应用数学和力学，第9卷第3期（1988年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限变形的极限分析定理

薛大为

（北京工业学院，1986年4月16日收到）

摘　要

本文建立了有限变形的极限分析的变分原理（定理1），证明了它与有限变形的极限分析的全套方程和条件等价．本文又证明了：根据此变分原理求得的有限变形的极限载荷乘子，介于有限变形的极限分析的上限定理和下限定理[1]所分别给出的上限解和下限解之间．

一、引　言

自从著名的上限定理和下限定理建立以来，作为很有实用价值的一个固体力学分支的极限分析法取得了甚大的进展．Koiter[2]在1960年曾作过一个很好的总结．Mura-Lee[3]，钱令希和钟万勰[4]、王仁、黄文彬、曲圣年、赵祖武、梅占馨、王长兴[5]均曾作过研究．1964年，笔者曾投稿建议过有关极限分析的定理，这些定理后来被发表在文[6]中．

小变形的极限分析理论虽然有了甚大进展，但有些问题，例如受均布外压的圆柱壳，由小变形理论给出的极限载荷并不使结构的承载能力竭尽．为了了解几何变形对结构承载能力的影响以及了解结构在达到小变形意义下的极限载荷以后的情况，有必要对有限变形下的极限分析法进行研究．

继建立有限变形的虚速率原理及有限变形的极限分析的上限定理及下限定理[1]之后，本文建立了有限变形的极限分析的变分原理，证明了它与有限变形下的极限分析的全套方程和条件等价．本文并证明了，根据此变分原理求得的极限载荷乘子，介于相应的由有限变形的上限定理和下限定理所分别给出的上限解和下限解之间．

二、固体力学中的极限分析定理

一受外载作用的刚理想塑性体，当其处于极限状态时，应满足下述方程和条件：

1．全部体积内的平衡方程：

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}=0 \tag{2.1}$$

2．流动定律和刚性条件：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\qquad（在塑性区V_p） \tag{2.2a}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (在刚性区V_r) \tag{2.2b}$$

其中，λ为正标量且$\dot{\varepsilon}_{ij}$由下式与u_i和$\dot{u}_i$相联系

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}+\dot{u}_{k,i}u_{k,j}+\dot{u}_{k,j}u_{k,i}) \tag{2.3}$$

3. S_σ上的边界条件

$$(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j=\nu T_i \tag{2.4}$$

4. S_v上的边界条件

$$\dot{u}_i=\bar{\dot{u}}_i \tag{2.5}$$

5. 屈服条件

$$f(\sigma_{ij})=\sigma_T^2 \qquad (在塑性区V_p) \tag{2.6a}$$

$$f(\sigma_{ij})\leqslant\sigma_T^2 \qquad (在刚性区V_r) \tag{2.6b}$$

其中，σ_{ij}为应力张量；$\dot{\varepsilon}_{ij}$为应变率张量；u_i为位移分量；$\dot{u}_i$为速率分量；V为物体的体积；S为V的表面；n_i为外法线方向余弦；$(\ )_{,j}$代表$\partial(\ )/\partial x_j$且$x_j$为 Lagrange 坐标；$\delta_{ij}$为 Kronecker 记号；$T_i$为基准外载；$\nu$为载荷乘子，因而$\nu T_i$为表面外载而$\nu$为极限分析的待求量；$f(\sigma_{ij})$为$\sigma_{ij}$的凸函数；$\sigma_T^2$对非均质材料可逐点改变；足标$p$及$r$分别代表塑性及刚性；$V=V_p+V_r$；$S=S_{\sigma r}+S_{vr}+S_{\sigma p}+S_{vp}$。

定理 1 结构抵达极限状态时，载荷乘子ν为下式的驻值：

$$\nu=Sta\frac{\int_V\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV-\int_{V_p}\frac{\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{2\sigma_T^2}(f-\sigma_T^2)dV-\int_{S_v}(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)dS}{\int_{S_\sigma}T_i\dot{u}_idS} \tag{2.7}$$

其中，$\dot{\varepsilon}_{ij}$由(2.3)式与u_i及$\dot{u}_i$相联系；σ_{ij}和$\dot{u}_i$互相无关，同时独立变分但应使$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}>0$；$f(\sigma_{ij})$的最大值处于塑性区内。

证明 为了叙述清晰起见，暂不计入刚塑性分界面上和塑性区内可能存在的不连续面上的平衡、连续诸条件，这是因为根据文[7]及[8]，当这些情况要计入时，只需增加相应的项即可。同时我们注意到，除有任意变分$\delta\sigma_{ij}$和$\delta\dot{u}_i$外，位移的变分δu_i将认为等于零，这是因为我们研究的问题也可以理解为当结构受到小变形的极限载荷以后发生了流动，研究此已知几何改变对极限承载能力的影响。

根据 Gauss 定理将(2.7)式变分，可得

$$-\int_{V_r}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}\delta\dot{u}_kdV-\int_{V_p}\Big\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}$$

$$-\Big[\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}\Big]_{,j}\Big\}\delta\dot{u}_kdV+\int_{V_r}\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\sigma_{ij}dV+\int_{V_p}\Big[\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{2\sigma_T^2}(f-\sigma_T^2)$$

$$-\frac{\sigma_{mk}\dot{\varepsilon}_{mk}}{2\sigma_T^2}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\Big]\delta\sigma_{ij}dV+\int_{S\sigma_r}[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j-\nu T_i]\delta\dot{u}_idS$$

$$-\int_{S_v}n_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]dS+\int_{S\sigma_p}\Big\{(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j\Big(1-\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}\Big)$$

$$-\nu\bar{T}_i\Big\}\delta\dot{u}_i dS-\int_{S_{vp}}\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j\delta\dot{u}_k dS$$

$$-\int_{S_{rp}}\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j\delta\dot{u}_k dS=0$$

