应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

$a/r_2>1$等厚圆环薄壳轴对称问题*

陈 国 栋

（天津市油漆总厂，1983年4月18日收到）

摘 要

本文给出了 $a/r_2>1$ 等厚圆环薄壳轴对称问题力矩理论复变量方程的一致有效渐近解．

符号说明

a 经向主曲率半径

$\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2$ 复常数

E 弹性模量

H,V 径向和轴向内力

h 壁厚

M_φ,M_θ 经向和环向弯矩

N_φ,N_θ 经向和环向内力

Q_φ 横剪力

q_H,q_V 单位中面面积上的径向和轴向载荷

R 环壳整体半径

r $r=r_2\sin\varphi$

r_2 环向主曲率半径

$\varepsilon_\varphi,\varepsilon_\theta$ 经向和环向应变

ϑ 经线切线方向的位移

ν 泊松比

φ 壳面法线与旋转轴之间夹角

φ_0 在 $r=0$ 处的 φ 值

V^*,r^*,φ^* 分别是圆环壳上边界处的 V,r 和 φ 的值

圆环薄壳方程复杂且求解不易．张维[1]（1949年）给出了 $a/r_2<1$ 圆环薄轴对称问题的一次渐近解．钱伟长[2]（1979年）给出了 $a/r_2\ll1$（即 $a/R\ll1$）细圆环壳轴对称问题的一般解．R. A. Clark[3]（1950年）和 B.B.Новожилов[4]（1951年）给出了 $a/r_2<1$ 圆环薄壳轴对称问题的渐近积分解．本文对 $(a/r_2)>1$ 等厚圆环薄壳轴对称问题力矩理论复变量方程，给出了高次近似的一般有效渐近解．

1. 基本复变量方程

对 $a/r_2>1$ 对圆环薄壳轴对称问题的载荷、中面转角、经向和环向内力、横剪力、径向和轴向内力、弯矩分别见图1．

由图1可知，$a/r_2>1$ 圆环薄壳的曲率半径是：

$$a=\text{const},\quad r_2=a-\frac{R}{\sin\varphi}$$

平衡方程：

* 钱伟长推荐．

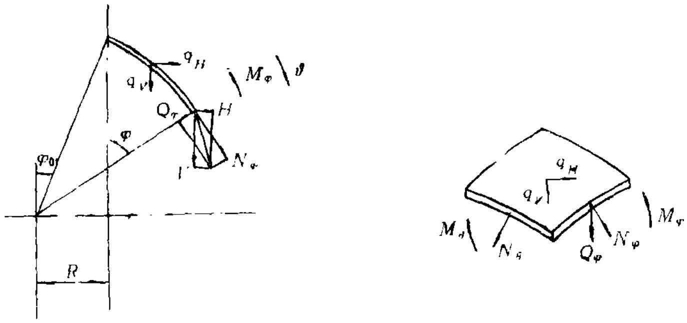

图 1

$$\frac{1}{a}\frac{d(rV)}{d\varphi}+rq_V=0 \tag{1a}$$

$$\frac{1}{a}\frac{d(rH)}{d\varphi}-N_\theta+rq_H=0 \tag{1b}$$

$$\frac{1}{a}\frac{d(rM_\varphi)}{d\varphi}-M_\theta\cos\varphi-r(V\cos\varphi-H\sin\varphi)=0 \tag{1c}$$

内力与应变之间关系：

$$\left.\begin{aligned}
&N_\varphi=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_\theta),\ N_\theta=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_\varphi)\\
&M_\varphi=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{a}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+\nu\frac{\vartheta}{r_2}\cot\varphi\right)\\
&M_\theta=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\vartheta}{r_2}\cot\varphi+\frac{\nu}{a}\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

中面变形连续方程：

$$\vartheta=\varepsilon_\varphi\cot\varphi-\frac{1}{a\sin\varphi}\frac{d(r\varepsilon_\theta)}{d\varphi} \tag{3}$$

内力之间关系：

$$H=N_\varphi\cos\varphi-Q_\varphi\sin\varphi,\quad V=N_\varphi\sin\varphi+Q_\varphi\cos\varphi \tag{4}$$

