应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Jacobi椭圆函数有理式的Fourier级数*

万世栋　　李继彬

（云南大学函授部）　（昆明工学院数学教研室）

（戴世强推荐，1986年11月29日收到）

摘　　要

本文列出了手册[1]及文献[2]中未计算过的九十余个 Jacobi 椭圆函数 sn(u,k)，cn(u,k)，dn(u,k)的有理函数的Fourier展式．对于用Melnikov方法研究可积系统在周期扰动下的次谐波分枝与浑沌性质，及其他工程物理中的计算问题，这些公式可供查阅应用．

一、引言和记号

非线性动力系统的 Chaos 与怪引子的研究，"在我们这个令人瞠目的抽象化时代里，吹进了清新的具体化之风"[3]．除了计算机实验以外，Melnikov 方法[4]对于自治可积系统周期扰动的Chaos性质研究，是少有的精确分析方法之一．由于无扰动可积系统的闭轨线族常常需用Jacobi椭圆函数有理式表示，例如，一切三次及部分四次代数闭曲线族，其参数方程必可用椭圆函数确定[5][6]．因此，计算Melnikov函数时，常常涉及Jacobi椭圆函数sn(u,k)，cn(u,k)，dn(u,k)的有理函数与sin$n\omega t$，cos$n\omega t$之乘积的积分，即上述有理函数的Fourier级数的系数计算．在熟知的手册[1]中未有这方面结果．文[2]针对地球卫星轨道，地—月轨道理论与双星系统研究需要，曾给出一组计算公式，但因该文对参数（α^2和β）限制过窄，满足不了应用要求．考虑到这类积分计算技巧较高，工作量大，为避免重复性劳动，现将作者们在研究中计算积累的[1]、[2]中未有的结果整理发表，以供应用数学与力学研究工作者参考．

以下对记号作一些说明．关于第一、二、三类完全椭圆积分，Jacobi椭圆函数的记号与文[1]、[2]相同．为简化起见，记

$$W_0=\frac{\pi K'}{2K},\quad W=\frac{\pi(K'-u_0)}{2K},\quad W_1=\frac{\pi(K'-u_0/2)}{2K}\tag{1.1}$$

u_0的意义见后面的公式中定义．

$$A(z,n)=\exp[nz]+(-1)^n\exp[-nz],\quad B(z,n)=\exp[nz]+(-1)^{n+1}\exp[-nz]\tag{1.2}$$

二、Fourier级数展开式

兹按五种类型录出作者们计算所得 Fourier 展式如下．

* 中国科学院科学基金资助的课题．

I. sn(u,k), cn(u,k), dn(u,k)的幂函数

I.1.1 $$\mathrm{sn}^2 u=\frac{K-E}{k^2K}-\frac{\pi^2}{k^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{csch}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.1.2 $$\mathrm{sn}^3 u=\frac{\pi}{8k^3K^3}\sum_{n=0}^{\infty}[4K^2(1+k^2)-(2n+1)^2\pi^2]\mathrm{csch}(2n+1)W_0 \cdot\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2K}$$

I.1.3 $$\mathrm{sn}^4 u=\frac{(2+k^2)K-2(1+k^2)E}{3k^4K}+\frac{\pi^2}{3k^4K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+6n+(4-2k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}\,2nW_0\cdot\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.2.1 $$\mathrm{cn}^2 u=\frac{E-k'^2K}{k^2K}+\frac{\pi}{k^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{csch}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.2.2 $$\mathrm{cn}^3 u=\frac{\pi}{8k^3K^3}\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)^2\pi^2-4K^2(1-2k^2)]\mathrm{sech}(2n+1)W_0 \cdot\cos\frac{(2n+1)\pi u}{2K}$$

I.2.3 $$\mathrm{cn}^4 u=\frac{(2-3k^2)k'^2K+2(2k^2-1)E}{3k^4K}+\frac{\pi^2}{3k^4K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+4(2-k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}\,2nW_0\cdot\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.3.1 $$\mathrm{dn}^2 u=\frac{E}{K}+\frac{\pi^2}{K^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{csch}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.3.2 $$\mathrm{dn}^3 u=\frac{\pi(2-k^2)}{4K}+\frac{\pi}{2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+2-k^2\right)\mathrm{sech}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.3.3 $$\mathrm{dn}^4 u=\frac{2(2-k^2)E-(1-k^2)K}{3K}+\frac{\pi^2}{6K^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+4(2-k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

