$ 值越小, 反映的越是低阶振型模态的作用,  $r$ 值越高, 反映的越是高阶振型模态的作用。对于工程上的实际问题, 一般只有低阶振型模态的作用才比较显著, 因此可忽略高阶振型模态的影响。于是在(2.4)式中可以把求和项数截取为 $R$ 项( $R \ll M$ ), 从而得到:

$$\{\alpha_i\} = \sum_{r=1}^R \{\psi_{ir}\}q_{ir} = [\Psi_i^R]\{q_i^R\} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.5)$$

其中:  $[\Psi_i^R] = [\{\psi_{i1}\} \{\psi_{i2}\} \dots \{\psi_{iR}\}]$

由于在工程计算中, 一般可取 $R \ll M$ , 因此, 模态坐标的维数要比物理坐标的维数小很多, 从而达到了充分缩减自由度的目的。

把(2.5)式代入到(2.1)式中, 并前乘 $[\Psi_i^R]^T$ 可得:

$$[\bar{M}_{ii}]\{\ddot{q}_i^R\} + [\bar{K}_{ii}]\{q_i^R\} + \sum_{j=0}^N [\bar{K}'_{ij}]\{q_j^R\} = [\Psi_i^R]^T\{f_i\} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.6)$$

其中:

$$[\bar{M}_{ii}] = [\Psi_i^R]^T[M_{ii}][\Psi_i^R], \quad [\bar{K}_{ii}] = [\Psi_i^R]^T[K_{ii}][\Psi_i^R], \quad [\bar{K}'_{ij}] = [\Psi_i^R]^T[K'_{ij}][\Psi_j^R]$$

把(2.6)式的 $N$ 个方程用统一矩阵形式表示, 可得:

$$\begin{bmatrix} [\bar{M}_{00}] & & & \\ & [\bar{M}_{11}] & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & [\bar{M}_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_0^R\} \\ \{q_1^R\} \\ \vdots \\ \{q_N^R\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{K}_{00}] & & & 0 \\ & [\bar{K}_{11}] & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & [\bar{K}_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_0^R\} \\ \{q_1^R\} \\ \vdots \\ \{q_N^R\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{K}'_{00}] & [\bar{K}'_{01}] & \dots & [\bar{K}'_{0N}] \\ [\bar{K}'_{10}] & [\bar{K}'_{11}] & \dots & [\bar{K}'_{1N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\bar{K}'_{N0}] & [\bar{K}'_{N1}] & \dots & [\bar{K}'_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_0^R\} \\ \{q_1^R\} \\ \vdots \\ \{q_N^R\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_0^R]^T\{f_0\} \\ [\Psi_1^R]^T\{f_1\} \\ \dots \\ [\Psi_N^R]^T\{f_N\} \end{bmatrix}$$

或简写成:

$$[\bar{M}]\{\ddot{q}^R\} + ([\bar{K}] + [\bar{K}'])\{q^R\} = \{f^R\} \quad (2.7)$$

其中 $\{q^R\}$ 和 $\{f^R\}$ 的维数都是 $(N+1)R$ 维。

### 三、谐波间耦合动力问题的模态分析

设 $\{\phi_{ik}\}$ 为(2.1)式 $\{\alpha_i\}$ 的各阶振动模态( $k=1, 2, \dots, R$ ), 则位移 $\{\alpha_i\}$ 可由模态叠加法表

示成:

$$\{\alpha_i\} = \sum_{k=1}^R A_k \{\phi_{ik}\} \cos \omega_k t \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.1)$$

而方程(2.7)所描述的强迫振动问题的响应可按模态叠加法求得:

$$\{q^R\} = \sum_{k=1}^{(N+1)R} B_k \{u_k^R\} \cos \omega_k t \quad (3.2)$$

其中  $\{u_k^R\} = [\{u_{0k}^R\} \{u_{1k}^R\} \dots \{u_{Nk}^R\}]^T$ , 它是下列特征值问题的规一化特征向量:

$$(-\omega_k^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] + [\bar{K}']) \{u_k^R\} = 0 \quad (3.3)$$

由(3.2)式可求得:

$$\{q_i^R\} = \sum_{k=1}^{(N+1)R} B_k \{u_{ik}^R\} \cos \omega_k t \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

再由(2.5)式的变换, 可求得:

$$\{\alpha_i\} = [\Psi_i^R] \{q_i^R\} = \sum_{k=1}^{(N+1)R} B_k [\Psi_i^R] \{u_{ik}^R\} \cos \omega_k t \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

比较(3.1)式和(3.5)式发现, 二者的形式有些不同. 不同之处在于, (i) 求和的项数不同, (ii) 频率  $\omega_k$  有些不同. 其原因在于前者的频率是各谐波间分开的, 而后者由于耦合作用的存在不再区分开. 为了有效地处理这一问题, 不妨把(3.1)式进行拓宽. 写成如下的形式:

$$\{\alpha_i\} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^R A_{kj} \{\phi_{jk}^*\} \cos \omega_j t \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.6)$$

