

部分潜入水中椭圆柱体振动分析*

朱永谊 翁智远 吴家龙

(同济大学, 1987年2月8日收到)

摘 要

本文在文献[1]的基础上, 提出一种研究部分潜入水中椭圆柱体弯曲振动的解析法, 并指出文献[2]的不足之处。作为特例, 本文计算了考虑水体可压缩影响时的水中圆柱体的自振频率, 给出了可压缩性影响范围。

一、引 言

水中柱体的振动研究近几十年来一直受到有关工程人员的关注。柱水耦联振动方程是一组常微分积分方程, 通常的解析处理方法有: (1)把柱体视为刚性体^[3]; (2)以无水振型代替有水振型^[4]; (3)以无水振型函数为基函数将有水振型函数展开为无穷级数^[1]; (4)将耦联体系的微分积分方程中的积分项作为常微分方程的非齐次项处理^{[2][5][6]}。其中文献[1][2][3]对椭圆截面柱体进行了讨论。

本文提出的解析法, 首先从文献[1]得到的柱水耦联振动微分积分方程入手, 利用文献[7]基本思想, 将柱、水模态函数用同一完备正交级数展开, 使柱水振型解耦; 然后将振型函数分解成一个一致收敛级数和另一线性多项式之和, 解决了振型级数的收敛性和可微性; 最后给出了不同水深、任意齐次边界条件、受约束的椭圆柱体有水振型函数的精确解和以有限阶行列式表示的频率方程。

二、柱水耦联振动方程与解耦

2.1 柱水耦联振动方程的建立^[1]

假定椭圆柱体高为 H , 椭圆截面的长半轴为 a , 短半轴为 b , 壁厚为 d , 水深为 $h(h \leq H)$ (如图1)。

假定水是理想的不粘流体; 运动是无旋的; 不计表面波动。

若柱体沿 y 方向振动, 水被扰动, 根据假定, 流体速度场存在一个势函数 $\phi(\xi, \eta, z, t)$, 它满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\gamma^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

* 中国科学院科学基金资助的课题。

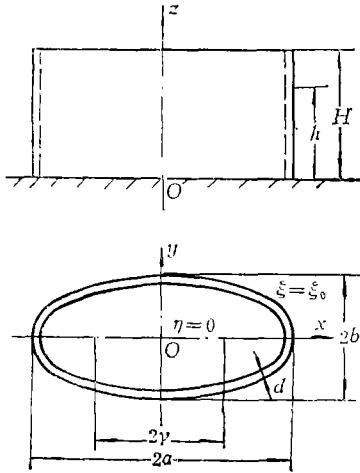


图1 椭圆柱体

其中 $\gamma^2 = a^2 - b^2$, c 为水中声速。

$\phi(\xi, \eta, z, t)$ 满足下列边界条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z=0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad z=h \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial t} a \cdot \sin \eta, \quad \xi = \xi_0 \quad (2.2c)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = \xi_1 \quad (\xi_1 \gg \xi_0) \quad (2.2d)$$

其中 $y = y(z, t) = Y(z) \exp[i\omega t]$ 为柱体沿 y 方向的位移,
 $\xi_0 = th^{-1}b/a$ 为椭圆面坐标。

利用分离变量法, 令:

$$\phi(\xi, \eta, z, t) = i\omega H(\xi)G(\eta)Z(z) \exp[i\omega t] \quad (2.3)$$

代入上述方程得

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, z, t) = i\omega \exp[i\omega t] \cdot \frac{2a}{h} \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \frac{s_1(\xi_0, q_s) \{B_{1s}^{(1)}\}^2 \int_0^h Y(z) \cos \lambda_s z \cdot dz}{s_1'(\xi_0, q_s) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \cdot \cos \lambda_s z \right. \\ \left. + \sum_{s=j}^{\infty} \frac{s_1(\xi_0, -q_s') \{A_{1s}^{(1)}\}^2 \int_0^h Y(z) \cos \lambda_s z \cdot dz}{s_1'(\xi_0, -q_s') \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \cos \lambda_s z \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_s = \frac{2s-1}{2h} \pi$$

$$q_s = \frac{\gamma^2}{4} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_s^2 \right), \quad \frac{\omega}{c} > \lambda_s$$

$$q_s' = \frac{\gamma^2}{4} \left(\lambda_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right), \quad \frac{\omega}{c} < \lambda_s$$

$$s_1(\xi, q_s) = \text{Se}_1(\xi, q_s) - \frac{\text{Se}_1'(\xi_1, q_s)}{\text{Ge}_1'(\xi_1, q_s)} \text{Ge}_1(\xi, q_s)$$

$$s_1(\xi, -q_s') = \text{Se}_1(\xi, -q_s') - \frac{\text{Se}_1'(\xi_1, -q_s')}{\text{Ge}_1'(\xi_1, -q_s')} \text{Ge}_1(\xi, -q_s')$$