我们将式(1a)、(1b)、(2)、(4)代入式(3)和(1c)中，

得：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r_2}{a}\frac{d^2(rH)}{d\varphi^2}+\frac{\cot\varphi}{a}\frac{d(rH)}{d\varphi}-\left(\frac{\cot^2\varphi}{r_2}-\frac{\nu}{a}\right)(rH)=-Eh\vartheta+f(\varphi)\\
&\frac{r_2}{a}\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}+\frac{\cot\varphi}{a}\frac{d\vartheta}{d\varphi}-\left(\frac{\cot^2\varphi}{r_2}+\frac{\nu}{a}\right)\vartheta=\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}(rH-rV\cot\varphi)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中， $f(\varphi)=-(2+\nu)r_2q_H\cos\varphi-\frac{r_2^2}{a}\frac{dq_H}{d\varphi}\sin\varphi$

$$-\nu r_2q_V\sin\varphi-\left(\frac{1}{r_2}+\frac{\nu}{a}\right)\left(a\int_{\varphi^*}^{\varphi}rq_Vd\varphi-r^*V^*\right)\cot\varphi$$

通过变换

$$\left.\begin{aligned}&\Pi=\sqrt[4]{\frac{r_2\sin^2\varphi}{h^3}}\left[rH+\left(a\int_{\varphi^*}^{\varphi}rq_Vd\varphi-r^*V^*\right)\cot\varphi\right]\\&\Theta=\sqrt[4]{r_2h^5\sin^2\varphi}\,\vartheta,\quad y=\int_{\varphi^*}^{\varphi}\sqrt{\frac{a}{r_2}}\,d\varphi\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

由式(5)得:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\Pi}{dy^2}+\left(\frac{a}{r_2}\Omega_1+\nu\right)\Pi=-\frac{Ea}{h}(\Theta-\Theta_m)\\&\frac{d^2\Theta}{dy^2}+\left(\frac{a}{r_2}\Omega_1-\nu\right)\Theta=\frac{4\beta^4a}{Eh}\Pi\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中: $\beta=\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$

$$\Omega_1=\left(-\frac{15}{16}-\frac{r_2}{8a}+\frac{5r_2^2}{16a^2}\right)\cot^2\varphi+\frac{r_2}{4a}\left(1+\frac{r_2}{a}\right)$$

$$\Theta_m=\frac{\sqrt[4]{r_2h\sin^2\varphi}}{E}\Big[-(2+\nu)r_2q_H\cos\varphi-\frac{r_2^2}{a}\frac{dq_H}{d\varphi}\sin\varphi$$

$$+\frac{r_2^2}{a}\frac{dq_V}{d\varphi}\cos\varphi+\left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-\frac{2r_2}{a\sin\varphi}-\nu\sin\varphi\right)r_2q_V-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{a}-2\frac{r_2}{a^2}\right)\left(a\int_{\varphi^*}^{\varphi}rq_Vd\varphi-r^*V^*\right)$$

我们令: $\widetilde{W}=\Pi+i\dfrac{E}{2\beta^2}\left[\sqrt{1-\left(\dfrac{\nu h}{2\beta^2a}\right)^2}-i\dfrac{\nu h}{2\beta^2a}\right]\Theta,\quad i=\sqrt{-1}$ (8)

式(7)变成

$$\frac{d^2\widetilde{W}}{dy^2}+\left(\lambda^2+\frac{a}{r_2}\Omega_2\right)\widetilde{W}=\frac{Ea}{h}\Theta_m\tag{9}$$

式中: $\lambda^2=-2i\beta^2\dfrac{a}{h}\sqrt{1-\left(\dfrac{\nu h}{2\beta^2a}\right)^2}-\dfrac{\cot^2\varphi_0}{8}+\dfrac{1}{4},\quad \dfrac{a}{r_2}\Omega_2=\dfrac{a}{r_2}\Omega_1+\dfrac{\cot^2\varphi_0}{8}-\dfrac{1}{4}$

我们再作一次变换:

$$\widetilde{X}=\left(\frac{1}{4}y\right)^{-\frac{3}{2}}\widetilde{W},\quad \xi=\left(\frac{1}{4}y\right)^4\tag{10}$$

式(9)变成:

$$\frac{d^2\widetilde{X}}{d\xi^2}+\left[\frac{\lambda^2}{\xi^{\frac{3}{2}}}+g(\xi)\right]\widetilde{X}=\lambda^2\widetilde{X}_m\tag{11}$$