其中的  $\{\phi_{jk}^*\}$  由下式给出:

$$\{\phi_{jk}^*\} = \begin{cases} 0, & j \neq i \text{ 时} \\ \{\phi_{ik}\}, & j = i \text{ 时} \end{cases} \quad (3.7)$$

(3.6)式还可以写成:

$$\{\alpha_i\} = \sum_{l=1}^{(N+1)R} A_l^* \{\phi_{il}^*\} \cos \omega_l t \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (3.8)$$

其中对应于  $\omega_l = \omega_{ik}$  的指标  $l$  有:  $\{\phi_{il}^*\} = \{\phi_{ik}\}$ , 而对于其它的指标  $l$  有:  $\{\phi_{il}^*\} = 0$ .

然而, (3.8)式只适合无耦合的情况, 对于谐波间耦合的问题,  $\{\phi_{jk}^*\}$  不再是(3.7)式的形式. 为了适应有耦合关系的情况, 可比较(3.8)式与(3.5)式, 确定出相应的  $\{\phi_{il}^*\}$  为:

$$\{\phi_{il}^*\} = [\Psi_i^R] \{u_{il}^R\} \quad (i=0, 1, \dots, N; l=1, 2, \dots, R) \quad (3.9)$$

这就是有耦合作用存在时的振动模态.

下面的命题说明(3.9)式包含了(3.7)式的内容, 亦即当不存在谐波间耦合作用时, (3.9)式可以退化成(3.7)式.

**命题** 第  $i$  阶谐波的总质阵为  $[M_{ii}]$ , 总刚阵为  $[K_{ii}]$ , 且对应于各阶频率  $\omega_{ik}$  ( $i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, R$ ) 的特征向量为  $\{u_{ik}\}$ , 若对全部谐波的特征值问题(3.10)式进行求

解, 则有: (i) (3.10) 式的特征值即为  $\omega_{ik}$  ( $i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, R$ ), 即  $\mathcal{F}\{\omega_r | r=1, 2, \dots, (N+1)R\} = \mathcal{G}\{\omega_{ik} | i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, R\}$  (其中  $\mathcal{F}$  是 (3.10) 式的特征值集合,  $\mathcal{G}$  为 (2.3) 式的特征值集合). (ii)  $\omega_{ik}$  对应的特征向量为:  $\{u_{ik}^*\} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \{u_{ik}^*\} \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

$$\left( -\omega_r^2 \begin{bmatrix} [M_{00}] & & 0 \\ & [M_{11}] & \\ 0 & & \ddots \\ & & & [M_{NN}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{00}] & & 0 \\ & [K_{11}] & \\ 0 & & \ddots \\ & & & [M_{NN}] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{\bar{u}_{0r}^*\} \\ \{\bar{u}_{1r}^*\} \\ \vdots \\ \{\bar{u}_{Nr}^*\} \end{bmatrix} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, (N+1)R) \quad (3.10)$$

下面来证明这个命题.

**证明** 为求频率  $\omega_r^2$ , 可取下面的行列式为零, 即:

$$\det \left( -\omega^2 \begin{bmatrix} [M_{00}] & & 0 \\ & [M_{11}] & \\ 0 & & \ddots \\ & & & [M_{NN}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{00}] & & 0 \\ & [K_{11}] & \\ 0 & & \ddots \\ & & & [K_{NN}] \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.11)$$

(3.11) 式又可化成:

$$\det(\omega^2[M_{00}] - [K_{00}]) \times \det(\omega^2[M_{11}] - [K_{11}]) \times \dots \times \det(\omega^2[M_{NN}] - [K_{NN}]) = 0 \quad (3.12)$$

上式每一项为零都相当于 (2.3) 式某一谐波的特征值方程, 从而可知有:  $\mathcal{F}\{\omega_r | r=1, 2, \dots, (N+1)R\} = \mathcal{G}\{\omega_{ik} | i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, R\}$ . 从而命题第 (i) 内容得证.