I.3.4 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^2 u}=\frac{E}{k'^2K}+\frac{\pi^2}{k'^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\mathrm{csch}\,2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅰ. 3.5 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^3u}=\frac{(2-k^2)\pi}{4k'^3K}+\frac{\pi}{2k'^3K}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+2-k^2\right]\mathrm{sech}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅰ. 3.6 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^4u}=\frac{2(2-k^2)E-(1-k^2)K}{3k'^4K}+\frac{\pi^2}{6k'^4K^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+4(2-k^2)\right]\mathrm{csch}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅱ. 有关$(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^{-l}$的函数，$(l=1,2)$

情况1 $0<\beta<k$，u_0满足方程$\mathrm{dn}(u_0,k)=k'/\sqrt{1-\beta^2}$，$0<u_0<K$。

Ⅱ. 1.1 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}+\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}nW_0\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right)$$

Ⅱ. 2.1 $$\frac{1}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{c_0}{4K}-\frac{\beta^2\pi}{K(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\,nW_0\left[\frac{n\pi}{2K}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{(2k^2-\beta^2-k^2\beta^2)}{\beta\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\right]\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right)$$

其中 $$c_0=\frac{4}{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}[(1-\beta^2)(2k^2-\beta^2-k^2\beta^2)\Pi(\beta^2,k)-\beta^2E+(\beta^2-k^2)F]$$

Ⅱ. 3.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{k^2-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}W_0\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right)$$

Ⅱ. 4.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}(k^2-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}nW_0\left(\frac{n\pi}{2K}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{k^2\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\right)\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right)$$

Ⅱ. 5.1 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}nW_0\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 6.1 $$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\beta\pi}{K(1-\beta^2)\sqrt{k^2-\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sech}nW_0\Big(\frac{n\pi}{2K}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}+\frac{\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\Big)\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 7.1 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}nW_0\Big\{2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

$$\mp\Big[1+(-1)^n-2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi}{2}\Big]\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big\}$$

Ⅱ. 8.1 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}nW_0$$

$$\cdot\Big(\pm\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}-\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

情况2 $k<\beta<1$，u_0满足方程$\mathrm{dn}(u_0,k')=k/\beta$，$0<u_0<K'$.

Ⅱ. 1.2 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}+\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}$$

$$\cdot\mathrm{csch}nW_0\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 2.2 $$\frac{1}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{c_0}{4K}+\frac{\beta^2\pi}{K(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}nW_0$$

$$\cdot\Big[\frac{n\pi}{2K}+\frac{(\beta^2-2k^2+k^2\beta^2)}{\beta\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\Big]\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

其中c_0与Ⅱ.2.1相同

Ⅱ. 3.2 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}nW_0\Big(\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 4.2 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\beta\pi}{K(\beta^2-k^2)\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}nW_0\Big[\frac{n\pi}{2K}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}$$

$$-\frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{\beta^2-k^2}}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}\Big]\Big(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 5.2 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\,\mathrm{sech}\,nW_0\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 6.2 $$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\,\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\beta\pi}{K(1-\beta^2)\sqrt{\beta^2-k^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sech}\,nW_0\Big[\frac{n\pi}{2K}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}+\frac{\sqrt{\beta^2-k^2}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\Big]\Big[\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big]$$

Ⅱ. 7.2 $$\frac{\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\,nW_0\Big\{2\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\Big[1+(-1)^n-2\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi}{2}\Big]\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big\}$$

Ⅱ. 8.2 $$\frac{\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\,\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\,nW_0\,\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\Big[\pm\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}-\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big]$$

情况3 $1<\beta<+\infty$，u_0 满足方程 $\mathrm{cn}(u_0,k)=k'/\sqrt{\beta^2-k^2}$，$0<u_0<K$。

Ⅱ. 1.3 $$\frac{1}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{cth}\,nW_0\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 3.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\,\mathrm{th}\,nW_0\Big(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 5.3 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=-\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\,\mathrm{th}\,nW_0\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big)$$

Ⅱ. 7.3 $$\frac{\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\,\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\,nW_0\Big\{2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\,\mathrm{ch}\,nW_0\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\Big[(-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\,\mathrm{ch}\,nW_0\cos\frac{n\pi}{2}\Big]\sin\frac{n\pi u}{2K}\Big\}$$

III. 有关$(1\pm\beta \mathrm{cn} u)^{-l}$，$(l=1,2)$的函数

情况1　$0<\beta<1$，u_0满足方程$\mathrm{cn}(u_0,k')=\beta$，$0<u_0<K'$.

