应用数学和力学，第9卷第4期（1988年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

闭合圆柱壳在轴向冲击荷载下的某些动力计算问题*

成祥生

（同济大学，1987年2月24日收到）

摘　要

本文讨论了闭合圆柱形壳体在轴向冲击荷载作用下的某些动力计算问题，其中包括动应力的计算和稳定性问题。文中分析了冲击过程中动量及能量的变化，并计入冲击物和被冲击的闭合圆柱壳系统质量的影响；用相当质量法将整个圆柱形壳体的分布质量转化为只集中在壳体一端的"相当质量"，从而导出闭合圆柱形壳体在轴向冲击荷载作用下的动力因数，因而解决了在上述受力情况下计算动应力的问题和求出临界荷重的问题。

一、引　言

在文献[1～3]中曾讨论过杆件受冲击荷载作用下的动力计算问题。本文用能量原理对闭合的圆柱形壳体在轴向冲击荷载作用下的动力计算问题进行研究。在讨论中，计入冲击物和被冲击的圆柱形壳体质量的影响；用相当质量法将具有分布质量的壳体化为集中在壳体一端的圆环，从而导出闭合圆柱形壳体在轴向冲击荷载作用下的动力因数。

为了使讨论简化，我们假定：略去冲击系统的阻尼作用，不计冲击过程中的能量损失，不考虑被冲击物体局部的塑性变形，壳体中的最大动力变形仍在线性范围，最大的动应力不超出壳体材料的比例极限。

二、冲击过程的分析

设有一闭合圆柱形壳体，竖直放置，如图1所示。壳体长为L，半径为R，厚度为h。今设有一重物Q沿轴线运动向静止的壳体冲击，冲击点为m_1点。我们选择右手正交曲线坐标系：α，β，γ；它们分别沿壳体的母线方向、圆周方向和半径方向，其中γ朝圆心为正。冲击点m_1的坐标为$\alpha_1=L$。假定在冲击后，冲击重物Q和壳体两者连成一体，在冲击点壳体产生一向下的动力位移u_{1dy}，同时重物Q的速度很快减到零。若冲击物和壳体的质量分别为M和M_s，设在冲击前瞬间重物Q的速度为V_0，于是此时冲击物的动量为MV_0；若在冲击后瞬

* 钱伟长推荐.

间，壳体在冲击点m_1得到的速度为V，则壳体在冲击后瞬间得到的动量并不等于M_sV，而只是量M_sV的一部份；因为壳体在其它各点的速度不等于V，尤其是壳体在最低端的支承处，这些速度为零。我们设想把壳体的全部质量M_s的一部份eM_s集中于冲击点所在水平面的圆周上，并且质量eM_s沿该圆周上均匀分布，于是壳体真正得到的动量就是eM_sV。其中$e<1$，称为折算系数。该折算系数可根据原先具有分布质量的整个壳体和经过折算为集中于$\alpha=L$水平环上的“相当质量”的弹性系统在振动时动能相等的原理求出。

现在对冲击系统应用动量守恒原理于冲击瞬间的前后。冲击物在冲击前瞬间具有的动量MV_0，应等于冲击后瞬间该冲击物与壳体合在一起所获得的动量$(M+eM_s)V$，于是就得到了壳体在冲击后瞬间在冲击点所获得的速度

$$V=MV_0/(M+eM_s) \tag{2.1}$$

再应用能量守恒原理于冲击后瞬间至壳体上冲击点m_1的速度降到零的时间间隔。当壳体受冲击后，在冲击点既得到了速度V，那末当重物达到极点时，速度便从V降到零。我们已设重物沿壳体的中心轴线方向运动而冲击，重物Q的行程就是壳体在冲击点的轴向动力位移u_{1dy}。设壳体两端为简支，则在两端的法向位移w和沿圆周方向的切向位移v都是零。于是冲击物和壳体两者在冲击后瞬间所具有的动能与势能之和应等于薄壳在冲击点达到极点时壳体沿轴向弹性力的势能，即

$$\frac{1}{2}(M+eM_s)V^2+Mgu_{1dy}=\frac{1}{2}Pu_{1dy} \tag{2.2}$$

其中P为壳体上最大的轴向弹性力，u_{1dy}为壳体在冲击点处最大的轴向动力位移。由于u_{1dy}和P都是从零增加到最大值，所以(2.2)式的右端便是弹性力P在轴向位移u_{1dy}上所作的功，即所谓弹性力的势能。