式中: $g(\xi)=\dfrac{15}{64\xi^2}+\dfrac{a}{r_2\xi^{\frac{3}{2}}}\Omega_2$

$$\widetilde{X}_m=i\frac{E\Theta_m}{2\beta^2\xi^{9/8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\nu h}{2\beta^2a}\right)^2}-\dfrac{ih}{2\beta^2a}\left(\dfrac{\cot^2\varphi_0}{8}-\dfrac{1}{4}\right)}$$

对 $a/r_2>1$ 等厚圆环薄壳，我们有：

$$\frac{a}{h}\gg 1,\ \xi^{\frac{3}{2}}g(\xi)=O(1) \tag{12}$$

式(11)是 $a/r_2>1$ 等厚圆环薄壳轴对称问题力矩理论基本复变量方程．它是一个具有一个大参数 λ 的二阶常微分方程．

2．一致有效渐近解

1．齐次解：

式(11)的齐次方程是：

$$\frac{d^2\widetilde{X}}{d\xi^2}+\left[\frac{\lambda^2}{\xi^{\frac{3}{2}}}+g(\xi)\right]\widetilde{X}=0 \tag{13}$$

因为λ是一个大参数且$\xi^{\frac{3}{2}}g(\xi)=O(1)$，式(13)的比较方程是：

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{\lambda^2}{\xi^{\frac{3}{2}}}U=0 \tag{14}$$

上式有解： $U=\sqrt{\xi}J_2(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$ (15)

式中，$J_2(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$是二阶贝塞尔函数．那末，式(13)的一次渐近解是：

$$\widetilde{X}_{\mathrm{I}}=\sqrt{\xi}[\widetilde{C}_1H_2^{(1)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})+\widetilde{C}_2H_2^{(2)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})] \tag{16}$$

式中，$H_2^{(1)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$ 和 $H_2^{(2)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$分别是第一种和第二种的二阶汉克尔函数．

在本文中，给出式(13)的一致有效渐近解：

$$\widetilde{X}=\alpha U+\gamma\frac{dU}{d\xi} \tag{17}$$

式中： $$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\xi)\lambda^{-n},\ \gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(\xi)\lambda^{-n} \tag{18}$$

我们现在将式(14)、(17)代入式(11)中，得：

$$\left[\frac{d^2\alpha}{d\xi^2}+\frac{3}{2}\lambda^2\xi^{-\frac{5}{2}}\gamma-2\lambda^2\frac{d\gamma}{d\xi}\xi^{-\frac{3}{2}}+g(\xi)\alpha\right]U$$
$$+\left[2\frac{d\alpha}{d\xi}+\frac{d^2\gamma}{d\xi^2}+g(\xi)\gamma\right]\frac{dU}{d\xi}=0 \tag{19}$$

在式(19)中，分别令U 和 $dU/d\xi$ 的系数为零，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\alpha}{d\xi^2}+\frac{3}{2}\lambda^2\xi^{-\frac{5}{2}}\gamma-2\lambda^2\frac{d\gamma}{d\xi}\xi^{-\frac{3}{2}}+g(\xi)\alpha=0\\&2\frac{d\alpha}{d\xi}+\frac{d^2\gamma}{d\xi^2}+g(\xi)\gamma=0\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

将式(18)代入式(20)中，由 λ 的同次幂的系数为零，得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\alpha_n(\xi)}{d\xi^2}+\frac{3}{2}\xi^{-\frac{5}{2}}\gamma_{n+2}(\xi)-2\xi^{-\frac{3}{2}}\frac{d\gamma_{n+2}(\xi)}{d\xi}+g(\xi)\alpha_n(\xi)=0\\&2\frac{d\alpha_n(\xi)}{d\xi}+\frac{d^2\gamma_n(\xi)}{d\xi^2}+g(\xi)\gamma_n(\xi)=0\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

由式(21)得：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{2n+1}(\xi)=\gamma_{2n+1}(\xi)=0,\ \gamma_0(\xi)=0,\ \alpha_0(\xi)=1\\&\gamma_2(\xi)=\frac{\xi^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{\xi}g(\xi)\xi^{\frac{3}{4}}d\xi\\&\alpha_2(\xi)=-\frac{1}{2}\left[\frac{d\gamma_2(\xi)}{d\xi}+\int_0^{\xi}g(\xi)\gamma_2(\xi)d\xi\right]\\&\gamma_{2n+2}(\xi)=\frac{\xi^{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^{\xi}\left[\alpha_{2n}(\xi)g(\xi)+\frac{d^2\alpha_{2n}(\xi)}{d\xi^2}\right]\xi^{\frac{3}{4}}d\xi\\&\alpha_{2n+2}(\xi)=-\frac{1}{2}\left[\frac{d\gamma_{2n+2}(\xi)}{d\xi}+\int_0^{\xi}g(\xi)\gamma_{2n+2}(\xi)d\xi\right]\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