$1/(1\pm\beta\mathrm{cn}u)$，$1/(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2$、$\mathrm{sn}u/(1\pm\beta\mathrm{cn}u)$，$\mathrm{dn}u/(1\pm\beta\mathrm{cn}u)$，$\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u/(1\pm\beta\mathrm{cn}u)$的公式见文献[2]。

Ⅲ. 4.1
$$\frac{\mathrm{sn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\mp\pi}{K(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A(W_0,n)}\left\{\frac{n\pi\beta\sqrt{1-\beta^2}}{2K}A(W;\mp n)-\frac{k^2(1-\beta^2)^2}{\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}B(W;\mp n)\right\}\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅲ. 6.1
$$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\pi}{2K(1-\beta^2)^{3/2}(k^2+k'^2\beta^2)^{1/2}}\mp\frac{\pi}{K(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi\beta\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}{2K}B(W;\mp n)\mp\frac{(k^2+k'^2\beta^2)}{1-\beta^2}A(W;\mp n)\right]\frac{\cos(n\pi u/2K)}{A(W_0,n)}$$

Ⅲ. 8.1
$$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\pi^2}{2K^2\sqrt{(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nB(W,\mp n)}{B(W_0,n)}\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

情况2　$1<\beta<+\infty$，u_0满足方程$\mathrm{cn}(u_0,k)=1/\beta$，$0<u_0<K$。

Ⅲ. 1.2
$$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\frac{\pi}{(1-\beta^2)K}-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(W_0,\mp n)}{B(W_0,n)}\cdot\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅲ. 3.2
$$\frac{\mathrm{sn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(W,\mp n)}{A(W_0,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅲ. 5.2
$$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(W,\mp n)}{A(W_0,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅲ. 7.2
$$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^n-A(W,\mp n)]}{B({}_0W,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

IV. 有关$(1\pm\beta\mathrm{dn}u)^{-l}$，$(l=1,2)$的函数

情况1　$0<\beta<1$，u_0满足方程$\mathrm{dn}(u_0,k')=k/\sqrt{1-k'^2\beta^2}$，$0<u_0<K'$

Ⅳ. 1.1
$$\frac{1}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中
$$c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)-\frac{\beta\pi}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}$$

Ⅳ. 2.1
$$\frac{1}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{K}\right.$$

$$-\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\operatorname{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\Big\}\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+k^2\beta^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$

$$+\frac{\beta\pi(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{[(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)]^{3/2}}-\frac{2k\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}(1-k'^2\beta^2)}\operatorname{arctg}\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ⅳ. 3.1 $\frac{1}{1-\beta\operatorname{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sh}4nW_1\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$

其中 $c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)+\frac{\beta\pi}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}$

Ⅳ. 4.1 $\frac{1}{(1-\beta\operatorname{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{n\beta\pi}{K}\operatorname{ch}4nW_1$

$$+\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\operatorname{sh}4nW_1\Big\}\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$

$$-\frac{\beta\pi(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{[(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)]^{3/2}}+\frac{2k\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}(1-k'^2\beta^2)}\operatorname{arctg}\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ⅳ. 5.1 $\frac{\operatorname{sn}u}{1+\beta\operatorname{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}$

$$\cdot\operatorname{csch}2(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 6.1 $\frac{\operatorname{sn}u}{(1+\beta\operatorname{dn}u)^2}=\frac{\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{[(-1)^n-1]n\beta\pi}{2K\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}$

$$+\frac{[(-1)^n+1]}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\operatorname{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\Big\}\operatorname{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 7.1 $\frac{\operatorname{sn}u}{1-\beta\operatorname{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}2(2n-1)W_1\operatorname{csch}2(2n$