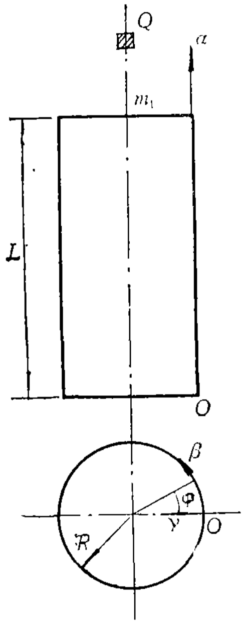

图 1

三、动力因数的确定

由于弹性壳体始终工作于比例极限之内，故有如下正比例关系，$P:Q=u_{1dy}:u_{1st}$，由此可得

$$P=Qu_{1dy}/u_{1st} \tag{3.1}$$

其中u_{1st}为由力Q在冲击点所引起的静力轴向位移。

将(3.1)代入(2.2)并注意到(2.1)，便得到关于u_{1dy}的二次代数方程，由它可得到

$$u_{1dy}=u_{1st}(1\pm\sqrt{1+V_0^2/K_egu_{1st}}) \tag{3.2}$$

式中

$$K_e=1+eM_s/M \tag{3.3}$$

由于u_{1dy}应大于u_{1st}，故在上式根号前应使用正号，式(3.2)可写成

$$u_{1dy}=K_du_{1st} \tag{3.4}$$

其中

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/K_e g u_{1st}} \tag{3.5}$$

称为动力因数。由（3.4）可以看出：动力因数K_d表示动力位移u_{1dy}和静力位移u_{1st}的比值。若已知静力位移，则由（3.4）可求出动力位移。显然，动力内力或动应力亦可根据静力内力或静应力[4]乘上动力因数K_d而得到。

如果不计壳体质量的影响，则由式（3.3）并令$M_s=0$，从而$K_e=1$，于是由（3.5）便得到

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/g u_{1st}} \tag{3.6}$$

这时我们将得到动力因数K_d的上限值，应用时偏于安全。

如果在（3.5）或（3.6）中，冲击物的冲击速度$V_0=0$，就得到$K_d=2$，这便是突加荷载情形下的动力因数。

四、求折算系数

对于如图1所示的封闭圆柱形壳体，若采用无量纲的坐标

$$\xi=\alpha/R, \qquad \varphi=\beta/R \tag{4.1}$$

式中α为沿母线的坐标，β为弧长，而φ为圆心角。于是壳体上受冲击点的坐标α_1变为ξ_1，其中$\xi_1=\alpha_1/R=L/R$；壳体两端的坐标为零及$\xi_0=\xi_1=L/R$。设壳体中面上任一点沿α-，β-，γ-坐标线方向的瞬时位移分量分别是

$$u=u(\xi,\varphi,t),\ v=v(\xi,\ \varphi,\ t),\ w=w(\xi,\ \varphi,\ t) \tag{4.2}$$

今使原先具有分布质量的整个壳体的动能和经过折算后只集中于$\xi_1=L/R$的水平环上的“相当质量”eM_s的弹性系统的动能相等，即

$$\frac{1}{2g}\rho h R^2\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}(u_t^2+v_t^2+w_t^2)d\xi d\varphi=\frac{1}{2}e\int_0^{2\pi}\frac{M_s}{2\pi R}(u_t^2)_{\xi_1}Rd\varphi \tag{4.3}$$

便可求得折算系数e。

上式中ρ为壳体材料的比重；u_t,v_t,w_t为各个瞬时位移分量对时间t的一阶偏导数；g为重力加速度。(4.3)式的左边表示具有分布质量的整个壳体的动能，而右边表示集中在冲击点ξ_1处水平环上的“相当质量”eM_s的弹性系统的动能。下标ξ_1表示该括号中的量应取冲击点ξ_1处的值。若注意到壳体的总质量

$$M_s=2\pi RhL\rho/g \tag{4.4}$$

则由（4.3）可得折算系数

$$e=\frac{R}{L}\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}(u_t^2+v_t^2+w_t^2)\,d\xi d\varphi\Big/\int_0^{2\pi}(u_t^2)_{\xi_1}d\varphi \tag{4.5}$$

对处于振动中的圆柱形壳体，我们使用一个所谓瞬时位移函数$F=F(\xi,\varphi,t)$，瞬时位移分量u，v，w可用函数F表示如下[5]

$$u=-E_{\xi\varphi\varphi}+\mu F_{\xi\xi\xi},\ v=(2+\mu)F_{\xi\xi\varphi}+F_{\varphi\varphi\varphi},\ w=\nabla^4F=F_{\xi}^{(4)}+2F_{\xi\xi\varphi\varphi}^{(4)}+F_{\varphi}^{(4)} \tag{4.6}$$

式中μ为壳体材料的泊松系数，而$F_{\xi\varphi\varphi}$等为函数F对相应下标的偏导数。

对于两端简支的闭合圆柱形壳体，在相应于某个一般的振形下可设瞬时位移函数如下

$$F(\xi,\varphi,t)=C_{mn}\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega_{mn}t] \tag{4.7}$$

其中$\lambda_m=m\pi R/L$，ω_{mn}为对应于某个一般振形的固有频率，以下将略去它的下标mn。由(4.6)和（4.7）可得

$$\left.\begin{aligned}u(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}\lambda_m(n^2-\mu\lambda_m^2)\cos n\varphi\cdot\cos\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\\v(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}n[(2+\mu)\lambda_m^2+n^2]\sin n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\\w(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}(\lambda_m^2+n^2)^2\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