Se_1, Ge_1 为修正的马休函数, Se_1' 和 Ge_1' 均为该函数对 ξ 的一阶导数, $A_{2r+1}^{(1)}$ 和 $B_{2r+1}^{(1)}$ 均为马休级数系数^[8]。

由伯努里方程, 沿柱体单位高度上水动压力的合力在 y 轴方向的投影为:

$$p|_{\xi=\xi_0} = -\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\xi=\xi_0} \cdot a \sin \eta d\eta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi a^2 \rho \omega^2}{h} \exp[i\omega t] \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \frac{s_1(\xi_0, q_s) \{B_1^{(1)}\}^2 \int_0^h Y \cos \lambda_s z dz}{s'_1(\xi_0, q_s) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \cdot \cos \lambda_s z \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{s=j}^{\infty} \frac{s_1(\xi_0, -q'_s) \{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h Y \cos \lambda_s z dz}{s'_1(\xi_0, -q'_s) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} \cdot \cos \lambda_s z \right\} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

其中 ρ 为水的密度。当不考虑水体可压缩性时 ($\omega/c \ll 1$)， $j=1$ ，(2.5) 式中只保留第二项，与文献[2](2.5)式比较，显然文献[2]推导有误。由达朗贝尔原理得 $O \sim h$ 段柱体弯曲自由振动方程为：

$$EJ \frac{d^4 Y_1(z)}{dz^4} - \omega^2 (\rho_1 F + m(z)) Y_1(z) = 0 \quad (2.6)$$

其中 $Y_1(z)$ 为 $O \sim h$ 段柱体振型， ω 为相应的振动频率， ρ_1 为柱体密度。

$$m(z) = \frac{2\rho_1}{Y_1(z)h} \left[\sum_{s=1}^{\infty} N_s \int_0^h Y_1(z) \cos \lambda_s z dz \right] \cdot \cos \lambda_s z \quad (2.7)$$

$$N_s = \begin{cases} \frac{\pi a^2 \pi}{\rho_1 F} \frac{s_1(\xi_0, q_s) \{B_1^{(1)}\}^2}{s'_1(\xi_0, q_s) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} & (1 \leq s \leq j-1) \\ \frac{\pi a^2 \rho}{\rho_1 F} \frac{s_1(\xi_0, -q'_s) \{A_1^{(1)}\}^2}{s'_1(\xi_0, -q'_s) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \right\}} & (j \leq s \leq \infty) \end{cases} \quad (2.8)$$

从(2.6)式可知，水对柱体的影响相当于附加在柱体上分布质量 $m(z)$ 。

2.2 柱水振型解耦^[7]

式(2.6)是一个微分积分方程，按文献[7]基本思想，我们令：

$$Y_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \lambda_s z \quad (2.9)$$

将(2.9)式代入(2.6)式，并利用 $\{\cos \lambda_s z\}$ ，在 $(0, h)$ 区间上的完备正交性得：

$$EJ \frac{d^4 Y_1(z)}{dz^4} - \omega^2 \left[\rho_1 F \sum_{s=1}^{\infty} a_s (1 + N_s) \cos \lambda_s z \right] = 0 \quad (2.10)$$

至于 $d^4 Y_1(z)/dz^4$ 表达式，不能从(2.9)式逐项求导获得，而必须由下节方法得到。从(2.6)到(2.10)的过程使原柱水耦合的微分积分方程变为柱水振型解耦的微分方程，由此可以建立柱水耦合振动的等效力学模型。

三、柱、水体系的振动特性

3.1 基本方程

柱水耦联振动方程为:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 Y_1}{dz^4} - \omega^2 \left[\rho_1 F \sum_{s=1}^{\infty} a_s (1 + N_s) \cos \lambda_s z \right] &= 0 & (0 \leq z \leq h) \\ EJ \frac{d^4 Y_2}{dz^4} - \omega^2 \rho_1 F Y_2 &= 0 & (h \leq z \leq H) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

力和位移关系为:

$$M = -EJY'', \quad Q = -EJY' \quad (3.2)$$

我们按水深高度分段, 取不同的振型函数。在有水处取 G-S 组*, 在无水处取 S-S 组**, 即:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \lambda_s z & (0 \leq z \leq h) \\ Y_2 &= \sum_{s=1}^{\infty} \bar{a}_s \sin \bar{\lambda}_s (H - z) & (h \leq z \leq H) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

这里 $\lambda_s = \frac{2s-1}{2h} \pi$, $\bar{\lambda}_s = \frac{s\pi}{H-h}$ ($s=1, 2, 3, \dots$)

3.2 振型的收敛性和可微性

任何振型函数都可以用一组完备正交级数表示, (3.3) 式中 $\{\cos \lambda_s z\}$, $\{\sin \bar{\lambda}_s z\}$ 均是完备正交基。但它们所组成的级数可能在 $[0, h]$ 和 $[h, H]$ 区间内非一致收敛, 其导数也不能通过级数逐项求导表示。但是, 我们可以通过级数的重新构造来解决振型的收敛性和可微性。例如对于:

$$Y_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \lambda_s z \quad (0 \leq z \leq h)$$

