应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 08_0815_04

圆管入口段不可压缩层流流动的解析分析*

孟庆国

(国家自然科学基金委员会 数理科学部, 北京 100085)

(我刊编委 孟庆国来稿)

摘要: 从不可压缩粘性流体的 Navier_Stokes 方程出发, 给出了在均匀来流条件下的圆管入口段层流流动中央区的速度分布及压力分布的解析解•

关 键 词: 圆管流动; 层流; 入口段; 解析解
中图分类号: O357.1 文献标识码: A

引 言

不可压缩流体在圆管内的流动, 是工程实际中广泛遇到的问题• 在充分发展的层流流动阶段, 沿圆管轴向的速度分布存在解析解, 并呈抛物线分布, 这是流体力学的一个经典结果, 被称为 Poiseuille 解[1]• 但在圆管入口段, 轴向速度由均匀分布逐渐向抛物线分布过渡, 虽有大量的数值和实验研究, 但未见系统的理论分析结果• 本文对这一流动进行了理论研究, 从 Navier_Stokes 方程出发, 在定常、不可压缩、轴对称条件下, 得到了圆管入口段中央区的轴向、径向和周向速度分布及压力分布的解析表达式•

1 速度和压力解析解的推导

建立柱坐标系 (r, θ, x), 其中 x 轴与圆管轴线重合, 原点 O 选在入口截面上, 速度 $\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_x)$ 具有径向、周向和轴向 3 个分量• 假设在圆管入口处为均匀轴向来流, 则对于流动达到充分发展前的入口段, 在轴向速度呈均匀分布的中央区, v_x 与 r 无关, 其径向宽度随 x 的增大而逐渐减小•

中央区与外流区的交界线到圆管轴线的距离是 x 的函数, 记为 $\delta(x)$• 圆管入口段长度 l 定义为从圆管入口处到轴向速度最大值与 Poiseuille 理论值相差 5% 的轴向位置的距离, 它与 Reynolds 数的关系为[2, 3]

$$\frac{l}{d} = \frac{Re}{30}, \tag{1}$$

其中 $Re = Ud/\nu$, U 为圆管入口截面平均速度, d 为圆管直径, ν 为流体运动粘性系数•

容易验证, 表 1 给出的 $\delta(x)$ 与 x 的数值关系可以拟合为如下方程

$$\frac{2\delta}{d} = 1 - \left(\frac{2x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

* 收稿日期: 2003_08_15; 修订日期: 2004_02_28
作者简介: 孟庆国(1962—), 男, 辽宁海城人, 副教授, 博士(Tel: + 86_10_62327179(o); Fax: + 86_10_62327175; E_mail: mengqg@nsfc.gov.cn)•

其中 a 为圆管的半径•

表 1 中央区宽度 δ 与 x 之间关系

x/l	0	7.5×10^{-2}	1.5×10^{-1}	0.3
δ/a	1	0.625	0.433	0.25

中央区轴向速度 v_x 与 r 和 θ 无关• 由文献[2] 给出的实验结果, v_x 与 x 的关系可以拟合为

$$\frac{v_x}{U}=1+\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{kx}{d}\right),\tag{3}$$

其中 $k=180/Re$• 表 2 给出了(3) 式与实验数据的比较, 两者吻合得较好• 在入口段流动的初期, (3) 式给出的速度值偏小, 随后略大于实验值•

表 2 入口段轴向速度比较

$\frac{x}{dRe}$	0.002 5	0.005	0.007 5	0.01	∞
$\frac{v_x}{U}$ (实验[2])	1.282	1.450	1.550	1.597	2
$\frac{v_x}{U}$ ((3) 式)	1.269	1.467	1.594	1.677	2
误差 $R/(\%)$	1.01	− 1.17	− 2.84	− 5.01	0

选择 U 和 d 作为速度和长度的无量纲因子, 则(3) 式的无量纲形式可写成

$$v_x^*=1+\frac{2}{\pi}\arctan(kx^*),\tag{4}$$

这里上标* 表示无量纲量• 为了书写方便, 我们在后面推导中将(4) 式中的上标* 简略•

对于定常轴对称情况, 柱坐标系下的不可压缩粘性流体无量纲的连续性方程和 Navier_Stokes 方程可表达为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,\tag{5}$$

$$v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right],\tag{6}$$

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}-\frac{v_\theta^2}{r}=\frac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}-\frac{v_r}{r^2}\right],\tag{7}$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{v_rv_\theta}{r}=Re^{-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}-\frac{v_\theta}{r^2}\right],\tag{8}$$