$$-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 8.1 $\frac{\operatorname{sn}u}{(1-\beta\operatorname{dn}u)^2}=\frac{\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{[1-(-1)^n]n\beta\pi}{2K\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sh}2nW_1$

$$+\frac{[1+(-1)^n]}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\text{ch}2nW_1\Big\}\text{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 9.1 $$\frac{\text{cn}u}{(1+\beta\text{dn}u)}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\text{sh}\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}$$

$$\cdot\text{csch}2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.10.1 $$\frac{\text{cn}u}{(1+\beta\text{dn}u)^2}=-\frac{2\pi}{kK(1-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\text{ch}\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\text{sh}\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\Big\}\text{csch}2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.11.1 $$\frac{\text{cn}u}{1-\beta\text{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\text{sh}2(2n-1)W_1\text{csch}2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.12.1 $$\frac{\text{cn}u}{(1-\beta\text{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(1-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\text{ch}2(2n-1)W_1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\text{sh}2(2n-1)W_1\Big\}\text{csch}2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.13.1 $$\frac{\text{sn}n\text{cn}u}{1+\beta\text{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\text{sh}2nW_0-\text{ch}\frac{n\pi u_0}{K}\Big]\text{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.14.1 $$\frac{\text{sn}u\text{cn}u}{(1+\beta\text{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}n\text{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\text{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.15.1 $$\frac{\text{sn}u\text{cn}u}{1-\beta\text{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}[\text{ch}2nW_1-\text{sh}2nW_0]\text{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.16.1 $$\frac{\text{sn}u\text{cn}u}{(1-\beta\text{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}n\text{sh}4nW_1\text{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

情况2 $1<\beta<1/k'$，u_0满足方程$\text{dn}(u_0,k)=1/\beta$，$0<u_0<K$.

Ⅳ. 1.2 $$\frac{1}{1+\beta\text{dn}u}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{K}$$

$$\cdot\text{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$$

Ⅳ. 2.2 $$\frac{1}{(1+\beta \mathrm{dn} u)^2}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cos\frac{n\pi u_0}{K}-\frac{(2-\beta^2-k'^2\beta^2)}{\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}}\sin\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\mathrm{csch}\,4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)-\frac{k\beta^2}{(\beta^2-1)^{3/2}(1-k'^2\beta^2)}\ln\frac{\beta k+\sqrt{\beta^2-1}}{\beta k+\sqrt{\beta^2-1}}$$

Ⅳ. 3.2 $$\frac{1}{1-\beta \mathrm{dn} u}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{K}\,\mathrm{cth}\,4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$$

Ⅳ. 5.2 $$\frac{\mathrm{sn} u}{1+\beta \mathrm{dn} u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}\,2(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 6.2 $$\frac{\mathrm{sn} u}{(1+\beta \mathrm{dn} u)^2}=-\frac{2\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}-\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right\}\mathrm{csch}\,2(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 7.2 $$\frac{\mathrm{sn} u}{1-\beta \mathrm{dn} u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{cth}\,2(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ. 9.2 $$\frac{\mathrm{cn} u}{1+\beta \mathrm{dn} u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}\,2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.10.2 $$\frac{\mathrm{cn} u}{(1+\beta \mathrm{dn} u)^2}=\frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right\}\mathrm{csch}\,2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.11.2 $$\frac{\operatorname{cn}u}{1-\beta\operatorname{dn}u}=-\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}$$

$$\cdot\operatorname{cth}2(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅳ.13.2 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{1+\beta\operatorname{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\operatorname{sh}2nW_0-\cos\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\operatorname{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.14.2 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{(1+\beta\operatorname{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{n\pi u_0}{K}$$

$$\cdot\operatorname{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.15.2 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{1-\beta\operatorname{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi u_0}{K}\operatorname{ch}4nW_0-\operatorname{sh}2nW_0\right\}$$

$$\cdot\operatorname{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

情况3 $1/k'<\beta<+\infty$，u_0 满足方程 $\operatorname{dn}(u_0,k')=k\beta/\sqrt{\beta^2-1}$，$0<u_0<K'$。

Ⅳ.1.3 $$\frac{1}{1+\beta\operatorname{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)+\frac{\beta\pi}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}$$

