应用数学和力学，第9卷第3期（1988年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

概率度量空间的基本理论及应用(Ⅱ)*

张 石 生

（四川大学数学系，1987年1月12日收到）

摘 要

本文是作者文章[1]的继续．得出了概率度量空间的集合的各种概率有界性的表征．借助于这些结果及[1]中所得结果，讨论了概率线性赋范空间中的线性算子理论及概率度量空间映象的不动点定理．

本文是作者文章[1]的继续．在本文中我们得出了概率度量空间中集合的各种概率有界性的表征．借助于这里及在文章[1]中所得出的结论，讨论了概率线性赋范空间中的线性算子理论及概率度量空间中映象的不动点定理．

本文所用的符号、定义均见[1]．

一、概率度量空间中集合有界性的表征

定义1 设$(E,\mathscr{F})$是一PM-空间，A是E中的子集．

（1） A称为概率一致有界集，如果存在$M>0$，使得$F_{x,y}(M)=1$ $(\forall x,y\in A)$；

（2） A称为概率半有界集，如果

$$0<\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)<1;$$

（3） A称为概率有界集，如果

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)=1;$$

（4） A称为概率无界集，如果

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)=0.$$

若E本身是概率一致有界（半有界、有界、无界）集，则称E是概率一致有界（半有界、有界、无界）的空间．

引理1.1 设$(E,\mathscr{F})$是一PM-空间，$A\subseteq E,\alpha\in(0,1]$，则

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\} \tag{1.1}$$

* 中国科学院科学基金资助课题．

证 设 $t_0\in\{t\geqslant 0:\inf\limits_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}$，于是有

$$t_0\in\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\qquad(\forall x,y\in A).$$

因而有

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\geqslant\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\qquad(\forall x,y\in A)$$

故得

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\geqslant\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\tag{1.2}$$

反之，令

$$\beta_0=\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}.$$

故对任意的 $x,y\in A$ 有

$$\beta_0\geqslant\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}$$

于是有

$$\beta_0\geqslant\inf_t\{t\geqslant 0:\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\tag{1.3}$$

结合(1.2)，(1.3)得证(1.1)。

定理 1.2 设$(E,\mathscr{F})$是一 PM-空间，$A\subseteq E$。则

(i) A 是概率一致有界的，当而且仅当存在 $M>0$，使得对一切 $\alpha\in(0,1]$，一致地有

$$\sup_{x,y\in A}d_\alpha(x,y)<M\tag{1.4}$$

其中

$$d_\alpha(x,y)=\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\tag{1.5}$$

(ii) A 是概率有界的，当而且仅当对每一 $\alpha\in(0,1]$ 存在正数 $M=M(\alpha)$，使得

$$\sup_{x,y\in A}d_\alpha(x,y)<M(\alpha)\tag{1.6}$$

(iii) A 是概率半有界的，当而且仅当存在 $\alpha_0\in(0,1)$，使得当 $\alpha\in(0,\alpha_0)$时，

$$\sup_{x,y\in A}d_\alpha(x,y)=\infty;$$

而当 $\alpha\in(\alpha_0,1)$时，存在 $M=M(\alpha)>0$，使得

$$\sup_{x,y\in A}d_\alpha(x,y)<M(\alpha).$$

(iv) A 是概率无界的，当而且仅当对任一 $\alpha\in(0,1]$有

$$\sup_{x,y\in A}d_\alpha(x,y)=\infty.$$

证 (i) 设 A 是概率一致有界的，故存在 $M>0$ 使得 $F_{x,y}(M)=1\quad(\forall x,y\in A)$，因而对一切 $\alpha\in(0,1]$有

$$F_{x,y}(M)>1-\alpha\qquad(\forall x,y\in A).$$

从而

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\leqslant M\qquad(\forall x,y\in A)$$

于是对 $\alpha\in(0,1]$一致地有

$$\sup_{x,y\in A} d_\alpha(x,y)\leqslant M.$$

反之，若(1.4)对一切 $\alpha\in(0,1]$ 一致地成立。于是由引理 1.1.，有

$$\sup_{x,y\in A} d_\alpha(x,y)=\inf_t\{t\geqslant 0:\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)>1-\alpha\}<M\quad(\forall\alpha\in(0,1]).$$

故有

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(M)>1-\alpha,\qquad(\forall\alpha\in(0,1]).$$

让 $\alpha\to 0$，即得 $\inf\limits_{x,y\in A} F_{x,y}(M)=1$。结论(i)得证.

