应用数学和力学, 第 25 卷 第 8 期(2004 年 8 月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 08_0819_05

Hamilton 算子和 R^3 中相似运动*

Y. 亚依黎,　N. 亚日,　M. K. 卡冉嵌

(安卡拉大学 科学学院 数学系, 06100 坦杜干, 安卡拉, 土耳其)

(周哲玮推荐)

摘要:　四元数是一个可除环· 它可表达为 R^3 中通过原点的平面中的四元数乘积的域· 利用 Hamilton 算子, 定义了在该平面上的相似运动, 并讨论了这些运动的新特性·

关　键　词:　Hamilton 算子;　相似运动;　四元数
中图分类号:　O151.23; O316; O311　　　文献标识码:　A

引　　言

Pfaff[1] 在叶面(包含 Ox 轴的平面) 上定义了四元数乘积· 借助该乘积, 又定义了一个通过原点但不包含 Ox 轴的平面上新的乘积, 并讨论了此新乘积定义的某些性质· Agrawal[2] 给出了 Hamilton 算子的一些代数性质· 他借助 Hamilton 算子, 将四元数表达为 4× 4 矩阵的项表达式· Yayli[3] 利用 E^4 空间中 Hamilton 算子给出了相似运动· Hacisalihoglu[4] 证明了在 n 维欧几里得空间 E^n 中的所有相似运动都是正则运动· 本文研究在 R^3 中任意平面 M 上利用 Hamilton 算子定义的运动, 并证明了该运动就是相似运动·

1　四元数和数值三重组乘法

设一个实四元数为

$$q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k},$$

其中 a、b、c、d 为实数, $\mathbf{1}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为“单位”基, 并有如下关系:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,$$

$$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}·$$

用对应的三重组 (a, b, c) 替换四重组

$$x = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = (a, b, c, 0),$$

且 $\mathbf{1} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{i} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 0, 1)$, 于是, 一般截尾四元数可表达为 $x = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$· 包含 x 轴的子空间称为叶面[1]· 若 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 在同一叶面上, 则

* 收稿日期:　2002_09_27
作者简介: Y. 亚依黎, 教授, 博士(联系人. E_mail: yayli@science.ankara.edu.tr).
本文原文为英文, 由吴承平 译, 张禄坤 校.

$$\boldsymbol{X}\times \boldsymbol{Y}=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)\mathbf{1}+(x_1y_2+y_1x_2)\boldsymbol{i}+(x_1y_3+y_1x_3)\boldsymbol{j},\tag{1}$$

其中×表示四元数乘积• 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为 R^3 中任意两个线性独立的矢量• 通过 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的平面与 xOy 平面相交, 交线通过原点并与 Ox 的正向成 θ 角, 交线矢量是 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ (见图 1)• 若 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 在不同的叶面上, 则 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的 $\nsim$ 积定义为

$$\boldsymbol{X}\nsim \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}(\theta)[\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{X}\times \boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{A}^{-1}(\theta)(\boldsymbol{X}'\times \boldsymbol{Y}')=$$
$$(\boldsymbol{l}\wedge \boldsymbol{X})\wedge \boldsymbol{Y}+\langle \boldsymbol{l},\boldsymbol{X}\rangle \boldsymbol{Y},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\theta)$ 为关于 z 轴的旋转矩阵, $\wedge$ 为矢量积, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 R^3 中的内积[5] (见图 1, 2)• 显然, 当 $\boldsymbol{l}=\mathbf{1}$ (即, $\theta=0$) 时, $\boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$• 当 $\theta=0$ 和 $x_3=y_3=0$ 时, $\nsim$ 积成为复数积•

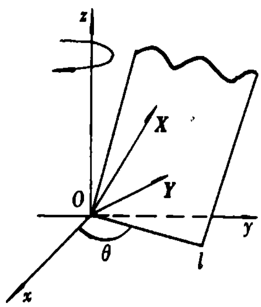

图 1

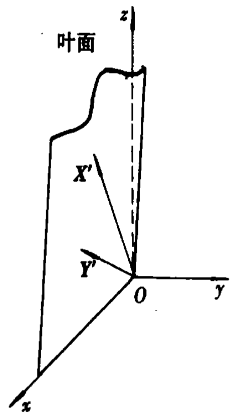

图 2

引理 1 设 M 为 R^3 中通过原点的平面, 则 $(M,+,\nsim)$ 为一域•

证明 因 M 为 R^3 中的矢量空间, 故 $(M,+)$ 为一 Abel 群,

$$\nsim: M\mathrm{x}M\rightarrow M,$$
$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\rightarrow \boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{X})\wedge\boldsymbol{Y}+\langle\boldsymbol{l},\boldsymbol{X}\rangle\boldsymbol{Y},$$

这里 $\nsim$ 积满足域公理• 证毕•

我们通过四元数×_积可以给出等式(2), 则有

$$\boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{l}^*\times\boldsymbol{Y},\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{l}^*=(\cos\theta,-\sin\theta,0)$•