其中压力 p 的无量纲因子取为 ρU^2•

将(4) 式代入连续性方程(5) , 积分得到

$$v_r=-\frac{kr}{\pi(1+k^2x^2)}+\frac{c}{r},\tag{9}$$

其中 c 为积分常数• 在 $r=0$ 处, v_r 应为有限值, 故 $c=0$, 使得(9) 式简化为

$$v_r=-\frac{kr}{\pi(1+k^2x^2)}\text{•}\tag{10}$$

将(4) 式代入(6) 式, 考虑到 $\partial v_x/\partial r=0$, 有

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\text{•}\tag{11}$$

对(11) 式两端积分, 加以整理后有

$$p\Big|_0^x=\left(-\frac{v_x^2}{2}+\frac{1}{Re}\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\Big|_0^x,\tag{12}$$

或

$$p(x)=p(0)-\frac{2}{\pi^2}(\pi\arctan kx+\arctan^2 kx)-\frac{1}{Re}\frac{2k^3x^2}{\pi(1+k^2x^2)}. \tag{13}$$

其中 $p(0)$ 为入口截面上的压力分布, 若它与 r 无关, 则 x 截面的压力 $p(x)$ 也与 r 无关, 即 $\partial p/\partial r=0$.

将(4)式和(9)式以及 $\partial p/\partial r=0$ 代入(7)式, 整理得到

$$\frac{v_\theta^2}{r}=v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}-Re^{-1}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}. \tag{14}$$

入口效应通常在 Re 数较大时变得显著, 这时粘性项 $Re^{-1}\partial^2 v_r/\partial x^2$ 的作用可以忽略, 于是

$$v_\theta=\pm\frac{kr}{\pi(1+k^2x^2)}[1+2kx(\pi+2\arctan kx)]^{1/2}. \tag{15}$$

为了考察 v_r, v_θ, v_x 的表达式是否能满足方程(7), 引入变量

$$F(r,x)=\left\{v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{v_rv_\theta}{r}-Re^{-1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}-\frac{v_\theta}{r^2}\right]\right\}. \tag{16}$$

因为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{v_\theta}{r^2}=0, \tag{17}$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}=\frac{v_rv_\theta}{r}, \tag{18}$$

$$\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_rv_\theta}{r}\right)\gg Re^{-1}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}, \tag{19}$$

所以

$$F(r,x)\approx\frac{2v_rv_\theta}{r}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}=$$

$$\frac{\pm k^2r\left[(\pi+2\arctan kx)^2-\left[kx(\pi+2\arctan kx)+\frac{1}{3}\right]^2-\frac{2}{3}\right]}{\pi^2(1+k^2x^2)^2[1+2kx(\pi+2\arctan kx)]^{1/2}}, \tag{20}$$

即

$$F(r,x)\sim O(k^2). \tag{21}$$

当 $Re>600$, $F(r,x)\leqslant 0.1$. 这说明对于中等以上 Re 数, 以上得到的圆管入口段核心区的速度和压力分布满足连续性方程和 Navier_Stokes 方程.

2 结 论

在定常、不可压缩、轴对称条件下, (4)式、(10)式、(15)式和(13)式分别为圆管入口段流动中央区的一定近似的轴向、径向、周向速度和压力分布的解析解. 这些结果可作为对圆管流动进一步研究的对比及工程问题的参考.

[参 考 文 献]

[1] White F M. Viscous Fluid Flow [M]. New York: McGraw_ Hill, 1974.

[2] Smith A M O. Remarks on transition in a round tube[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1960, **7**(4): 565—576.

[3] Tritton D J. Physical Fluid Dynamics [M]. New York: Oxford University Press, 1988, 11—16.

Analytic Solutions of Incompressible Laminar Flow in the Inlet Region of a Pipe

MENG Qing_guo
(Department of Mathematical and Physical Sciences, National Natural Science Foundation of China, Beijing 100085, P. R. China)

Abstract: The laminar analytic solutions of velocities and pressure in the central zone of the inlet region of pipe flow are given under the condition of uniform inflow, based on the Navier_Stokes equations of incompressible viscous flow.

Key words: pipe flow; laminar flow; inlet region; analytic solution