Ⅳ2.3 $$\frac{1}{(1+\beta\operatorname{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\operatorname{ch}\frac{n\pi u_0}{K}\right.$$

$$\left.+\frac{(2-\beta^2-k'^2\beta^2)}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\operatorname{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$$

$$-\frac{\beta(2\beta k+\sqrt{\beta^2-1})}{(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}(k'^2\beta^2-1)}-\frac{1}{2k(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2-1}-\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}+\beta k}$$

$$+\frac{\beta\pi(4-4\beta^2+3\beta^2k^2)}{2[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\beta^3k^2}{[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}}$$

Ⅳ.3.3 $$\frac{1}{1-\beta\operatorname{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sh}4nW_1$$

$$\cdot\operatorname{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},\ k\right)-\frac{\beta\pi}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}$$

Ⅳ.4.3 $$\frac{1}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\mathrm{ch}4nW_1-\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\mathrm{sh}4nW\right\}\mathrm{csch}4nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},\ k\right)+\frac{\beta(2\beta k+\sqrt{\beta^2-1})}{(\beta^2-1)^{3/2}(k'^2\beta^2-1)}+\frac{1}{2k(\beta^2-1)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2-1}-\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}+\beta k}$$
$$-\frac{\beta\pi(4-4\beta^2+3\beta^2k^2)}{2[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{3/2}}+\frac{2\beta^3k^2}{[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{3/2}}\mathrm{arctg}\frac{\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}}$$

Ⅳ.5.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.6.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{1}{\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.7.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=-\frac{2\pi}{kK\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{sh}2nW_1\mathrm{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.8.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}}\mathrm{ch}2nW_1+\frac{1}{\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\mathrm{sh}2nW_1\right\}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}2nW_0\sin\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.9.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.10.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{2K}\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.11.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=-\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{ch}2nW_1\mathrm{csch}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.12.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\mathrm{sh}2nW_1+\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\mathrm{ch}2nW_1\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{2K}$$

Ⅳ.13.3 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{sh}2nW_0-(-1)^n\mathrm{ch}\frac{n\pi u_0}{K}\right]\mathrm{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.14.3 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\cdot\mathrm{sh}\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.15.3 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=-\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{sh}2nW_0-(-1)^n\mathrm{ch}4nW_1\right]\mathrm{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅳ.16.3 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\mathrm{sh}4nW_1\cdot\mathrm{csch}4nW_0\sin\frac{n\pi u}{K}$$

Ⅴ. 关于$(1\pm\beta^2\mathrm{sn}^2u)^{-l}$，$(l=1,2)$的函数

对于$\beta>0$情形，文献[2]中曾给出$(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^{-l}$，$(l=1,2)$及其它几个函数的展开式，本节将进一步给出[2]中未有的一些结论。注意椭圆函数之间有关系

$$1+\beta^2\mathrm{cn}^2u=(1+\beta^2)\left(1-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\mathrm{sn}^2u\right)$$

$$1+\beta^2\mathrm{dn}^2u=(1+\beta^2)\left(1-\frac{\beta^2k^2}{1+\beta^2}\mathrm{sn}^2u\right)$$

并且

$$\frac{1}{1-\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\beta\mathrm{sn}u}+\frac{1}{1+\beta\mathrm{sn}u}\right]$$

因此，利用文[2]的公式，本文Ⅱ～Ⅳ的公式以及以下的结果，我们容易得到涉及$(1\pm\beta^2\mathrm{cn}^2u)^{-l}$，$(1\pm\beta^2\mathrm{dn}^2u)^{-l}$，$(l=1,2)$形式的Fourier展式。

以下假设$\beta>0$，u_0满足$\mathrm{cn}(u_0,k')=\beta/\sqrt{1+\beta^2}$，$0<u_0<K'$。

Ⅴ.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{\pi}{K\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sh}(2n-1)W\cdot\mathrm{csch}(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

Ⅴ.2 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2K(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2k^2+(1+k^2)\beta^2}{\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}\mathrm{ch}(2n-1)W\right.$$

$$-\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K}\operatorname{sh}(2n-1)W\Big]\operatorname{csch}(2n-1)W_0\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

