

多项式稳定的几何判据*

王 晓 君

(华中师范大学数学系, 1986年9月20日收到)

摘 要

本文利用实系数多项式 $f_n(z)$ 的零点的共轭性和界值性, 给出 $f_n(z)$ 稳定的新的几何计算判据, 它直观、简捷、证法初等, 绘制近似特征曲线, 可以程序化, 由计算机完成. 甚至只须查三角函数表, 辅之加、减、乘运算就行了. 故应用方便.

给定一个实系数多项式:

$$f_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

判定它只有负实部零点[简称 $f_n(z)$ 稳定]具有重要的理论意义和实际价值, 如在力学、控制论及微分方程特征理论中, 都涉及此问题. 大家熟知, Routh-Hurwitz 给出了很好的代数判据, 但美中不足的是只能判定多项式 $f_n(\lambda)$ 稳定, 无法判定稳定的程度, 其次, 当阶数大时, 计算量大, 又不便于计算程序化.

苏联 Михайлов^[1]根据复变函数的 Cauchy 幅角原理, 给出了下列的几何判据:

定理[Михайлов] 设 $f_n(z)$ 无纯虚根, 则 $f_n(z)$ 稳定的充要条件是 ω 从 0 变到 $+\infty$, $f(i\omega)$ 依反时针方向旋转角增加

$$\Phi \triangleq \Delta_{ABO} \text{Arg} f_n(i\omega) = \frac{\pi}{2} n$$

证明请见文献[1]

此定理的几何直观性强. 但遗憾的是: 1) 证明过程很繁; 2) 要求在复平面上作出参数 ω 从 0 到 $+\infty$ 的参数曲线[又称特征曲线] $f(i\omega)$, 由于参数 ω 取值范围是无穷区间 $[0, +\infty]$, 这给计算、作图均带来极大困难; 3) 没有充分利用实系数多项式的零点的共轭性(关于实轴对称分布)及根的有界性等重要信息和数据.

根据这些不足, 本文提出一个新的几何计算判据, 由于利用了 $f_n(z)$ 的零点关于实轴对称及全部根围于 $|\lambda| < \rho \triangleq 1 + |a_0|^{-1} \max_{1 \leq i < n} |a_i|$ 的特点, 使新的方法具有直观、简捷、证法初等

的优点. 特别将原来要求作出 $f(i\omega)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图象, 改为只需作 $f(\rho \exp[i\theta])$ 在 $[0, \pi/2]$, $f(i\omega)$ 在 $[0, \rho]$ 的图象, 大大减少了计算量. 绘制 $f(\rho \exp[i\theta])$ ($\theta \in [0, \pi/2]$), $f(i\omega)$ ($\omega \in [0, \rho]$) 完全可以程序化, 由计算机完成, 甚至只须查三角函数表, 辅之以加、减、乘运算便能成功, 从而易于普及, 中、初级科技工作者可以迅速掌握.

* 周焕文推荐.

下面予以介绍:

先在复平面上作以 $O(0,0)$ 为圆心, $\rho=1+|a_0|^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|a_i|$ 为半径的圆 S [图1], 由根的界限定理^[8]知 $f_n(\lambda)$ 的零点全在圆 S 中.

考虑 $\frac{1}{4}$ 的圆 OAB . 以 $\Phi \triangleq \Delta_{ABO} \text{Arg} f_n(\lambda)$ 表 $f_n(\lambda)$ 当 λ 沿弧 \widehat{AB} 和虚轴上线段 \overline{BO} 从 A 到 O 时 $f_n(\lambda)$ 的幅角的增量, 则有:

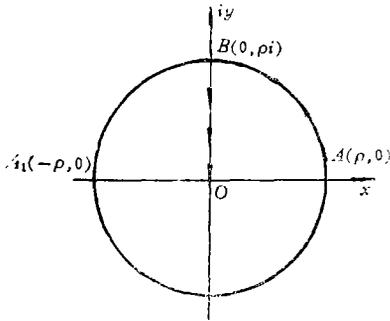


图 1

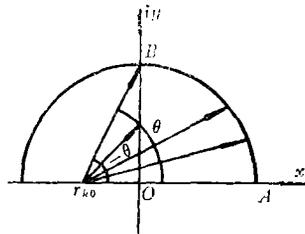


图 2

定理 1 设 $f_n(\lambda)$ 在 OB 上无零点, $\Phi \triangleq \Delta_{ABO} \text{Arg} f_n(\lambda) = k\pi$, 则当且仅当 $k=0$, $f_n(\lambda)$ 仅有负实部零点 (即 $f_n(z)$ 稳定); 当且仅当 $0 < k \leq n$, $f_n(\lambda)$ 有 k 个正实部零点.

证 设 $f_n(\lambda)$ 有 $2p$ 个复零点 $z_j, \bar{z}_j (j=1, 2, \dots, p)$, q 个实零点 $r_k (k=1, 2, \dots, q)$, 每个零点按重数计算, 则:

$$2p + q = n \tag{2}$$

由多项式的根的界限定理^[8], 知 $|z_i| < \rho$

将 $f_n(\lambda)$ 分解为线性因子乘积, 即:

$$f_n(\lambda) = \prod_{j=1}^p (\lambda - z_j)(\lambda - \bar{z}_j) \prod_{k=1}^q (\lambda - r_k) \tag{3}$$

$$\text{因此, } \Phi = \Delta_{ABO} \text{Arg} f_n(\lambda) = \sum_{j=1}^p \Delta_{ABO} [\text{Arg}(\lambda - z_j)] + \sum_{j=1}^p \Delta_{ABO} [\text{Arg}(\lambda - \bar{z}_j)]$$

$$+ \sum_{k=1}^q \Delta_{ABO} [\text{Arg}(\lambda - r_k)] \tag{4}$$

其中 $\text{Arg} \lambda = \arg \lambda + 2k\pi$ 为多值连续函数 ($k=1, 2, \dots$), $\arg \lambda + 2k\pi (-\pi < \arg \lambda \leq \pi)$ 的分支, 为确定计, 当 $\lambda = \rho$ 时, 上式的被加项的幅角都取它们的主值.

设 $r_{k_0} < 0$ 为任意负实零点, 考查 $\lambda - r_{k_0}$ 沿 ABO 的幅角的变化, 如图2所示:

$$\begin{aligned} \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - r_{k_0}) &= \Delta_{AB} \text{Arg}(\lambda - r_{k_0}) + \Delta_{BO} \text{Arg}(\lambda - r_{k_0}) \\ &= \theta - \theta_0 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

设 z_{j_0}, \bar{z}_{j_0} 为具有负实部的任意两共轭零点, 考查因子 $\lambda - z_{j_0}, \lambda - \bar{z}_{j_0}$, 沿 ABO 幅角的增量, 如图3所示, 利用对称性, 易证:

$$\Delta_{ABO} \text{Arg} z_{j_0} O \cong \Delta_{ABO} \text{Arg} \bar{z}_{j_0} O$$