一般只有当 $Y_1(h) = 0$ 时, 级数在 $[0, h]$ 区间连续, 并且一致收敛到 $Y_1(z)$, 也可以逐项求导表示 $Y_1'(z)$ 。对于 $Y_1(h) \neq 0$ 一般情形, 令:

$$Y_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \lambda_s z + \frac{z}{h} Y_1(h) - \frac{z}{h} Y_1(h) \quad (3.4a)$$

将等号右边最后一项展开为余弦级数, 并与第一项合并得:

$$Y_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ a_s + \frac{2}{\lambda_s h} \left[\frac{1}{\lambda_s h} - (-1)^s \right] Y_1(h) \right\} \cos \lambda_s z + \frac{z}{h} Y_1(h) \quad (3.4b)$$

* G-S 组为一端导向, 另端简支边界条件的精确解。

** S-S 组为二端简支边界条件精确解。

按定义等号右端级数项在 $[0, h]$ 闭区间内一致收敛, 其导数 $Y_1'(z)$ 可以逐项求导获得^[7], 如下式:

$$Y_1'(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -a_s \lambda_s - \frac{2}{h} \left[\frac{1}{\lambda_s h} - (-1)^s \right] Y_1(h) \right\} \sin \lambda_s z + \frac{Y_1(h)}{h} \quad (3.5)$$

同样道理, 我们可以得到(3.3)式各阶导数(见附录)。可以证明^[7]这样处理不但保证而且大为改善了振型的收敛性。

3.3 任意水深的柱水频率方程

按3.2节中振型级数求导方法, 我们得到(3.3)式的各阶导数, 并把所得结果代入(3.1)、(3.2)式, 最后得:

$$\left\{ \lambda_s^4 - \frac{\rho_1 F}{EJ} (1 + N_s) \omega^2 \right\} a_s = d_1 Y_1'(0) + d_2 Q(0) + d_3 Y_1(h) + d_4 Y_1''(h) \quad (3.6a)$$

$$\left\{ \bar{\lambda}_s^4 - \frac{\rho_1 F}{EJ} \omega^2 \right\} \bar{a}_s = \bar{d}_1 Y_1''(h) + \bar{d}_2 Y_2''(h) + \bar{d}_3 Y_2(H) + \bar{d}_4 M(H) \quad (3.6b)$$

对于非 G-S-S 边界条件, (3.6)式变为:

$$\left. \begin{aligned} a_s &= q_1 Y_1'(0) + q_2 Q(0) + q_3 Y_1(h) + q_4 Y_1''(h) \\ \bar{a}_s &= \bar{q}_1 Y_2(h) + \bar{q}_2 Y_2''(h) + \bar{q}_3 Y_2(H) + \bar{q}_4 M(H) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

对于最一般的 S-G(下端简支, 上端导向)端部需满足边界条件:

$$Y_1(0) = M(0) = Y_1'(H) = Q(H) = 0 \quad (3.8a)$$

连续条件:

$$Y_1(h) = Y_2(h), Y_1'(h) = Y_2'(h), Y_1''(h) = Y_2''(h), Y_1'''(h) = Y_2'''(h) \quad (3.8b)$$

将(3.3)式代入(3.8)式, 利用(3.7)式得频率方程为:

$$[e_{ij}]_{6 \times 6} \{Y_1'(0), Q(0), Y_1(h), Y_1''(h), Y_2(H), M(H)\}^T = \{0\} \quad (3.9)$$

$$\text{频率行列式为: } |e_{ij}|_{6 \times 6} = 0 \quad (3.10)$$

我们可以从(3.10)式得到柱水耦合固有频率精确值, 由(3.9)、(3.7)、(3.3)式得到振型分布。这里我们用 G-S-S 组建立相应于求解 S-G 边界条件最一般频率方程(3.9)式, 其余边界条件、约束条件下的频率方程只须删去相应的行和列。如果在 $z=h$ 处有约束使 $Y_1(h) = 0$, 那么(3.9)退化为:

$$[e_{ij}]_{5 \times 5} \{Y_1'(0), Q(0), Y_1''(h), Y_2(H), M(H)\}^T = \{0\} \quad (3.11)$$

如果柱水高度一致, 则(3.9)退化为:

$$[e_{ij}]_{4 \times 4} \{Y_1'(0), Q(0), Y_1(h), M(h)\}^T = \{0\} \quad (3.12)$$

3.4 几种边界情况下的频率方程

(1) C-F (一端固定, 一端自由的悬臂式)

$$[e_{ij}]_{4 \times 4} \{Q(0), Y_1(h), Y_1''(h), Y_2(H)\}^T = \{0\} \quad (3.13)$$

(2) F-F (两端自由的自重式)

$$[e_{ij}]_{4 \times 4} \{Y_1'(0), Y_1(h), Y_1''(h), Y_2(H)\}^T = \{0\} \quad (3.14)$$