(ii) 设 A 是概率有界的，故对每一 $\alpha\in(0,1]$ 存在 $M(\alpha)>0$，使得

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(M(\alpha))>1-\alpha.$$

引用引理 1.1 和上式即得

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in A} d_\alpha(x,y)&=\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\\&=\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)>1-\alpha\}<M(\alpha)\end{aligned}$$

反之，设对每一 $\alpha\in(0,1]$，存在 $M(\alpha)>0$，使得

$$\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}<M(\alpha).$$

因而对一切 $x,y\in A$，$F_{x,y}(M(\alpha))>1-\alpha$，从而有

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(M(\alpha))\geqslant 1-\alpha.$$

故

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)=1.$$

结论(ii)得证。

(iii) 设 A 是概率半有界的，即

$$0<\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)<1.$$

取

$$\alpha_0=1-\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t).$$

故 $\alpha_0\in(0,1)$。当 $\alpha\in(0,\alpha_0)$ 时有

$$1-\alpha_0=\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)<1-\alpha.$$

因而对一切 $t>0$

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)<1-\alpha.$$

于是由引理 1.1，有

$$\begin{aligned}&\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\\&\quad=\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\infty.\end{aligned}$$

又当 $\alpha\in(\alpha_0,1)$时，则

$$1-\alpha_0=\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha.$$

故存在 $M(\alpha)>0$，使得

$$\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(M(\alpha))>1-\alpha.$$

于是由引理 1.1，

$$\sup_{x,y\in A}\inf_{t}\{t\geqslant0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}$$

$$=\inf_{t}\{t\geqslant0:\ \inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha\}<M(\alpha).$$

反之，设存在 $\alpha_0\in(0,1)$，使得当 $\alpha\in(0,\alpha_0)$时有

$$\sup_{x,y\in A}\inf_{t}\{t\geqslant0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\infty,$$

因而对一切 $M>0$

$$\inf_{t}\{t\geqslant0:\ \inf_{x,y\in A}F_{x,x}(t)>1-\alpha\}=\sup_{x,y\in A}\inf_{t}\{t\geqslant0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}>M.$$

从而有

$$\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(M)\leqslant1-\alpha.$$

由于 $M>0$ 的任意性，故

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)\leqslant1-\alpha.$$

于上式让 $\alpha\to\alpha_0$，即得

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)\leqslant1-\alpha_0 \tag{1.7}$$

又当 $\alpha\in(\alpha_0,1)$时，由假定存在 $M(\alpha)>0$，使得

$$\sup_{x,y\in A}\inf_{t}\{t\geqslant0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}<M(\alpha).$$

由引理 1.1，得

$$\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(M(\alpha))>1-\alpha.$$

于是有

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)>1-\alpha.$$

于上式让 $\alpha\to\alpha_0$，即得

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)\geqslant1-\alpha_0 \tag{1.8}$$

结合(1.7)和(1.8)即得

$$0<\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)=1-\alpha_0<1.$$

结论(iii)得证。

(iv) 设 A 是概率无界的，即

$$0=\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t).$$

故对一切 $t>0$，$\inf\limits_{x,y\in A} F_{y,x}(t)=0$，于是对一切 $\alpha\in(0,1]$

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}$$

$$=\sup_{x,y\in A} d_\alpha(x,y)=\infty.$$

反之，设对一切 $\alpha\in(0,1]$有 $\sup\limits_{x,y\in A} d_\alpha(x,y)=\infty$。故

$$\sup_{x,y\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)>1-\alpha\}=\infty.$$

于是对任意的 $M>0$，对 $\alpha\in(0,1]$一致地有

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(M)\leqslant 1-\alpha.$$

让 $\alpha\to 1$，即得

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(M)=0\qquad(\forall M>0).$$

因而

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)=0.$$

定理证毕。

定理 1.3 设 $(E,\mathscr{F})$ 是一 PM-空间，$A\subseteq E$。则 A 是概率有界集，当而且仅当存在 $G\in\mathscr{D}$，$G(0)=0$，使得

$$F_{x,y}(t)\geqslant G(t)\ \ (\forall x,y\in A,\ t\geqslant 0)\tag{1.9}$$

证 设 A 是概率有界集，即

$$\sup_{t>0}\sup_{s<t}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(s)=\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)=1.$$