V.3 $$\frac{\operatorname{cn}u}{(1+\beta^2\operatorname{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{K(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{(2n-1)\pi\beta\sqrt{1+\beta^2}}{2K}\operatorname{sh}(2n-1)W$$

$$+\frac{\beta^4+(1+2k^2)\beta^2+2k^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\operatorname{ch}(2n-1)W\Big\}\operatorname{sech}(2n-1)W_0\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

V.4 $$\frac{\operatorname{dn}u}{1+\beta^2\operatorname{sn}^2u}=\frac{\pi}{2K\sqrt{1+\beta^2}}+\frac{\pi}{K\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}2nW\operatorname{sech}2nW_0\cos\frac{n\pi u}{K}$$

V.6 $$\frac{\operatorname{dn}u}{(1+\beta^2\operatorname{sn}^2u)^2}=\frac{\pi[\beta^4+(2+k^2)\beta^2+2k^2]}{4K(k^2+\beta^2)\sqrt{(1+\beta^2)^3}}+\frac{\pi}{2K(1+\beta^2)(K^2+\beta^2)}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{n\beta\pi\sqrt{k^2+\beta^2}}{K}\operatorname{sh}2nW+\frac{\beta^4+(2+k^2)\beta^2+2k^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\operatorname{ch}2nW\Big\}\cos\frac{n\pi u}{K}$$

V.7 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{1+\beta^2\operatorname{sn}^2u}=\frac{\pi}{K\beta\sqrt{k^2+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}2nW_0\operatorname{sh}2nW\sin\frac{n\pi u}{K}$$

V.8 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{(1+\beta^2\operatorname{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2K\beta(k^2+\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}2nW_0\Big[\frac{\beta n\pi}{K\sqrt{1+\beta^2}}\operatorname{ch}2nW$$

$$+\frac{k^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\operatorname{sh}2nW\Big]\sin\frac{n\pi u}{K}$$

V9. $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{(1+\beta^2\operatorname{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2K\beta(1+\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}(2n-1)W_0\Big[\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{1+\beta^2}}\operatorname{ch}(2n-1)W$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\operatorname{sh}(2n-1)W\Big]\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

V.10 $$\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1+\beta^2\operatorname{sn}^2u}=\frac{\pi}{\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{csch}(2n-1)W_0\operatorname{sh}(2n-1)W\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

V.11 $$\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{(1+\beta^2\operatorname{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{csch}(2n-1)W_0\Big[\frac{n\beta\pi\operatorname{ch}(2n-1)W}{2K\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}$$

$$+\operatorname{sh}(2n-1)W\Big]\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}$$

三、Fourier系数计算方法

上述九十余个公式中，Fourier 系数的计算，通常采用复变函数中取闭围道，利用留数定理的计算法。闭围道的选取必须根据需展开的函数的性质合理选择，以下举两个典型例子作为说明。

例1 考虑公式(Ⅳ.1.1)即在$0<\beta<1$时，研究$(1+\beta\mathrm{dn}u)^{-1}$的展式。

取函数 $f(z)=[1/(1+\beta\mathrm{dn}z)]\exp[in\pi z/K]$及图 1 所示围道。利用椭圆函数性质容易求得函数$f(z)$有两个一级极点

$$z_1=i(2K'-u_0),\quad z_2=i(2K'+u_0)$$

其中u_0满足关系 $\mathrm{dn}(u_0,k')=k/\sqrt{1-k'^2\beta^2}$，$0<u_0<K'$。

计算z_1，z_2的留数可得

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=-\beta\exp[-2n\pi K'/K]\cdot\exp[n\pi u_0/K]/(i\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)})$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\beta\exp[-2n\pi K'/K]\cdot\exp[-n\pi u_0/K]/(i\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)})$$

由图1可求得沿四条线段的积分有关系

$$\int_{l_1}=\int_{-K}^{K}\frac{\exp[in\pi u/K]}{1+\beta\mathrm{dn}u}du,\quad \int_{l_2}+\int_{l_4}=0,\quad \int_{l_3}=-\exp[-4n\pi K'/K]\int_{l_1}$$

于是根据留数定理有

$$(1-\exp[-4n\pi K'/K])\int_{-K}^{K}\frac{\exp[in\pi u/K]}{1+\beta\mathrm{dn}u}du$$

$$=\frac{4\beta\pi\mathrm{sh}(n\pi u_0/K)}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-K'^2\beta^2)}}\cdot\exp[-2n\pi K'/K]$$