(3) G-S (一端导向一端简支)

$$[e_{ij}]_{2 \times 2} \{Y_1(h), Y_1''(h)\}^T = \{0\} \quad (3.15)$$

如柱水高度相同时，不能从(3.9)式退化，但(3.6)式提供了简便的解析表达式，即：

$$\left\{ \lambda_s^4 - \frac{\rho_1 F}{EJ} (1 + N_s) \omega^2 \right\} = 0 \tag{3.16}$$

则，
$$\omega_s = \sqrt{\frac{\lambda_s^2}{\rho_1 F (1 + N_s) / EJ}} \quad (s=1, 2, 3, \dots) \tag{3.17}$$

无水时(3.17)退化为：

$$\omega_s = \lambda_s^2 / (\rho_1 F / EJ)^{\frac{1}{2}} \quad (s=1, 2, 3, \dots) \tag{3.18}$$

可以证明 $N_s > 0$ ，所以水中柱体湿频率低于无水柱体干频率， N_s 反映了水的附加质量的影响。

顺便指出，文献[2]、[5]、[6]将柱水耦联振动方程的积分项如为微分方程的非奇次项处理得到的通解在某些情况可能失去部分解，因为，其通解形式为：

$$Y_1(z) = D_1 \cos kz + D_2 \sin kz + D_3 \operatorname{ch} kz + D_4 \operatorname{sh} kz + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{E_s}{1 - \frac{h}{2} E_s} \left(\sum_{i=1}^4 D_i I_s^{(i)} \right) \cos \lambda_s z \tag{a}$$

其中
$$k^4 = \frac{\rho_1 F \omega^2}{EJ} \tag{b}$$

对于 G-S 边界条件须满足：

$$Y_1'(0) = Y_1''(0) = Y_1(h) = Y_1''(h) = 0 \tag{c}$$

将(a)式代入(c)式后，(a)式等号右边级数项消失（因 $\cos \lambda_s z$ 恒满足(c)式），因此无法反映水的影响，最后得到的频率与用本文方法得到的无水柱体频率(3.14)结果是一致的，这显然有误。

四、计算结果与讨论

为了说明本方法正确性，并定量考虑水体可压缩性影响，本文就水中悬臂圆柱体的振动特性进行计算。

例 1 自振频率随半径变化。基本参数：平水深实心圆柱体， $H=h=20\text{m}$ ， $d=0$ ， $E=2.94 \times 10^{10}\text{Pa}$ ， $\rho_1=2450\text{kg/m}^3$ ， $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ， $c=1438.027\text{m/s}$ ， ω_i^A 为第 i 阶空气中柱体自振频率， ω_i^W ， ω_i^{CW} 分别为水中第 i 阶柱体忽略和考虑水体可压缩性时的自振频率。

从表 1 知：本文结果与文献[6]结果相当吻合。这说明本文方法是可靠的。由于水体附加质量的作用，以及考虑水体可压缩性时的能量耗散，使得 $\omega_i^A > \omega_i^W > \omega_i^{CW}$ 。且 a/h 越小，

表 1 自振频率随半径变化

a/h	一 阶 自 振 频 率 rad/s				$ \omega_1^W - \omega_1^A $	$ \omega_1^{CW} - \omega_1^W $
	ω_1^A	ω_1^W	ω_1^b [6]	ω_1^{CW}	$\frac{\omega_1^W}{\omega_1^A}$ %	$\frac{\omega_1^{CW}}{\omega_1^W}$ %
0.003	0.9135	0.7734	0.7763	0.7734	18.11	0.00
0.025	7.612	6.517	6.647	6.517	16.81	0.00
0.040	12.180	10.050	10.782	10.050	15.95	0.00

a/h	二阶自振频率 rad/s				$ \omega_2^W - \omega_1^A $	$ \omega_1^{CW} - \omega_1^W $
	ω_2^A	ω_2^W	$\omega_2^{[6]}$	ω_1^{CW}	$\frac{\omega_1^W}{\omega_1^{CW}}$ %	$\frac{\omega_1^{CW}}{\omega_1^W}$ %
0.003	5.725	4.847	4.864	4.847	18.11	0.00
0.025	47.706	40.845	41.635	40.843	16.79	0.00
0.040	76.329	65.834	67.482	65.816	15.94	0.03

a/h	三阶自振频率 rad/s				$ \omega_3^W - \omega_1^A $	$ \omega_1^{CW} - \omega_1^W $
	ω_3^A	ω_3^W	$\omega_3^{[6]}$	ω_1^{CW}	$\frac{\omega_1^W}{\omega_1^{CW}}$ %	$\frac{\omega_1^{CW}}{\omega_1^W}$ %
0.003	16.029	13.573	13.555	13.572	18.09	0.00
0.025	133.578	114.689	116.382	114.652	16.50	0.03
0.040	213.725	185.263	189.634	184.969	15.30	0.16