对于两端简支的圆柱形壳体应有如下的边界条件，即

当$\xi=0$ 及$\xi=\xi_0=L/R$时：

$$v=w=N_\alpha=M_\alpha=0\tag{4.9}$$

其中N_α和M_α分别为壳体沿α-坐标线方向的无矩内力和弯矩。上面的条件可转化为如下的形式

当$\xi=0$及$\xi=\xi_0$时：

$$F=F_{\xi\xi}=F_\xi^{(4)}=F_\xi^{(6)}=0\tag{4.10}$$

不难看出，函数（4.7）在壳体的两端$\xi=0$ 及 $\xi=\xi_0$是能够满足条件（4.10）的。

将（4.8）代入（4.5）进行积分并约简后，可得

$$e=\frac{1}{2}\left\{\lambda_m^2(n^2-\mu\lambda_m^2)^2+n^2[(2+\mu)\lambda_m^2+n^2]^2+(\lambda_m^2+n^2)^4\right\}\left\{\lambda_m^2(n^2-\mu\lambda_m^2)^2\cos^2\lambda_m\xi_1\right\}^{-1}\tag{4.11}$$

由上式可见，当冲击点的坐标ξ_1已知时，折算系数e的值便取决于数m和n。再由（3.3）和（3.5）可知，e值愈小，K_d愈大；故求$e_{\min}$最有意义。我们已知冲击点的坐标为$\xi_1=\xi_0=L/R$，并取$n=0,1,2,3,4,5$；$m=2,4,6,\cdots,14,16$进行了具体的计算。计算结果表明，当$n=0$，$m=2$时e值最小，其值为$e_{\min}=0.58756$。

五、数 值 算 例

设有一竖直放置，两端简支的闭合圆柱形壳体，受有重物Q冲击，该重物沿壳体轴线运动，如图1所示。在冲击前瞬间的速度为V_0；已知：$R=0.4$m；$L=20$m，$h=0.02$m，$V_0=0.5$m/sec，壳体的材料为钢，其弹性模量及密度分别为$E=2.1\times10^{10}$kg/m^2 及 $\rho=7.8\times10^3$kg/m^3，$\mu=0.3$，重物$Q=1000$kg。由题意知道：冲击点的坐标为$\xi_1=L/R=20/0.4=50$，经计算得到弯曲刚度$D=1.53846\times10^4$kg-m，冲击物质量$M=Q/g=1000/9.81=101.93680$ kg-sec^2/m，壳体质量$M_s=2\pi RLh\rho/g=799.33$kg-sec^2/m，壳体的横截面积$F=2\pi Rh=0.050265$m^2。

冲击点处壳体的轴向静力位移

$$u_{1st}=QL/EF=1.89470\times10^{-5}\text{m}\tag{5.1}$$

由(4.11)已求出$e=0.58756$，于是由（3.3）求得

$$K_e=1+eM_s/M=1+0.58756\times799.33/101.93680=6.50731\tag{5.2}$$

最后，由（3.5）求得

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/gK_eu_{1st}}=16.51999\tag{5.3}$$

于是动力内力或动应力可由静力内力或静应力乘上动力因数K_d而得到。对轴向受冲击的闭合圆柱形壳体，除了作强度计算外，还应作纵向稳定性校核或求出临界荷重[6]

$$Q_{cr}=\sigma_{cr}F/K_d=EhF/K_dR\sqrt{3(1-\mu^2)}\tag{5.4}$$

这实际上是将临界应力降低K_d倍，用已知的数据代入上式，则有

$$Q_{cr}=\frac{2.1\times10^{10}\times0.02\times0.050265}{16.52\times0.4\sqrt{3(1-0.3^2)}}=1933.5868\times10^3\text{kg}$$

参 考 文 献

[1] Saint-Venant, B., *Theorie de l'elasticite des Corps Solides*, Paris, Parag. 61 (1883), 490.

[2] Love, A. E. H., *Math. Theo. of Elast.* (1927), 198.

[3] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, second edition (1937).

[4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book Comp. Inc. (1959).

[5] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек*, Гостехиздат (1949).

[6] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability* (1936).

Some Problems for Dynamic Computation of Closed Cylindrical Shell Due to Axial Impact Load

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The present paper treated some of the problems for dynamic computation of closed cylindrical shell due to an axial impact load, including the calculations of the dynamic stresses and the problems of stability. It analysed the changes of the momentums and the energy in the impact process, took into account the effect of the mass of the striking object and the system of the closed cylindrical shell to be struck, turned the distributed mass of the total cylindrical shell into an "equivalent mass" being concentrated on only at one end of the shell by using the way of reduced mass, and accordingly derived the dynamic factor of the closed cylindrical shell under the axial impact load, hence resolved the questions of calculation of the dynamic stresses in the loaded case mentioned above and found out the critical loading.