2 R^3 中平面上的复结构

令 M 为 R^3 中通过原点的平面, 且 $E=M\cap Sp\left\{\mathbf{1},\boldsymbol{i}\right\}$; $\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ 是 E 方向的单位矢量, θ 为线 E 和 Ox 轴的夹角• 设 φ 为 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{l}$ 的夹角, $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{l}$ 是 M 中的单位矢量• 则

$$\boldsymbol{X}=\|\boldsymbol{X}\|(\cos\varphi\boldsymbol{l}+\sin\varphi\boldsymbol{N})•$$

形式上, 可将它改写为

$$\mathrm{e}^{\varphi\boldsymbol{N}}=\cos\varphi\boldsymbol{l}+\sin\varphi\boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{X}=\|\boldsymbol{X}\|\mathrm{e}^{\varphi\boldsymbol{N}},$$
$$\arg\boldsymbol{X}=\varphi,\ \boldsymbol{N}\nsim\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}\nsim\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}•$$

若 $\boldsymbol{Y}$ 为 M 中的矢量, 且它与线 $\boldsymbol{l}$ 成 β 角, 则

$$\boldsymbol{Y}=\|\boldsymbol{Y}\|\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{N}}•$$

化简后得

$$\boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y}=\|\boldsymbol{X}\|\cdot\|\boldsymbol{Y}\|e^{\varphi\boldsymbol{N}}e^{\beta\boldsymbol{N}}=\|\boldsymbol{X}\|\cdot\|\boldsymbol{Y}\|e^{(\varphi+\beta)\boldsymbol{N}},$$

因此 $\boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y}=\|\boldsymbol{X}\|\cdot\|\boldsymbol{Y}\|$

且 $\arg(\boldsymbol{X}\nsim\boldsymbol{Y})=\arg\boldsymbol{X}+\arg\boldsymbol{Y}$•

若 $\boldsymbol{X}$ 的共轭为

$$\overset{*}{\boldsymbol{X}}=\|\boldsymbol{X}\|e^{-\varphi\boldsymbol{N}},$$

则 $\boldsymbol{X}$ 的逆为

$$\boldsymbol{X}^{-1}=\frac{1}{\|\boldsymbol{X}\|}=e^{-\varphi\boldsymbol{N}}\text{•}$$

可以看出, 利用“虚构”的 $\boldsymbol{N}$ 和平面 M 中的 $\nsim$_积, 我们可以得到平面 M 的复结构• 当 $\boldsymbol{l}=\mathbf{1}$(即, $\varphi=0$) 时, 可以到任意叶面上的复结构(参见[1])•

3 单参数相似运动

分别记 R 和 R_0 为固定空间和可动空间• R_0 对于 R 的单参数运动记为 R/R_0• 该运动可表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_0\\ \mathbf{1}\end{bmatrix} \tag{4}$$

或 $\boldsymbol{X}=(h\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},$

其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}_0$ 分别表示 R 和 R_0 任意点的位置矢量, $\boldsymbol{C}$ 为任意平移矢量, $\boldsymbol{AA}$ 是一个适当的正交矩阵• 相似比 h 和矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ 中的元素为实参数 t 的连续可微函数•

4 E^4 空间中的平面相似运动

设 M 为 E^3 空间中通过原点的平面• 我们考虑曲线 $\alpha:\boldsymbol{I}\to M$, 对每一 $t\in\boldsymbol{I}$,

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))\text{•}$$

设 $\alpha(t)$ 为 r 阶可微正则曲线•

取 $\beta(t)=\alpha(t)\times\boldsymbol{l}^*$,

$$\begin{aligned}\beta(t)=&(\alpha_1(t)\cos\theta+\alpha_2(t)\sin\theta,\ \alpha_2(t)\cos\theta-\\&\alpha_1(t)\sin\theta,\ \alpha_3(t)\cos\theta,\ \alpha_3(t)\sin\theta)=\\&(\beta_1(t),\beta_2(t),\beta_3(t),\beta_4(t)),\end{aligned}$$

并定义矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为:

$$\boldsymbol{B}=H^+(\beta(t))=\begin{bmatrix}\beta_1(t) & -\beta_2(t) & \beta_3(t) & -\beta_4(t)\\ \beta_2(t) & \beta_1(t) & -\beta_4(t) & \beta_3(t)\\ \beta_3(t) & \beta_4(t) & \beta_1(t) & -\beta_2(t)\\ \beta_4(t) & -\beta_3(t) & \beta_2(t) & \beta_1(t)\end{bmatrix}=$$

$$H^+(\boldsymbol{l}^*)H^-(\alpha(t)), \tag{5}$$

其中算子 H^+ 和 H^- 为Hamilton 算子(参见[2]), 对应的算子 $\boldsymbol{B}$ 也称为 Hamilton 算子• 设 $\alpha(t)$ 为单位速度曲线• 若 $\alpha(t)$ 不过原点, 则 $\boldsymbol{B}$ 矩阵可表为

$$\boldsymbol{B}=h\boldsymbol{A}, \tag{6}$$

其中 $h:\boldsymbol{I}\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ t\to h(t)=\|\alpha(t)\|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$•

定理 2 在方程 $\boldsymbol{B}=h\boldsymbol{A}$ 中, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实正交矩阵•

证明　由方程(5), 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_4$ 且 $\det\boldsymbol{A} = 1$. 证毕.