$|\omega_1^W - \omega_1^A|/\omega_1^W$ 越大, 而 $|\omega_1^{CW} - \omega_1^W|/\omega_1^{CW}$ 越小, 这说明半径越小, 水的影响越大, 可压缩性的影响越小。随着振型阶数 i 的增加, $|\omega_i^W - \omega_i^A|/\omega_i^W$ 越小, 而 $|\omega_i^{CW} - \omega_i^W|/\omega_i^{CW}$ 越大, 这说明, 水对高阶振型的影响小, 可压缩性对高频影响大。从本算例可知, 水的可压缩性对细长柱的影响可以忽略。

例 2 自振频率随柱筒厚度变化。基本参数: 平水深圆柱筒, $H=h=80\text{m}$, $a=10\text{m}$, $E=2.94 \times 10^{10}\text{Pa}$, $\rho_1=2450\text{kg/m}^3$, $\rho=1000\text{kg/m}^3$, $c=1438.027\text{m/s}$, 厚度为 d 。表 2 为自振频率, 图 2 和图 3 为 $d/a=0.01$ 时的柱体位移振型和水动压力振型。

表 2 自振频率随柱筒厚度变化

d/a	一阶自振频率 rad/s		$ \frac{\omega_1^{CW}}{\omega_1^W} - 1 $ %	二阶自振频率 rad/s			$ \frac{\omega_2^{CW}}{\omega_2^W} - 1 $ %	三阶自振频率 rad/s			$ \frac{\omega_3^{CW}}{\omega_3^W} - 1 $ %	
	ω_1^A	ω_1^W		ω_1^{CW}	ω_2^A	ω_2^W		ω_2^{CW}	ω_3^A	ω_3^W		ω_3^{CW}
1.0	9.515	8.470	8.468	0.024	59.63	52.96	52.38	1.228	166.97	150.35	148.18	1.45
0.5	10.639	9.157	9.154	0.035	66.67	57.27	56.37	1.594	186.68	163.11	160.18	1.83
0.01	13.390	3.553	3.546	0.197	83.91	22.72	22.40	1.340	234.91	67.889	63.057	7.66

从表 2 可知, 筒厚越薄, 水体影响和可压缩性影响越大, 在筒厚相当薄时, 水的可压缩对第二阶以上的自振频率影响已经不能忽略。

从图 2 知, 在水中和在空气中柱的基本振型差别甚微, 因此用无水振型代替有水振型求基频^[4]结果不会相差很大。从图中还可知, 水体可压缩性对高阶振型影响大些。

从图 3 知, 水体可压缩性对高阶动水压力振型影响较大。

例 3 自振频率随水深变化。基本参数: $H=80\text{m}$, 外径 $a=10\text{m}$, 壁厚 $d=5\text{m}$, $E=2.94 \times 10^{10}\text{Pa}$, $\rho_1=2450\text{kg/m}^3$, $\rho=1000\text{kg/m}^3$, $c=1438.027\text{m/s}$ 。表 3 反映了自振频率随水深变化规律, 图 4 和图 5 为 $h/H=0.5$ 时的柱体位移和水动压力振型。