由上式立即可推出(Ⅳ.1.1)式中相应的Fourier系数。

例2 考虑公式(Ⅲ.1.2)，即在$1<\beta<+\infty$时，研究函数$(1-\beta\mathrm{cn}u)^{-1}$的展式，取$f(z)=(1-\beta\mathrm{cn}z)^{-1}\exp[in\pi z/2K]$，闭围道如图2。

函数$f(z)$有四个一级极点；

$$z_1=-u_0,\quad z_2=u_0$$

$$z_3=2K-u_0+2iK',\quad z_4=2K+u_0+2iK'$$

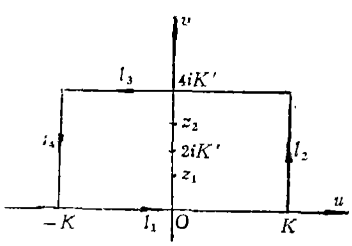

图 1

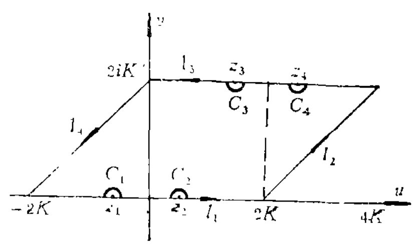

图 2

这四个极点$z_i(i=1\sim4)$位于围道的两条边l_1与l_3上，因此，必须取小半圆将围道正则化，记图2中小半圆为C_i $(i=1\sim4)$，而u_0满足方程$\mathrm{cn}(u_0,k)=1/\beta$。

利用复变函数中的定理容易求得

$$\int_{C_1}=-\int_{C_2}=\frac{\beta\pi i\exp[in\pi u_0/2K]}{\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}$$

$$\int_{C_3}=-\int_{C_4}=\frac{(-1)^n\beta\pi i\exp[in\pi u_0/2K]\cdot\exp[-n\pi K'/K]}{\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}$$

并且易见

$$\int_{l_2}+\int_{l_4}=0$$

因此，利用Cauchy定理即得

$$\int_{-2K}^{2K}\frac{\exp[in\pi u/2K]}{1-\beta\mathrm{cn}u}du=\frac{-2\beta\pi\sin(n\pi u_0/2K)}{\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}\cdot\frac{[1+(-1)^n\exp[-n\pi K'/K]]}{[1-(-1)^n\exp[-n\pi K'/K]]}$$

$$=-\frac{2\beta\pi\sin(n\pi u_0/2K)}{\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}\cdot\frac{A(W_0,n)}{B(W_0,n)}\qquad(n\neq0)$$

由上式即得公式(Ⅲ.1.2)。

参 考 文 献

[1] Byrd, P. F. and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag (1971).

[2] Langebartel, R. G., Fourier expansions of rational fractions of elliptic integrals and Jacobian elliptic functions, *SIAM J. Math. Anal.*, 11, 3 (1980), 506—513.

[3] Hofstadter, D. R., 奇异吸引子：在秩序与混沌之间巧妙维持平衡的数学模型，科学（中译本），3 (1982), 92—102.

[4] Guckenheimer, J. and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).

[5] Lin Chang, Liu Zheng-rong and Li Ji-bin, Subharmonic bifurcation and chaotic behavior in system planar quadratic Hamiltonian system with periodic perturbation, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, China, October (1985), 28—31.

[6] 李继彬等，三次非线性振子的次谐波分岔与浑沌性质，桂林全国非线性系统中的不稳定性与随机性会议交流资料 (1984), 10.

Fourier Series of Rational Fractions of Jacobian Elliptic Functions

Wan Shi-dong

(*Yunnan University, Kunming*)

Li Ji-bin

(*Kunming Engineering Institute, Kunming*)

Abstract

In this paper more than ninety of the Fourier series of rational fractions of Jacobian elliptic functions sn(u,k), cn(u,k) and dn(u,k) are listed, which cannot be found in the handbook[1] and Ref. [2]. For the detection and study of chaotic behavior and subharmonic bifurcations in a two-dimensional Hamiltonian system subject to external periodic forcing by Melnikov's method, and for study of some problems of physical science and engineering, these formulas can be used.