令
$$G(t)=\sup_{s<t}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(s).$$

易知 $G\in\mathscr{D}$，$G(0)=0$，且

$$G(t)\leqslant\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)\leqslant F_{x,y}(t)\qquad(\forall x,y\in A,\ t\geqslant 0)$$

反之，设存在 $G\in\mathscr{D}$，$G(0)=0$，使得(1.9)成立，于是

$$\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)\geqslant G(t).$$

故有

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A} F_{x,y}(t)\geqslant\sup_{t>0} G(t)=1.$$

上式表明 A 是概率有界的，定理证毕。

注 1. 定理 1.3 的结论在假定 $(E,\mathscr{F})$ 是 Menger PN-空间的条件下最先在 Radu[8]中证明。

二、概率线性赋范空间中的线性算子

在本节中我们讨论 PN-空间中的线性算子理论。我们先给出如下的定义。

定义 2 设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，T是$E\to E$的线性映象。T称为强有界的，如果存在$M>0$，使得

$$f_{Tx}(t)\geqslant f_{Mx}(t) \qquad (\forall x\in E,t>0) \tag{2.1}$$

其中$f_y=\mathscr{F}(y)(y\in E)$。$T$称为有界的，如果$T$映$E$中的概率有界集为概率有界集。

为了叙述方便，我们先追述[1]中的某些已知的事实。

在[1]的定理4.1中我们曾指出，当$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，且$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$时，则$(E,\mathscr{F},\|\cdot\|)$是一线性赋范空间，其中$\|\cdot\|$由下式定义：

$$\|x\|=\inf_t\{t\geqslant 0:\ f(x)=1\} \qquad (x\in E) \tag{2.2}$$

因此$(E,\mathscr{F},\|\cdot\|)$中的序列$\{x_n\}$称为按范数$\|\cdot\|$收敛于$x\in E$，如果对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n\geqslant N$时有

$$\|x_n-x\|=\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{x_n-x}(t)=1\}<\varepsilon.$$

即当$n\geqslant N(\varepsilon)$时，有$f_{x_n-x}(\varepsilon)=1$.

映象$T:E\to E$称为按范数$\|\cdot\|$连续，如果$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$时，就有$\|Tx_n-Tx\|\to 0$。

又当$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，而$\mathscr{F}$满足条件(PN-5)时：

(PN-5) 对任意的$x,y\in E$和任意的$t_1>0$，$t_2>0$，$\lambda>0$，当$f_x(t_1)>1-\lambda$，$f_y(t_2)>1-\lambda$时，就有$f_{x+y}(t_1+t_2)>1-\lambda$。则$(E,\mathscr{F})$是具有分离点的半范数族$\{p_\alpha:\ \alpha\in(0,1]\}$的局部凸空间，其中

$$p_\alpha(x)=\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_x(t)>1-\alpha\} \qquad (x\in E,\alpha\in(0,1]) \tag{2.3}$$

而且E中的邻域系

$\{U(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varepsilon):\ x\in E,\varepsilon>0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(0,1]$，$n$为自然数$\}$与$E$中的另一邻域系

$$\{N_x(\varepsilon,\alpha):\ x\in E,\ \varepsilon>0,\ \alpha\in(0,1]\},$$

其中$U(x;\ \alpha_1,\ \alpha_2\cdots,\ \alpha_n,\ \varepsilon)$和$N_x(\varepsilon,\ \alpha)$分别定义为：

$$U(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\varepsilon)=\{y\in E:\ p_{\alpha_i}(x-y)<\varepsilon,\ \alpha_i\in(0,1],\ i=1,2,\cdots,n\},$$

$$N_x(\varepsilon,\alpha)=\{y\in E:\ f_{x-y}(\varepsilon)>1-\alpha\},$$

所导出的拓朴是一致的，记此拓朴为$\mathscr{T}$。此时序列$\{x_n\}\subset E$称为$\mathscr{T}$-收敛于$x\in E$，如果对任给的$\varepsilon>0$，$\alpha\in(0,1]$，存在$N_0=N_0(\varepsilon,\alpha)$，当$n\geqslant N_0$时就有

$$f_{x_n-x}(\varepsilon)>1-\alpha,\ \text{即}\ p_\alpha(x_n-x)<\varepsilon \tag{2.4}$$