从表 3 知, 水越深, 水体附加质量和可压缩性对自振频率的影响越大。

图 4 和图 5 反映的变化规律同图 2 和图 3。

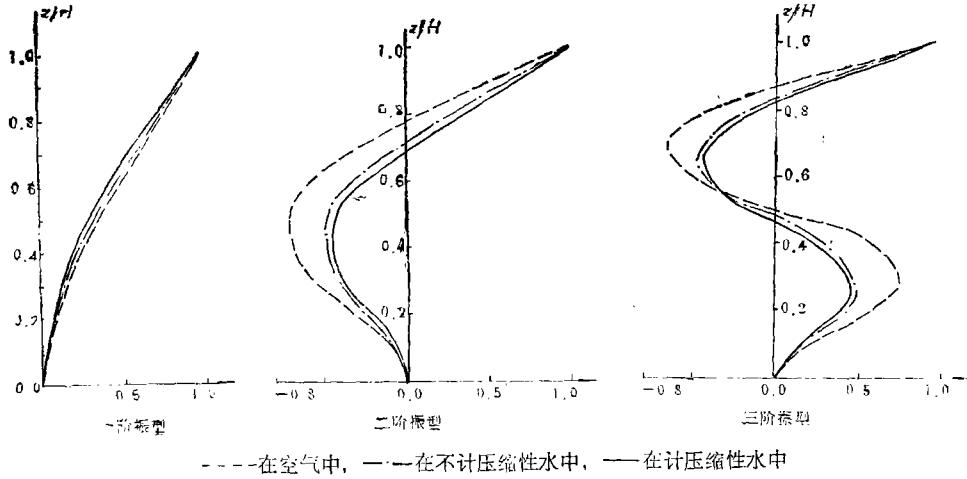


图2 薄壁圆筒振型

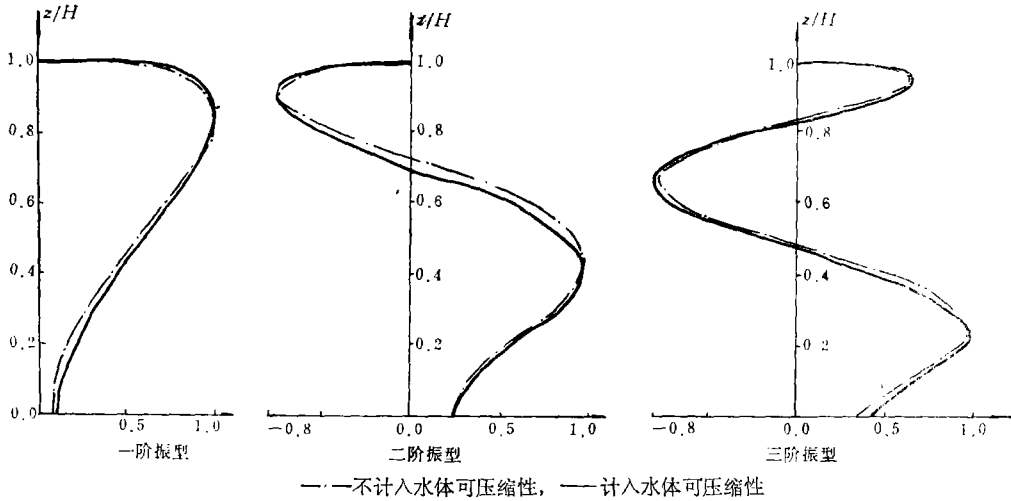
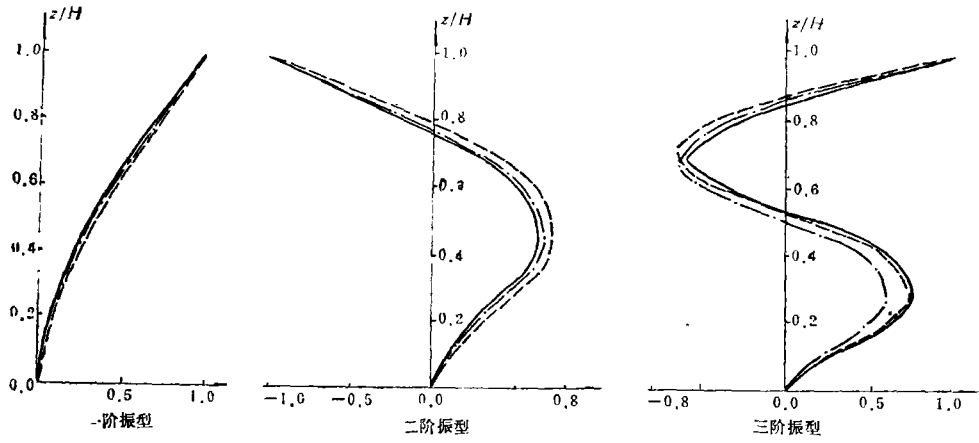


图3 自由振动时的动力压力

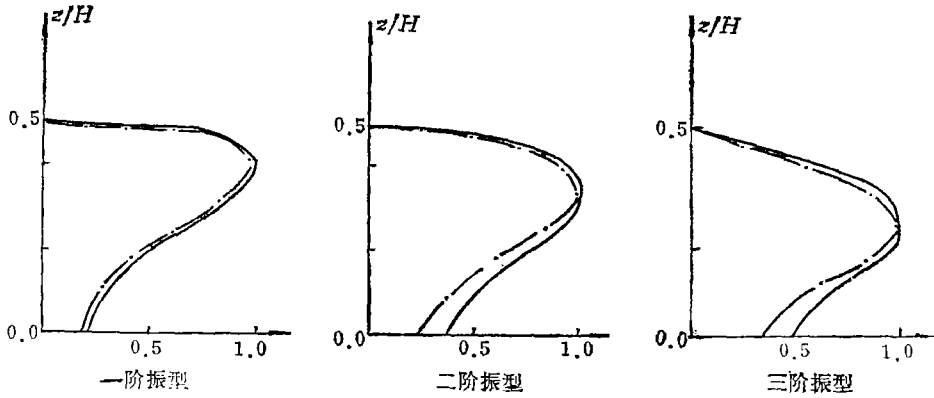
表3 自振频率随水深变化

h/H	一阶自振频率 rad/s			$\frac{\omega_1^{CW}}{\omega_1^A}$ %	二阶自振频率 rad/s			$\frac{\omega_2^{CW}}{\omega_2^A}$ %	三阶自振频率 rad/s			$\frac{\omega_3^{CW}}{\omega_3^A}$ %
	ω_1^A	ω_1^W	ω_1^{CH}		ω_2^A	ω_2^W	ω_2^{CH}		ω_3^A	ω_3^W	ω_3^{CH}	
0	10.639				66.671				186.68			
0.5		10.572	10.572	0.00		62.635	62.140	0.80		172.35	170.93	0.89
1.0		9.157	9.154	0.03		57.287	56.368	1.59		163.11	158.01	4.5