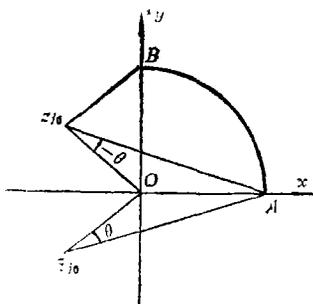


图 3

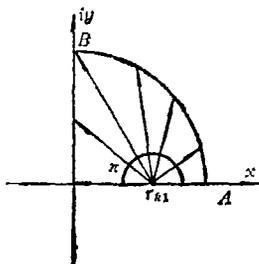


图 4

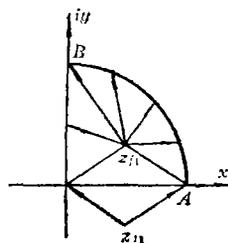


图 5

因此有 $|\angle Az_{j_0}O| = |\angle A\bar{z}_{j_0}O|$ 和

$$\begin{aligned} & \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - z_{j_0}) + \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - \bar{z}_{j_0}) \\ &= \{ +|\angle Az_{j_0}B| - |\angle Bz_{j_0}O| \} + \{ +|\angle A\bar{z}_{j_0}B| + |\angle B\bar{z}_{j_0}O| \} \\ &= -|\angle Az_{j_0}O| + |\angle A\bar{z}_{j_0}O| = -\theta + \theta = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

设 $r_{k_1} > 0$ 为任意正零点, 考查因子 $(\lambda - r_{k_1})$ 沿 ABO 幅角的变化, 如图4所示, 显然:

$$\Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - r_{k_1}) = \pi \quad (7)$$

设 z_{j_1}, \bar{z}_{j_1} 为任意两具有正实部的零点, 考查因子 $\lambda - z_{j_1}, \lambda - \bar{z}_{j_1}$ 沿 ABO 幅角的变化, 如图5所示, 利用对称性易证:

$$\triangle Az_{j_1}O \cong \triangle A\bar{z}_{j_1}O$$

故

$$|\angle Az_{j_1}O| = |\angle A\bar{z}_{j_1}O|$$

从而有:

$$\begin{aligned} & \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - z_{j_1}) + \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - \bar{z}_{j_1}) \\ &= 2\pi - |\angle Az_{j_1}O| + |\angle A\bar{z}_{j_1}O| = 2\pi \end{aligned}$$

由于这些零点的任意性, 故有结论:

$$\frac{1}{2} [\Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - z_j) + \Delta_{ABO} \text{Arg}(\lambda - \bar{z}_j)] = \begin{cases} \pi & (\text{当 } \text{Re}z_j > 0) \\ 0 & (\text{当 } \text{Re}z_j < 0) \end{cases} \quad (8)$$

从而 $f_n(\lambda)$ 仅有负实部零点, 当且仅当

$$\Phi = \Delta_{ABO} \text{Arg}f_n(z) = k\pi \quad (k=0) \quad (9)$$

$f_n(z)$ 有 k 个正实部零点, 当且仅当 $0 < k < n$. 证毕.

注: 验证 $f_n(z)$ 在虚轴上无根, 必须且只须验证:

$u(\omega)$ 与 $v(\omega)$ 互质(用辗转相除). 这里

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$$

用 Hurwitz 方法无法判定 $f_n(\lambda)$ 的零点与虚轴的距离, 用本文的方法可以.

将图6中的圆向左平行移动 $h > 0$ (如图6所示) 完全类似于定理1的作法可证:

定理 2 设 $f_n(\lambda)$ 在 $O'B'$ 上无零点

且 $\Phi = \Delta_{A'B'O'} \text{Arg}f_n(z) = k_1\pi$

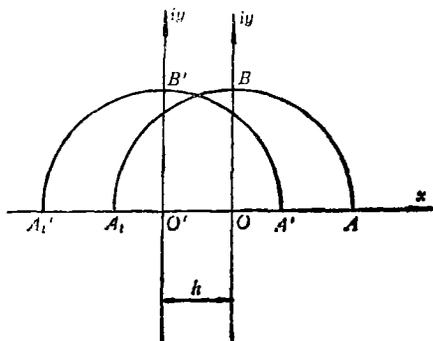


图 6

则当且仅当 $k_1=0$ $f_n(z)$ 的所有零点 $z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 具有负实部, 且 $\text{Re}z_i < -h < 0$.

如果定理 1 中的 $k=0$ 定理 2 的 $k_1 \neq 0$, 则将圆 $OABA_1$ 向左平移 $h/2$, 再按定理 2 的方法试, 继续这种折半的方法可以近似程度很高地估计 $f_n(z)$ 的零点最大实部与虚轴的距离, 即所谓稳定度. 下面举两例来说明定理 1 的应用.