因为变分$\delta\sigma_{ij}$和$\delta\dot{u}_i$的任意性，可得

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}=0 \qquad (在V_r内) \tag{2.8a}$$

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}-\left[\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}\right]_{,j}=0 \qquad (在V_p内) \tag{2.8b}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (在V_r内) \tag{2.8c}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{2\sigma_T^2}(f-\sigma_T^2)-\frac{\sigma_{mk}\dot{\varepsilon}_{mk}}{2\sigma_T^2}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (在V_p内) \tag{2.8d}$$

$$(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j=\nu\bar{T}_i \qquad (在S_{\sigma r}上) \tag{2.8e}$$

$$\dot{u}_i=\bar{\dot{u}}_i \qquad (在S_v上) \tag{2.8f}$$

$$[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_j]\left(1-\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}\right)=\nu\bar{T}_i \qquad (在S_{\sigma p}上) \tag{2.8g}$$

$$\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j=0 \qquad (在S_{vp}上) \tag{2.8h}$$

$$\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j=0 \qquad (在S_{rp}上) \tag{2.8i}$$

用σ_{ij}乘(2.8d)，注意$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\sigma_{ij}=2f$，即得

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\left(1-\frac{f-\sigma_T^2}{2\sigma_T^2}-\frac{f}{\sigma_T^2}\right)=0 \qquad (在塑性区)$$

因而可得在V_p内$f=\sigma_T^2$，由此可知在V_r内$f\leqslant\sigma_T^2$。将$f=\sigma_T^2$再代入(2.8d)，即得流动定律[7]。将$f=\sigma_T^2$代入(2.8h)及(2.8i)式得恒等式，再将$f=\sigma_T^2$代入(2.8b)及(2.8g)式，注意到(2.3)式已经利用过以及上述已得各结果，我们即可得下述结论：定理1与极限分析的全套方程和条件等价。上述证明可以无困难地推广到具有多个塑性区和刚性区的情形。

上述变分原理的实用意义之一在于赋予了对函数σ_{ij}和$\dot{u}_i$更多的选取自由。这些函数选取得越是合理，越可能获得更精确的解。因此只要可能，我们应使σ_{ij}满足下限定理，同时也使$\dot{u}_i$满足上限定理。如果σ_{ij}和$\dot{u}_i$是这样选取的，就有下述

定理 2 如果选应力σ_{ij}^*满足下限定理的要求，选速率$\dot{u}_i^0$满足上限定理的要求，则由定理1所给出的极限载荷将介于由上限定理和下限定理所分别给出的相应值之间。

证明 由定理1给出

$$\nu=\frac{\int_V(\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^0 dV-\int_{V_r}\frac{\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^0}{2\sigma_T^2}(f^*-\sigma_T^2)dV}{\int_{S_\sigma}\bar{T}_i\dot{u}_i^0 dS}$$

$$=\frac{\int_V\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^0\frac{3\sigma_T^2-f^*}{2\sigma_T^2}dV+\int_{V_r}\frac{\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^0(f^*-\sigma_T^2)}{2\sigma_T^2}dV}{\int_{S_\sigma}\bar{T}_i\dot{u}_i^0 dS} \tag{2.9}$$

其中，$f^*=f(\sigma_{ij}^*)$。

当将同样的σ^*_{ij}及$\dot{u}^0_i$代入上限定理和下限定理，可得

$$\nu_{上}=\int_V \sigma^0_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij}dV \Big/ \int_{S_\sigma} T_i\dot{u}^0_i dS \tag{2.10}$$

$$\nu_{下}=\int_V \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij}dV \Big/ \int_{S_\sigma} T_i\dot{u}^0_i dS \tag{2.11}$$

其中，σ^0_{ij}由$\dot{\varepsilon}^0_{ij}$根据流动定律和屈服条件确定。因为[5]

$$\sigma^0_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij}\geqslant\frac{3\sigma^2_T-f^*}{2\sigma^2_T}\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij} \tag{2.12}$$

以及 $\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij}>0$，我们可得

$$\nu_{下}\leqslant\nu\leqslant\nu_{上} \tag{2.13}$$

参 考 文 献

[1] Hsueh, D. W., The principle of virtual velocity and the bound theorems on the limit analysis of finite deformation, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Science Press, Shanghai (1985).

[2] Koiter, W., General theorems for elastic-plastic solids, *Progress in Solid Mechanics* (Ed. by Sneddon and Hill), North-Holland, 1 (1960).

[3] Mura, T. and S. L. Lee, Application of variational principle of limit analysis, *Quart. Appl. Math.*, **21**, 3 (1963).

[4] 钱令希、钟万勰，论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理，力学学报，**6**, 4 (1963).

[5] 王仁、黄文彬、曲圣年、赵祖武、梅占馨、王长兴，对"论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理"的讨论，力学学报 **8**, 1 (1965).

[6] 薛大为，建议一组关于极限分析的定理，科学通报，**20**, 4 (1975).

[7] Prager, W. and P. G. Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley & Sons (1951).

[8] 解伯民，弹塑性混合体的变分原理及其应用，力学学报，**1**, 3 (1957).

Theorems on the Limit Analysis of Finite Deformation

Hsueh Dah-wei

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

A generalized variational principle (theorem 1) which is equivalent mathematically to the whole set of equations and conditions and must be satisfied by the limit analysis of finite deformation is proposed in this paper. It is also proved that the limit load deduced from theorem 1 will lie between the lower and upper bounds given by the bound theorems of finite deformation.