---在空气中, -·-在不计可压缩性水中, ——在计压缩性水中

图4 部分潜入水中圆柱体振型



-·-不计水体可压缩性, ——计水体可压缩性

图5 自由振动时的动水压力

五、结 论

(一) 水的存在降低了对应无水柱体自振频率, 并改变无水柱体振型。通常水越深、柱体越细长、柱筒厚度越薄、振型数越低, 水的附加质量影响越大。有水、无水基本振型基本相同, 高阶振型略有不同。

(二) 考虑水体可压缩性时的自振频率略小于不考虑水体不可压缩性时的频率。通常水越深、柱体越矮胖、柱筒越薄、振型数越高, 水体可压缩性的影响越大。大多数情况下可以忽略水体可压缩性的影响, 只是当 $\omega_s h/c \geq (2s-1)/5$ (s 为振型数) 情况下可压缩性影响才显著。

(三) 本文提出的解析解能有效地求解 $h < H$ 情况下不同水深、任意齐次边界条件、受约束的水中圆柱体弯曲自由振动问题, 并可定量反映水体可压缩性影响。同时本文顺便指出文献[2]的不足之处。

附 录

$$Y_1 = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos \lambda_s z = \sum_{s=1}^{\infty} \{a_s + s_1 Y_1(h)\} \cos \lambda_s z + \frac{z}{h} Y_1(h)$$

$$Y_1' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -a_s \lambda_s + (-1)^s \frac{2}{h} Y_1(h) + (-1)^s s_1 Y_1'(0) \right\} \sin \lambda_s z + \frac{h-z}{h} Y_1'(0)$$

$$Y_1'' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -\lambda_s^2 a_s + (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s Y_1(h) - \frac{2}{h} Y_1''(0) + s_1 Y_1''(h) \right\} \cos \lambda_s z + \frac{z}{h} Y_1''(h)$$

$$Y_1''' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \lambda_s^3 a_s - (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s^2 Y_1(h) + \frac{2}{h} \lambda_s Y_1'(0) + \frac{2}{h} (-1)^s Y_1''(h) \right. \\ \left. + (-1)^s s_1 Y_1'''(0) \right\} \sin \lambda_s z + \frac{h-z}{z} Y_1'''(0)$$

$$Y_1'''' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \lambda_s^4 a_s - (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s^3 Y_1(h) + \frac{2}{h} \lambda_s^2 Y_1'(0) + (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s Y_1''(h) - \frac{2}{h} Y_1''''(0) \right\} \cos \lambda_s z$$

$$Y_2 = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \bar{\lambda}_s \bar{z}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \bar{a}_s + s_2 [Y_2(h) - (-1)^s Y_2(H)] \right\} \sin \bar{\lambda}_s \bar{z} + \frac{\bar{z}}{h'} Y_2(H) + \frac{h' - \bar{z}}{h'} Y_2(h)$$

$$Y_2' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \bar{a}_s \bar{\lambda}_s - \frac{2}{h'} [Y_2(h) - (-1)^s Y_2(H)] \right\} \cos \bar{\lambda}_s \bar{z} - \frac{1}{h'} [Y_2(h) - Y_2(H)]$$

$$Y_2'' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\lambda}_s^2 \bar{a}_s + \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s [Y_2(h) - (-1)^s Y_2(H)] + s_2 [Y_2''(h) - (-1)^s Y_2''(H)] \right\} \sin \bar{\lambda}_s \bar{z} \\ + \frac{\bar{z}}{h'} Y_2''(h) + \frac{h' - \bar{z}}{h'} Y_2''(H)$$

$$Y_2''' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\lambda}_s^3 \bar{a}_s + \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^2 [Y_2(h) - (-1)^s Y_2(H)] - \frac{2}{h'} [Y_2''(h) - (-1)^s Y_2''(H)] \right\} \cos \bar{\lambda}_s \bar{z} \\ - \frac{1}{h'} [Y_2'''(h) - Y_2'''(H)]$$

$$Y_2'''' = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \bar{\lambda}_s^4 \bar{a}_s - \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^3 [Y_2(h) - (-1)^s Y_2(H)] + \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s [Y_2''(h) - (-1)^s Y_2''(H)] \right\} \sin \bar{\lambda}_s \bar{z}$$