映象$T:E\to E$称为$\mathscr{T}$-连续的，如果对任意的序列$\{x_n\}\subset E$，当$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x\in E$时，就有$Tx_n\xrightarrow{\mathscr{T}}Tx$。

引理 2.1 设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，其中$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$，设$\|\cdot\|$是E上由(2.2)式定义的范数，$A\subseteq E$。则A是概率一致有界的，当而且仅当存在$M>0$，使得$\sup_{x\in A}\|x\|<M$。

证 由定理1.2，若A是概率一致有界，必存在$M'>0$，使得对一切$\alpha\in(0,1]$一致地有

$$M''=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|_\alpha<M' \tag{2.5}$$

其中

$$\|x\|_\alpha=\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_x(t)>1-\alpha\}.$$

于是对一切 $x,y\in A$ 和一切 $\alpha\in(0,1]$ 有

$$\|x-y\|_\alpha\leqslant M''.$$

于上式让 $\alpha\to 0$，并注意[1]的定理 4.1，即得

$$\sup_{x,y\in A}\|x-y\|\leqslant M''. \tag{2.6}$$

设 y_0 是 A 中任一给定的元，由(2.6)即得

$$\sup_{x\in A}\|x\|\leqslant\sup_{x\in A}\|x-y_0\|+\|y_0\|\leqslant M''+\|y_0\|<M'+\|y_0\|\triangleq M.$$

反之，若存在 $M>0$，使得 $\sup\limits_{x\in A}\|x\|<M$，于是由[1]的定理 4.1，有

$$\sup_{x,y\in A}\|x-y\|_\alpha\leqslant\sup_{x,y\in A}\|x-y\|<2M.$$

即 A 是概率一致有界的。证毕。

引理 2.2 设$(E,\mathscr{F})$是 PN-空间，其中 $\mathscr{F}$ 满足条件(PN-5)。设$\{p_\alpha,\alpha\in(0,1]\}$是 E 上由(2.3)定义的半范数族。$A\subseteq E$。则 A 是概率有界的充分必要条件是对每一 $\alpha\in(0,1]$，存在 $M=M(\alpha)>0$，使得

$$\sup_{x\in A}p_\alpha(x)<M(\alpha) \tag{2.7}$$

定理 2.3 设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，$\mathscr{F}$ 取值于$\mathscr{D}_0$，$\|\cdot\|$由(2.2)式定义。设T: $E\to E$是强有界线性算子，则

(i) 存在 $M>0$，使得$\|Tx\|\leqslant M\cdot\|x\|$ $(\forall x\in E)$；

(ii) T 按范数$\|\cdot\|$连续；

(iii) T 映 E 中的概率一致有界集为概率一致有界集。

证 设T: $E\to E$ 是强有界的线性算子，即存在 $M>0$，使得

$$f_{Tx}(t)\geqslant f_{Mx}(t)\qquad(\forall x\in E;\ t\geqslant 0).$$

于是有

$$\|Tx\|=\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Tx}(t)=1\}\leqslant\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Mx}(t)=1\}$$

$$=M\cdot\|x\|\qquad(\forall x\in E)$$

故结论(i)成立。另(i)和(ii)是等价的

下证(i)⇒(iii)。事实上，设 A 是概率一致有界集，由引理 2.1，存在 $M'>0$ 使得 $\sup\limits_{x\in A}\|x\|<M'$，于是由(i)有

$$\sup_{x\in A}\|Tx\|\leqslant M\cdot\sup_{x\in A}\|x\|<M\cdot M'.$$

故 TA 是概率一致有界集。

(iii)⇒(i)。取 $A=\left\{\dfrac{x}{\|x\|},\ x\in E,x\neq 0\right\}$则 A 是 E 中的概率一致有界集。由假定 TA 是概率一致有界集，故存在 $M>0$，使得

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leqslant M,\ \text{即}\ \|Tx\|\leqslant M\cdot\|x\|,\ (\forall x\in E;\ x\neq 0).$$