设对于某一频率  $\omega_{ik}$  的特征向量为  $\{u_{ik}^*\} = [\{\bar{u}_{0k}^*\} \ \{\bar{u}_{1k}^*\} \ \dots \ \{\bar{u}_{Nk}^*\}]^T$  把它代入到 (3.10) 式中得:

$$\begin{bmatrix} (-\omega_{ik}^2[M_{00}] + [K_{00}])\{\bar{u}_{0k}^*\} \\ (-\omega_{ik}^2[M_{11}] + [K_{11}])\{\bar{u}_{1k}^*\} \\ \vdots \\ (-\omega_{ik}^2[M_{ii}] + [K_{ii}])\{\bar{u}_{ik}^*\} \\ \vdots \\ (-\omega_{ik}^2[M_{NN}] + [K_{NN}])\{\bar{u}_{Nk}^*\} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

由于当  $j \neq i$  时有,  $-\omega_{ik}^2[M_{jj}] + [K_{jj}] \neq 0$ , 所以若要 (3.13) 式成立必有:

$$\{\bar{u}_{jk}^*\} = \begin{cases} 0, & j \neq i \text{ 时} \\ \{u_{ik}^*\}, & j = i \text{ 时} \end{cases} \quad (j=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, R) \quad (3.14)$$

从而命题的第 (ii) 内容也得证.

由本命题可知, 当耦合问题退化成无耦合的情况时, (2.7) 式的特征值问题将退化成 (3.10) 式的特征值问题, 从而 (3.9) 式的  $\{\phi_{ik}^*\}$  也退化成 (3.7) 式的  $\{\phi_{ik}^*\}$ .

#### 四、算 例

利用本文的方法, 我们对如图 1 所示的具有一般局部几何缺陷双曲冷却塔旋转壳的自然频率和阵风响应因子  $G_{N\psi}^{(4)}$  进行了计算. 该壳体的自由振动方程由文献 [1] 给出, 其形式和

(2.1)式相同。塔的各参数为：塔高150m；塔壳中面曲线方程为 $r^2=b^2+az^2$ ；其中的参数 $a=0.16$ ， $b=35.0$ m，壳厚为指数变化，其最大和最小厚度及指数为 $h_{\max}=0.5$ m， $h_{\min}=0.14$ m， $\eta=2.0$ ；材料参数为：泊松比 $\nu=0.167$ ，弹性模量 $E=2700000$ T/m<sup>2</sup>，容重 $\rho=2.45$ T/m<sup>3</sup>。缺陷中心位于 $z=-45$ m处，缺陷的范围是 $H=10$ m，缺陷沿周向按 $\tilde{w}=0.5 \times w_0(1+\cos\theta/\theta_0)$ 分布，且 $w_0=0.305$ m， $\theta_0=\pi$ (如图2)。计算的结果列于表1和表2中。表1列出了完善壳与缺陷壳的自然频率，表2是相应的阵风响应因子 $G_{N\varphi}$ 。

表1 完善壳与缺陷壳的自然频率对比(Hz)

完善壳	0.5243( $f_{41}$ )	0.6292( $f_{31}$ )	0.7672( $f_{42}$ )	0.8420( $f_{21}$ )	0.8531( $f_{32}$ )
缺陷壳	0.4935	0.6216	0.7542	0.8404	0.8498

注  $f_{ij}$  表示第  $i$  阶谐波第  $j$  阶振型的自然频率

表2 响应因子 $G_{N\varphi}$ 

完善壳	1.967
缺陷壳	2.032

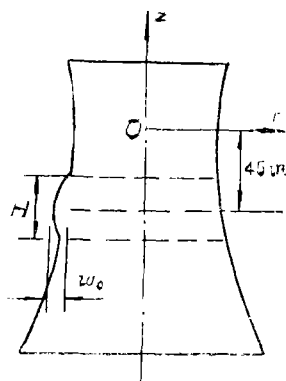


图 1

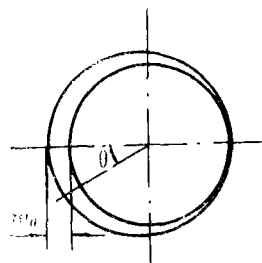


图 2

从计算的结果可以看出，缺陷的存在，降低了自然频率，增高了动力响应因子。

## 参 考 文 献

- [1] 卢文达、高世桥，具有局部几何缺陷旋转壳的自然频率分析，第二届全国计算力学会议论文177号，上海（1986,8）。
- [2] 钱源耀，具有分布裂纹的双曲冷却塔的自由振动和阵风响应分析，第三届华东固体力学学术讨论会论文，安徽九华山（1986,10）。
- [3] 李龙元、卢文达，加肋双曲冷却塔动力响应的渐近分析法——摄动有限元解，应用数学和力学，8,7（1987），603—610。
- [4] 卢文达、林宝庆，轴对称几何缺陷对双曲冷却塔壳体阵风响应的影响，上海工业大学学报，3（1984）。

# Dynamic Solution of Hyperbolic Cooling Tower with Nonsymmetric Imperfections by Finite Element Method

Gao Shi-qiao Loo Wen-da

*(Shanghai Institute of Appl. Math. and Mech., Shanghai)*

## Abstract

In this paper, an approximate method is established to solve the couple problem between different harmonic waves in terms of the needs of nonsymmetric imperfections of cooling tower. By means of this method, the frequencies and response of rotational shell with local geometric imperfections is analysed and calculated.