这里 $s_1 = \frac{2}{\lambda_s h} \left[\frac{1}{\lambda_s h} - (-1)^s \right]$, $s_2 = -\frac{2}{\lambda_s h'}$, $h' = H - h$, $\bar{z} = H - z$

$$d_1 = -\frac{2}{h} \lambda_s^2, \quad d_2 = -\frac{2}{EJh}, \quad d_3 = (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s^2, \quad d_4 = -(-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s$$

$$\bar{d}_1 = \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^3, \quad \bar{d}_2 = -\frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s, \quad \bar{d}_3 = -(-1)^s \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^3, \quad \bar{d}_4 = -(-1)^s \frac{2}{EJh'} \bar{\lambda}_s$$

$$c_1 = \lambda_s^4 - \frac{\rho_1 F}{EJ} (1 + N_s) \omega^2, \quad c_2 = \bar{\lambda}_s^4 - \frac{\rho_1 F}{EJ} \omega^2, \quad q_i = \frac{d_i}{c_1}, \quad \bar{q}_i = \frac{d_i}{c_2} \quad (i=1 \sim 4)$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{s=1}^{\infty} q_1, & e_{12} &= \sum_{s=1}^{\infty} q_2, & e_{13} &= \sum_{s=1}^{\infty} (q_3 + s_1), & e_{14} &= \sum_{s=1}^{\infty} q_4 \\ e_{21} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\lambda_s^2 q_1 + \frac{2}{h} \right], & e_{22} &= \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 q_2, & e_{23} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\lambda_s^2 q_3 - (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s \right], & e_{24} &= \sum_{s=1}^{\infty} [\lambda_s^2 q_4 - s_1] \\ e_{31} &= \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s \lambda_s q_1 - s_1], & e_{32} &= \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s \lambda_s q_2] \\ e_{33} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \lambda_s q_3 - \frac{2}{h} + \bar{\lambda}_s \bar{q}_1 - \frac{2}{h'} \right] - \frac{1}{h'}, & e_{34} &= \sum_{s=1}^{\infty} [(-1)^s \lambda_s q_4 + \bar{\lambda}_s \bar{q}_2] \\ e_{35} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{\lambda}_s \bar{q}_3 + (-1)^s \frac{2}{h'} \right] + \frac{1}{h'}, & e_{36} &= \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\lambda}_s \bar{q}_4 \\ e_{41} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \lambda_s^3 q_1 + (-1)^s \frac{2}{h} \lambda_s \right], & e_{42} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \lambda_s^3 q_2 - \frac{s_1}{EJ} \right] \\ e_{43} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \lambda_s^3 q_3 - \frac{2}{h} \lambda_s^2 + \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_1 - \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^2 \right] \\ e_{44} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \lambda_s^3 q_4 + \frac{2}{h} + \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_2 + \frac{2}{h'} \right] + \frac{1}{h'}, & e_{45} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_3 + (-1)^s \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^2 \right] \\ e_{46} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_4 + \frac{2}{h'} (-1)^s \frac{1}{EJ} \right] + \frac{1}{h' EJ}, & e_{53} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{q}_1 \bar{\lambda}_s - \frac{2}{h'} (-1)^s \right] - \frac{1}{h'} \\ e_{54} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \bar{q}_2 \bar{\lambda}_s, & e_{55} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{q}_3 \bar{\lambda}_s + \frac{2}{h'} \right] + \frac{1}{h'}, & e_{56} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \bar{q}_4 \bar{\lambda}_s \\ e_{63} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_1 - (-1)^s \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^2 \right], & e_{64} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_2 + (-1)^s \frac{2}{h'} \right] + \frac{1}{h'} \\ e_{65} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_3 + \frac{2}{h'} \bar{\lambda}_s^2 \right], & e_{66} &= \sum_{s=1}^{\infty} \left[(-1)^s \bar{\lambda}_s^3 \bar{q}_4 + \frac{2}{h' EJ} \right] - \frac{1}{h' EJ} \end{aligned}$$

其余均为零。

参 考 文 献

- [1] Kotsubo, Seima, Seismic force effect on submerged bridge piers with elliptic cross sections, *Proceedings of the Third World Conference Earthquake Engineering, Vol. II* (1965).
- [2] 张悉德等, 部分埋入水中椭圆柱体弯曲自由振动, *应用数学和力学*, 7, 9 (1986), 813—820.
- [3] Williams, A. N., Wave forces on an elliptic cylinder, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE*, 111, 2 (1985).
- [4] Ишков П. К., Определение частот колебаний упругих стержней в жидкости, *Прикладная Математика и Механика*, 3—4, 1 (1937—1938).

- [5] 櫻井彰雄, 水中に立られる柱状构造物の振動, 土木技術, 16, 6 (1961).
- [6] 徐汉忠, 水中悬臂梁的自振频率的简便计算公式, 河海大学学报, 14, 4 (1986).
- [7] 朱永谊、翁智远、吴家龙, 部分潜入水中圆柱壳的振动分析, 同济大学学报, 4 (1987).
- [8] Miller, K. S., *Partial Differential Equations in Engineering Problems*, Prentice-Hall, Book Co. INC. (1953)

Vibration Analysis of Elliptical Column Partially Submerged in Water

Zhu Yong-yi Weng Zhi-yuan Wu Jia-long

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper, a general analytical method based on Ref. [1] is presented to study the bending vibration of an elliptical column partially submerged in water. Besides, it is pointed out that there is a limitation to the method mentioned in Ref. [2]. As a special example, the natural frequencies of circular column submerged in water considering compressibility are calculated, and the extent of compressible effect is given.