显然上面后一式当 $x=0$ 时亦成立。定理证毕。

定理 2.4 设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，其中 $\mathscr{F}$ 满足条件(PN-5)，$\{p_\alpha:\ \alpha\in(0,1]\}$ 是E上由(2.3)定义的半范数族，而 $\mathscr{T}$ 是由$\{p_\alpha,\alpha\in(0,1]\}$导出的拓朴，$T$ 是 $E\to E$ 的线性映象。则 T 是 $\mathscr{T}$-连续的，当而且仅当 T 映 E 中的概率有界集为概率有界集。

证 必要性。设 $T:\ E\to E$ 是 $\mathscr{T}$-连续的，但存在某一概率有界集 $A\subseteq E$，使得 $T(A)$ 不是概率有界的，故由引理 2.2，存在某一 $\alpha_0\in(0,1]$，使得

$$\infty=\sup_{x\in A} p_{\alpha_0}(Tx)=\sup_{x\in A}\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Tx}(t)>1-\alpha_0\}.$$

故对任意的正整数 $n=1,2,\cdots$，存在 $x_n\in A$，使得

$$p_{\alpha_0}(Tx_n)>n,$$

即

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Tx_n}(t)>1-\alpha_0\}>n.$$

故有

$$f_{Tx_n}(n)=f_{T(x_n/n)}(1)\leqslant 1-\alpha_0 \tag{2.7$'$}$$

因$\{x_n\}\subset A$，故$\{x_n\}$是概率有界的，且$x_n/n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$ $(n\to\infty)$，于是有

$$\lim_{n\to\infty} f_{T(x_n/n)}(1)=1.$$

这与(2.7)$'$相矛盾，必要性得证。

充分性。设不然，存在序列$\{x_n\}\subset E$，$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，但 $Tx_n\not\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$。于是存在某一$\alpha_0\in(0,1]$，和一子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}$，使得

$$f_{Tx_{n_k}}(\varepsilon_0)\leqslant 1-\alpha_0 \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{2.8}$$

因 $x_{n_k}\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，故$\{x_{n_k}\}$为一概率有界集。由假定$\{Tx_{n_k}\}$是一概率有界集。故由引理 2.2，对 α_0 存在 $M(\alpha_0)>0$，使得

$$\sup_{k\geqslant 1} p_{\alpha_0}(Tx_{n_k})<M(\alpha_0).$$

因而有

$$\sup_{k\geqslant 1} p_{\alpha_0}(Tx_{n_k})=\sup_{k\geqslant 1}\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Tx_{n_k}}(t)>1-\alpha_0\}$$

$$=\inf\{t\geqslant 0:\ \inf_{k\geqslant 1} f_{Tx_{n_k}}(t)>1-\alpha_0\}<M(\alpha_0).$$

故

$$\inf_{k\geqslant 1} f_{Tx_{n_k}}(M(\alpha_0))>1-\alpha_0 \tag{2.9}$$

上式与(2.8)相矛盾。因而得知 T 为 $\mathscr{T}$-连续的。

定理证毕。

定理 2.5 设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，$\mathscr{F}$ 满足条件(PN-5)。设 T 是 $E\to E$的强有界的线性算子。则 T 是有界线性算子。

证 因 $T:\ E\to E$ 是强有界线性算子，即存在 $M>0$，使得

$$f_{Tx}(t)\geqslant f_{Mx}(t) \qquad (\forall x\in E,\ t\geqslant 0)$$

于是有

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Tx}(t)>1-\alpha\}\leqslant\inf_t\{t\geqslant 0:\ f_{Mx}(t)>1-\alpha\}\qquad(\alpha\in(0,1])$$

即
$$p_\alpha(Tx)\leqslant p_\alpha(Mx)=Mp_\alpha(x)\qquad(\forall x\in E,\alpha\in(0,1])\tag{2.10}$$

若 $A\subseteq E$ 是概率有界的，即对每一 $\alpha\in(0,1]$，存在 $M'(\alpha)>0$，使得

$$\sup_{x\in A}p_\alpha(x)<M'(\alpha)\tag{2.11}$$

于是由(2.10)和(2.11)即得

$$\sup_{x\in A}p_\alpha(Tx)\leqslant M\cdot\sup_{x\in A}p_\alpha(x)<M\cdot M'(\alpha).$$

定理得证.

注 2. 定理 2.5 表明 $T: E\to E$ 是强有界线性算子，则必是有界线性算子.