例 1 $f(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 2.1$

$$\text{因为 } 1 + \frac{\max_{1 \leq i \leq 3} |a_i|}{|a_0|} = 1 + \frac{4}{1} = 5$$

故 $\rho = 5$

$$u_1 = 5^3 \cos 3\theta + 5^2 \times 3 \cos 2\theta + 20 \cos \theta + 2.1$$

$$v_1 = 5^3 \sin 3\theta + 3 \times 5^2 \sin 2\theta + 20 \sin \theta$$

$$u_2 = -3\omega^2 + 2.1$$

$$v_2 = -\omega^3 + 4\omega$$

将计算结果列于表 1.

表 1

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°						
u_1	+	+	+	+	✓	-	-	-	-	-						
v_1	0	+	+	+	+	+	+	+	✓	-						
ω		5	4.6	4.2	3.8	3.4	3	2.6	2.2	1.8	1.4	1.0	0.6	0.2	0	
u_2		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
v_2		-	-	-	-	-	-	-	-	✓	+	+	+	+	+	0

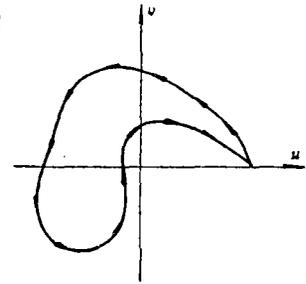


图 7

用 \checkmark 表符号变化, 特性曲线示意如图 7 所示.

$k=0$ 故 $f_3(z)$ 稳定.

例 2 $f_4(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z + 2$

$$\text{取 } \rho = 6 = 1 + |a_0|^{-1} \max_{1 \leq i \leq 4} |a_i| = 1 + 5$$

$$u_1 \triangleq 6^4 \cos 4\theta + 3 \times 6^3 \cos 3\theta + 5 \times 6^2 \cos 2\theta + 4 \times 6 \cos \theta + 2$$

$$v_1 \triangleq 6^4 \sin 4\theta + 3 \times 6^3 \sin 3\theta + 5 \times 6^2 \sin 2\theta + 4 \times 6 \sin \theta$$

$$u_2 \triangleq \omega^4 - 5\omega^2 + 2$$

$$v_2 \triangleq -3\omega^3 + 4\omega$$

将计算结果列于表 2. 特性曲线示意图如图 8 所示.

所以 $k=0$ $f_4(z)$ 稳定.

表 2

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°			
u_1	+	+	+ [√]	-	-	-	-	-	+ [√]	+			
v_1	0	+	+	+	+	+ [√]	-	-	-	-			
ω	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0
u_2	+	+	+	+	+	+	+	+ [√]	-	-	-	+ [√]	+
v_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+ [√]	+	0

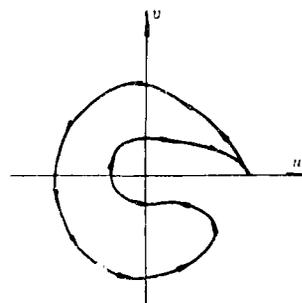


图 8

参 考 文 献

- [1] Демидович Б. П., *Лекции по Математической Теории Устойчивости*, Наука, Москва (1977).
- [2] 拉萨尔, 《动力系统的稳定性》(廖晓昕等译), 华中工学院出版社 (1983).
- [3] 库洛什, 《高等代数》(柯召译), 高等教育出版社 (1956).

The Geometric New Criterion of Polynomial Stability

Wang Xiao-jun

(Department of Mathematics, Huazhong Normal University, Wuhan)

Abstract

In this paper, we apply the conjugacy and boundedness of the zeros for a polynomial $f_n(z)$ with real coefficient $a_i(i=0,1,\dots,n)$. A new simple geometric criterion for stability of $f_n(z)$ is given, which is very convenient for application.