引理 3　矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_0 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为平面 M 上的一条曲线.

定理 4　$\boldsymbol{B}$ 为实正交矩阵, $(\dot{\ })$ 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

证明　由(5), $\dot{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{I}_4$ 且 $\det\dot{\boldsymbol{B}} = 1$. 证毕.

定理 5　在平面 M 上, 相似运动是一个正则运动, 并且它与 h 的选择无关.

证明　因为此运动是正则的, $\det\dot{\boldsymbol{B}} = 1 \neq 0$, 并且 $\det\dot{\boldsymbol{B}}$ 的值与 h 无关. 将方程(7) 对 t 微分, 可得

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{X}_0 + \dot{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{X}}_0,$$

其中 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 为绝对速度, $\dot{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{X}_0 + \dot{\boldsymbol{C}}$ 为滑动速度, $\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{X}}_0$ 为相对速度. 证毕.

5　相似运动的极点和极曲线

为求运动的极点, 我们必须求解方程

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{X}}_0 = \dot{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{X}_0 + \dot{\boldsymbol{C}} = 0. \tag{8}$$

方程(8) 的任意解就是运动平面 R_0 中某瞬时运动极点. 由定理 4, 因 $\det\dot{\boldsymbol{B}} = 1$, 方程(8) 在每一瞬时 t, 只有一个解, 即

$$\boldsymbol{X}_0 = -\dot{\boldsymbol{B}}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}. \tag{9}$$

在这种情况下可得到如下定理:

定理 6　在相似运动中, 在每一瞬时 t, 存在唯一瞬时极点(瞬心).

定理 7　运动平面 (R_0) 中, 与每一瞬时 t 相对应的极点, 可由用 $\dot{\boldsymbol{B}}^{-1}$ 替换转动速度矢量 $-\dot{\boldsymbol{C}}$ 求得.

定理 8　$\boldsymbol{C}(t)$ 为单位速度曲线, 当且仅当运动极曲线是单位球的大圆.

证明　由方程(9) 可知 $\boldsymbol{q}_0 = -\dot{\boldsymbol{B}}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}$, 因 $(\dot{\boldsymbol{B}}^{-1})$ 为正交矩阵, 又有 $\|\boldsymbol{q}_0\| = \|\dot{\boldsymbol{C}}\|$. 由于 $\boldsymbol{C}(t)$ 为单位速度曲线, 可得 $\|\dot{\boldsymbol{C}}\| = 1$. 则交曲线 $\boldsymbol{q}_0$ 可记为 $\boldsymbol{q}_0 \in S^2 \cap M$.

定理 9　平面上相似运动, 通过瞬心曲线(极曲线) 相互滑动和滚动实现, 其滑动和滚动值为 h.

推论 10　特别地, 当 $\alpha(t) = \boldsymbol{C}(t)$ 时, 运动极曲线 $q_0 = -l$(常数), 而固定极曲线 $q = 0$ (即作旋转运动).

定义 11　称 r 阶滑动加速度方程为零的点为 $(n-1)$ 阶加速度中心.

由定义 11, 可求得方程如下的解:

$$\boldsymbol{B}^{(r)}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}^{(r)} = \boldsymbol{0}. \tag{10}$$

因此矩阵 $\boldsymbol{B}^{(r)}$ 有逆. 由方程(10), 每一瞬时 t 的 $(n-1)$ 阶加速度中心为

$$\boldsymbol{X} = -(\boldsymbol{B}^{(r)})^{-1}\boldsymbol{C}^{(r)}.$$

[参 考 文 献]

[1]　Pfaff Frank R. A commutative multiplication of number triplets[J]. Amer Math Monthly, 2000, **107**:

156－162.

[2] Agrawall O P. Hamilton operators and dual_number quaternions in spatial kinematic[J]. Mech Mach Theory, 1987, **22**(6): 569－575.

[3] Yayli Y. Homothetic motions at E^4[J]. Mech Mach Theory, 1992, **27**(3): 303－305.

[4] Hacisalihoglu H H. On the rolling of one curve or surface upon another[J]. Proc Roy Irish Acad Sect A, 1971, **71**(2): 13－16.

[5] Yayli Y, Hacisalihoglu H H, Ergin A A. On the division algebras in R^3[J]. Algebras, Groups and Geometries, 2001, **18**: 341－348.

Hamilton Operators and Homothetic Motions in $\boldsymbol{R}^3$

Yusuf Yayli, Nergiz Yaz, Murat Kemal Karacan

(Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ankara University,

06100 Tandoğan, Ankara, Turkey)

Abstract: Quaternion is a division ring. It is shown that planes passing through the origin can be made a field with the quaternion product in R^3. The Hamiltonian operators help us define the homothetic motions on these planes. New characterizations for these motions are investigated.

Key words: Hamilton operator; homothetic motion; quaternion