利用以下关系：

$$\frac{dJ_2(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})}{d\xi}=\frac{\lambda}{\xi^{\frac{3}{4}}}\left[J_1(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})-\frac{1}{2\lambda\xi^{\frac{1}{4}}}J_2(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})\right]\tag{23}$$

式中，$J_1(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$是一阶贝塞尔函数。

将式(23)代入式(17)中，得：

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{X}}=\sqrt{\xi}\Big\{&\widetilde{C}_1\left[\alpha H_2^{(1)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})+\frac{\lambda\gamma}{\xi^{\frac{3}{4}}}H_1^{(1)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})\right]\\&+\widetilde{C}_2\left[\alpha H_2^{(2)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})+\frac{\lambda\gamma}{\xi^{\frac{3}{4}}}H_1^{(2)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})\right]\Big\}\end{aligned}\tag{24}$$

式中，$H_1^{(1)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$和$H_1^{(2)}(4\lambda\xi^{\frac{1}{4}})$分别是第一种和第二种的一阶汉克尔函数。

2. 特解：

在一般载荷下，我们可以用常数变易法来求得特解。

在工程上，最重要载荷是内压p作用下，即：

$$q_H=p\sin\varphi,\ q_V=-p\cos\varphi,\ V^*=\frac{1}{2}pr^*\tag{25}$$

那么，函数$\widetilde{X}_m$可以展为ξ的幂级数：

$$\widetilde{X}_m=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\xi^{\frac{1}{2}(j-1)}\tag{26}$$

式中，A_j是ξ的幂级数的系数。

由于λ是一个大参数且$\xi^{\frac{3}{2}}g(\xi)=O(1)$，在内压$p$作用下，我们将式(11)的特解展为下列形式：

$$\widetilde{X}^p=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(\xi)\lambda^{-n}\tag{27}$$

我们将式(27)代入式(11)中，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\delta_n(\xi)}{d\xi^2}\lambda^{-n}+\frac{\delta_n(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}}\lambda^{2-n}+g(\xi)\delta_n(\xi)\lambda^{-n}\right]=\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty}A_j\xi^{\frac{1}{2}(j-1)} \tag{28}$$

因为在 $\xi=0$ 时，有 $\xi^{\frac{3}{2}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_j\xi^{\frac{1}{2}(j-1)}$ 的二阶导数，那末，式(11)的一次渐近特解由上式得：

$$\tilde{X}_{\mathrm{I}}^{p}=\delta_0(\xi)=\xi^{\frac{3}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}A_j\xi^{\frac{1}{2}(j-1)}=\xi^{\frac{3}{2}}\tilde{X}_m \tag{29}$$

由 λ 的同次幂的系数为零，得：

$$\delta_{2n+1}(\xi)=0,\ \ \delta_{2n+2}(\xi)=-\xi^{\frac{3}{2}}\left[g(\xi)\delta_{2n}(\xi)+\frac{d^2\delta_{2n}(\xi)}{d\xi^2}\right] \tag{30}$$

Love-Kirchhoff 薄壳理论的假定，对 $a/r_2>1$ 等厚圆环薄壳来讲，它本身也包含 h/a 阶数量级的误差。本文给出的二次渐近解的误差也是 h/a 阶数量级的。

参 考 文 献

[1] 张维，承受轴对称载荷的圆环壳和带顶点的壳的应力状态，国立清华大学科学报告，5A (1949)，289—349.

[2] 钱伟长，轴对称圆环壳的复数变量方程和轴对称细环壳的一般解，清华大学学报，19 (1979)，27—47.

[3] Clark, R.A., On the theory of thin elastic toroidal shells, *J. Math. Phys.*, 29 (1950), 146—179.

[4] Новожилов В.В.，《薄壳理论》，科学出版社 (1959).

The Axial Symmetrical Problems of $a/r_2>1$ Toroidal Shells with Constant Thickness

Chen Guo-dong

(Tianjin General Paint Factory, Tianjin)

Abstract

In this paper, the uniformly valid asymptotic solutions for the complex equation of the axial symmetrical problems of $a/r_2>1$ toroidal shells with constant thickness in bending theory are given.