

# 嵌在弹性半空间的刚性变 直径圆轴的扭转\*

云天铨

(华南工学院, 1987年2月28日收到)

## 摘 要

本文用线载荷积分方程法(LLIEM)研究嵌在弹性半空间的刚性变直径圆轴的轴对称扭转。利用将“半空间的点环力偶”(PRCHS)这一虚的基本载荷沿对称轴的圆轴区间中分布就能使本问题归结为一个一维的非奇异的Fredholm第一类积分方程,且很易用数值求解。文中给出刚性圆锥,圆柱,圆锥柱嵌在弹性半空间的扭转的数值计算的例并和他人的已知结果相比较。文中也给出了刚性半球嵌在弹性半空间的扭转的精确解。

## 一、概 述

嵌在弹性半空间的刚性圆柱体的扭转问题已由Luco<sup>[1]</sup>研究过。但是他的工作仅限于圆柱体,而且他所用的方法(推广的Hankel变换)十分复杂。除此之外,他的假设(除了圆柱体和半空间之间粘连约束外还用了[1]中的(8),(9)两个假设),和所得到的积分方程(两个)都很复杂。还有,嵌在弹性半空间的刚性变直径圆轴的扭转还没被研究。本文只采用轴和周围物质完全粘连约束的假设用线载荷积分方程法(LLIEM)来研究本问题。作者曾用LLIEM研究过几个问题<sup>[2~8]</sup>,其优点是所得到的积分方程是一维的且是非奇异的。在这里,本问题再次归结为也是一维、非奇异的Fredholm第一类积分方程且很易数值地求解。在第二节,给出基本载荷PRCHS(半空间的点环力偶)的解和建立积分方程。在第三节,给出嵌在弹性半空间中的刚性半球的扭转的精确解。在第四节,给出嵌在弹性半空间中的刚性圆锥、圆柱体和圆锥柱的扭转的数值例子。刚性圆柱体的数值结果和Luco的<sup>[1]</sup>作了比较。在作者的另一文[9]中,理论地证明了本文关于刚性圆柱体的扭转的数值结果是正确的,而Luco在[1]中的结果是不正确的。

## 二、PRCHS的解与积分方程的建立

令 $r, \theta$ , 和 $z$ 为圆柱坐标。由问题的对称性知皆与 $\theta$ 无关,且只剩下沿 $\theta$ 方向的非零的位移 $v$ 。非零的应力分量为:

$$\tau_{r\theta} = G(\partial v / \partial r - v/r), \quad \tau_{\theta z} = G\partial v / \partial z \quad (2.1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

式中 $G$ 为半空间的剪切模量。在忽略体力时， $v$ 满足下列平衡方程：

$$\partial^2 v / \partial r^2 + r^{-1} \partial v / \partial r - r^{-2} v + \partial^2 v / \partial z^2 = 0 \quad (2.2)$$

对于LLIEM，首先需要一虚的载荷的满足统率的线性微分方程(2.2)的基本解。在此，在所有适合我们的问题的虚载荷中的最简单的PRCHS被选作基本载荷。PRCHS的定义如下：

**定义：**一个由沿着以 $z$ 轴为心， $a$ 为半径，作用面在半空间的 $z=c$ 的圆周切向均匀分布的单位长度上的力 $f$ 所组成的环力偶 $M=2\pi a f \cdot a$ ，当半径 $a$ 趋于零时，其效应称“半空间的点环力偶” $M$ (PRCHS)作用于 $z=c$ (图1)。即 $M = \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi a f \cdot a$ 。

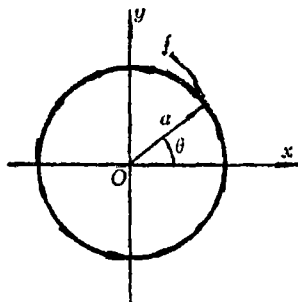


图1 —PRCHS( $a \rightarrow 0$ )简图

PRCHS  $M$  作用于 $z=c$ 的解可由将 Mindlin<sup>1</sup>的[10]作用于半空间内一点的水平力的解积分而得。现将此解列写如下：

$$\left. \begin{aligned} v(r, z) &= Mr(8\pi G)^{-1}(R_{1r}^{-3} + R_{2r}^{-3}) \\ \tau_{r\theta}(r, z) &= -3Mr^2(8\pi)^{-1}(R_{1r}^{-5} + R_{2r}^{-5}) \\ \tau_{\theta z}(r, z) &= -3Mr(8\pi)^{-1}[(z-c)R_{1r}^{-5} + (z+c)R_{2r}^{-5}] \\ R_{1r} &= [r^2 + (z-c)^2]^{1/2}, \quad R_{2r} = [r^2 + (z+c)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中 $(r, z)$ 是观察点， $(0, c)$ 是PRCHS的作用点， $M$ 与 $\theta$ 同向。

显然，(2.3)满足平衡方程(2.2)以及嵌有扭转轴的半空间自由表面( $z=0$ )的边界条件且具有最简单的型式。因此，(2.3)被选作我们的问题的基本解。

LLIEM的第二步是将基本载荷分布以满足边界条件。在轴和半空间完全粘连约束的假设下，对于母线为 $p=p(z)$ 的刚性迴转轴的扭转的边界条件是：

$$\Phi = v(p, z) / p = K, \quad \text{对 } (r, z) \in S = \{(p, z) | p = p(z), z \in [0, L]\} \quad (2.4)$$

式中 $\Phi$ 是在轴表面上的点 $(p, z)$ 的扭转角， $K$ 是给出的常数， $S$ 是轴和半空间的交界面， $L$ 是嵌入长度。

令带有未知集度函数为 $x(c)$ 的PRCHS沿 $z(=z)$ 轴的 $[0, h]$ 中分布(令 $h < L$ ，否则在半空间的 $z$ 轴上将有点出现奇异性，而这情形不是我们的问题的情形)，亦即分布在半空间所占的区间外，令边界条件(2.4)得到满足。由这样分布的PRCHS所引起的半空间中任一点 $(r, z)$ 的位移和应力分量用积分(2.3)式即可得到并列写如下：

$$\left. \begin{aligned} v(r, z) &= r(8\pi G)^{-1} \int_0^h (R_{1r}^{-3} + R_{2r}^{-3}) x(c) dc \\ \tau_{r\theta}(r, z) &= -3r^2(8\pi)^{-1} \int_0^h (R_{1r}^{-5} + R_{2r}^{-5}) x(c) dc \\ \tau_{\theta z}(r, z) &= -3r(8\pi)^{-1} \int_0^h [(z-c)R_{1r}^{-5} + (z+c)R_{2r}^{-5}] x(c) dc \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

将(2.5)代入(2.4)，得：

$$\int_0^h (R_{1r}^{-3} + R_{2r}^{-3}) x(c) dc = 8\pi GK \quad z \in [0, L] \quad (2.6)$$

式中 $R_{1r} = [p^2 + (z-c)^2]^{1/2}$ ， $R_{2r} = [p^2 + (z+c)^2]^{1/2}$ ， $p = p(z)$ 。

(2.6)是一个一维的，非奇异的Fredholm第一种积分方程且很易数值地求解。一旦解得

$x(c)$ , 半空间中任一点  $(r, z)$  的应力由(2.5)式即可求得.

总扭矩  $T$  和  $x(c)$  的关系可由刚性轴的平衡求得为:

$$T = \int_0^h x(c)dc = 2\pi \int_0^L p^2 \tau_{\theta n}(p, z) [1 + (dp/dz)^2]^{-1/2} dz \quad (2.7)$$

式中  $T$  为与给定扭转角  $K$  相应的总的的作用扭矩.

$$\tau_{\theta n}(p, z) = \tau_{r\theta}(p, z) \cos \alpha - \tau_{\theta z}(p, z) \sin \alpha \quad (2.8)$$

$$\tan \alpha = dp/dz \quad (2.9)$$

### 三、嵌在半空间中的刚性半球的扭转的精确解

对半径为  $R_0$  的嵌在半空间的刚性半球的扭转的边界条件是:

$$\Phi = v(p, z)/p = K, \text{ 在 } S = \{(p, z) | p^2 + z^2 = R_0^2, z \in [0, R_0]\} \text{ 上} \quad (3.1)$$

若将一PRCHS置于原点, 即令  $c=0$ , 由(2.3)式则有:

$$v(r, z)/r = M(4\pi GR^3)^{-1} \quad (3.2)$$

式中  $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ .

显然, 若令  $R = R_0$ , 则(3.2)式满足(3.1)式. 因此(3.2)是本问题的解. 由半球的平衡, 得作用扭矩  $T = M$ . 因此, 此解可列写为:

$$\left. \begin{aligned} v(r, z) &= Kr(R_0/R)^3, \quad K = T(4\pi GR_0^3)^{-1} \\ \tau_{r\theta}(r, z) &= -3Tr^2(4\pi R^3)^{-1} \\ \tau_{\theta z}(r, z) &= -3Trz(4\pi R^3)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

### 四、数值解及例

此处用来解Fredholm第一种积分方程(2.6)的数值方法是直接离散法. 令  $Ax = b$  是

$\int_0^h A(z, c)x(c)dc = F(z)$  的离散型式

$$Ax = b \quad (4.1)$$

式中  $A = [a_{ij}]$  是一  $n \times n$  矩阵,  $b = \{b_i\}$  和  $x = \{x_j\}$  均是  $n$  列阵.

$$a_{ij} = \int_{(j-1)t}^{jt} A(z_i, c)dc, \quad b_i = F(z_i), \quad x_j = x(c_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

$t = (h-0)/n$ ,  $n$  是求解的线性方程数目.

作为例子的刚性圆锥, 圆柱和圆锥柱的扭转已作了计算. 一些有意义的结果列举如下:

#### 4.1. 嵌入的刚性圆柱的扭转

我们最关心的是作用于刚性圆柱和周围介质接触面上的约束应力的研究. 图 2 表示应力沿边界的分布. 四点特点应当注意:

1.  $\tau_{r\theta}(r_0, z)$  沿侧面  $0 \leq z < L$  精确地保持同样值.

2.  $\tau_{\theta z}(r, L)$  在端面  $0 \leq r \leq r_0$  与  $r$  成线性关系地变化;  $\tau_{\theta z}(r, L)$  对扭矩  $T$  的贡献很少可以忽略, 尤其是对较长的嵌入 ( $L/r_0 > 4$ ), 因此, 我们建议用近似公式计算  $\tau_{r\theta}(r_0, z)$ .

$$\tau_{r\theta}(r_0, z) = T(2\pi r_0^2 L)^{-1}, \quad \text{对 } L/r_0 > 4 \quad (4.3)$$

3. 应力沿边界分布在角( $r_0, L$ ) 上有不连续点.
4. 上述性质与 $L/r_0$ 无关.

由图 2 可见, 我们的结果与 Luco 的 (图 2 中的点划线) 结果差别颇大. 作者的另一文 [9] 的理论分析表明本文的数值结果与理论分析结果精确地一致而 Luco 的结果是不正确的.

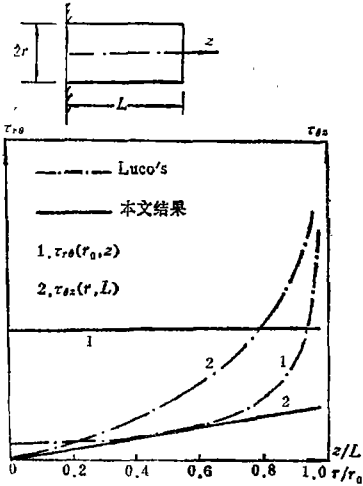


图2 嵌在半空间中的受扭刚性圆柱表面上的应力分布图

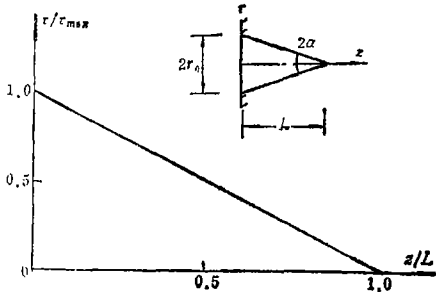


图3 嵌在半空间中的受扭刚性圆锥表面上的应力分布图

#### 4.2. 嵌入刚性圆锥的扭转

图 3 表示应力  $\tau_{\theta n}(p, z)$  沿边界与  $r$  成线性地变化. 最大应力发生在  $(L \tan \alpha, 0)$ . 因  $\tau_{\theta n}(p, z)$  沿边界线性地变化, 因此用 (2.7) 式我们可以得到最大应力  $\tau_{\theta n}(r_0, 0)$  的表达式:

$$\tau_{\theta n}(r_0, 0) = \pi r_0^3 T / (2s \sin \alpha) \quad (4.4)$$

式中  $r_0 = L \tan \alpha$ .

#### 4.3. 嵌入刚性圆锥柱的扭转

图 4 表示出对刚性圆柱和圆锥的特点均保持在由圆柱和圆锥的组合物中.

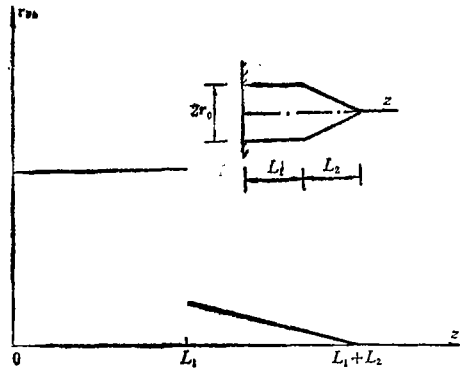


图4 嵌在半空间中的受扭刚性圆锥柱表面上的应力分布图

### 参 考 文 献

- [1] Luco, J. E., Torsion of a rigid cylinder embedded in an elastic half space, *J. Appl. Mech. ASME.*, 43 (1976), 419—423.
- [2] Yun, T. Q., An integral equation method for solving the torsion problem of revolution bodies, *J. H. I. T.*, 1 (1979), 82—97. (English edition)
- [3] Yun, T. Q., Pile analysis by simple integral equation method. *Appl. Math. and Mech.*, 2, 3 (1981), 331—349. (English edition)
- [4] Yun, T. Q., U. C. Shao and C. G. Qiu, Analysis of ellipsoid compressed by two axial concentrated forces at two ends, *Appl. Math. and Mech.*, 2, 6 (1981), 699—710. (English edition)
- [5] 云天铨, 水平刚性岩基上的弹性层表面受垂直集中力问题的积分方程解法, *固体力学学报*, 3 (1983), 375—382.

- [6] 云天铨, 嵌在倾斜半空间的轴向受力刚性桩的线载荷积分方程法的分析, 固体力学学报, 1 (1986), 64—68.
- [7] 云天铨、张进敏, 竖井的近似分析, 上海力学, 1 (1986), 50—54.
- [8] 云天铨, 线载荷积分方程法分析嵌在非均匀半空间的轴向受力桩, 第16届国际理论与应用力学大会 (ICTAM) 中国学者论文集锦 (上册), 中国力学学会编, 大连工学院出版社 (1986), 63—74.
- [9] 云天铨, 包含一受扭迴转轴的半空间的性质, 应用数学和力学, 9, 6 (1988).
- [10] Mindlin, R. D., Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *J. of Physics*, 77 (1936), 195.

## Torsion of Rigid Circular Shaft of Varying Diameter Embedded in an Elastic Half Space

Yun Tian-quan

(Department of Mathematics and Mechanics, South China Institute  
of Technology, Guangzhou)

### Abstract

The axially symmetric torsion of rigid circular shaft of varying diameter embedded in an elastic half space is studied by line-loaded integral equation method (LLIEM), where the problem is formulated by distributions of fictitious fundamental loads PRCHS (point ring couple in half space) along the axis of symmetry in interval of the shaft and is reduced to a one-dimensional and non-singular Fredholm integral equation of the first kind and is easily solved numerically. Numerical examples of torsion of rigid conic, cylinder, conical-cylinder embedded in an elastic half space are given and compared with the known result obtained by the others. The exact solution of torsion of rigid half sphere embedded in an elastic half space is also presented.