注 3. 定理 2.4 的结论在 $(E,\mathscr{F})$ 是 Menger PN-空间的情形在[10]中被证明.

三、PM-空间中映象的不动点定理

如所周知，Menger 概率度量空间中映象的不动点定理有不少人讨论过(见例如[2～7])，但对一般的 PM-空间中映象的不动点问题则很少讨论过. 作为前面所得结果的应用，这里将对 PM-空间中的映象给出几个不动点定理.

定理 3.1 设 $(E,\mathscr{F})$ 是 d-完备的 PM-空间，其中 $\mathscr{F}$ 取值于 $\mathscr{D}_0$，d 由下式定义

$$d(x,y)=\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)=1\}\tag{3.1}$$

设 $CB(E)$ 表 E 中一切非空有界 d-闭集的族. T 是 $E\to CB(E)$ 的集值映象. 设存在 $k\in(0,1)$，使得

$$\inf_{p\in Tx,q\in Ty}F_{p,q}(t)\geqslant F_{x,y}\left(\frac{t}{k}\right)\qquad(\forall x,y\in E,t\geqslant 0)\tag{3.2}$$

则 T 在 E 中存在不动点.

证 由(3.2)对任意的 $x,y\in E$，有

$$\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{p\in Tx,q\in Ty}F_{p,q}(t)=1\}\leqslant k\cdot\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{x,y}(t)=1\}.$$

因而由引理 1.1,

$$\sup_{p\in Tx,q\in Ty}d(p,q)=\sup_{p\in Tx,q\in Ty}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{p,q}(t)=1\}$$
$$=\inf_t\{t\geqslant 0:\ \inf_{p\in Tx,q\in Ty}F_{q,p}(t)=1\}\leqslant k\cdot d(x,y)\qquad(\forall x,y\in E)$$

设 H 是 $CB(E)$ 上由度量 d 导出的 Hausdorff 度量，即

$$H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}d(a,b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}d(a,b)\}\qquad(\forall A,B\in CB(E))$$

显然

$$H(Tx,Ty)\leqslant\sup_{p\in Tx,q\in Ty}d(p,q)\qquad(\forall x,y\in E)$$

于是有

$$H(Tx,Ty)\leqslant k\cdot d(x,y)\qquad(\forall x,y\in E)$$

故由Nadler[9]，或[2]的定理5.4.3知T在E中存在不动点，定理证毕。

定理3.2 设$(E,\mathscr{F})$是一d-完备的PM-空间，$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$，其中d由(3.1)定义。设$T: E\to E$是d-连续映象。设对任意的$x,y\in E$，集合

$$O_T(x,y;\ 0,\infty)=\{T^nx,\ T^ny;\ n\geqslant 0\}$$

是概率一致有界的。再设存在正整数m, n使得对一切的$x,y\in E$有

$$F_{T^mx,T^ny}(t)\geqslant\inf_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}F_{p,q}(\Phi^{-1}(t))\qquad(t\geqslant 0)\tag{3.3}$$

其中Φ^{-1}是Φ的反函数，而Φ: $[0,\infty)\to[0,\infty)$是右连续的，严格增的，$\Phi(t)<t$: $\forall t\in(0,\infty)$且$\Phi^n(t)\to 0$, $\forall t\in R^+$。则T在E中存在唯一不动点x_*，而且对任一$x_0\in E$，迭代序列$x_n=T^nx_0$ d-收敛于x_*。

证 由条件(3.3)，对任意的$x,y\in E$有

$$\begin{aligned}
d(T^mx,T^ny)&=\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{T^mx,T^ny}(t)=1\}\\
&\leqslant\inf\{t\geqslant 0:\ \inf_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}F_{p,q}(\Phi^{-1}(t))=1\}\ (\text{由引理}1.1)\\
&=\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{p,q}(\Phi^{-1}(t))=1\}\\
&=\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}\inf\{\Phi(t)\geqslant 0:\ F_{p,q}(t)=1\}\ (\text{由}\Phi\text{的右连续性})\\
&=\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}\Phi(\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{p,q}(t)=1\})\ (\text{由}\ \Phi\ \text{的严格增性})\\
&\leqslant\Phi(\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}\inf_t\{t\geqslant 0:\ F_{p,q}(t)=1\})\\
&=\Phi(\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}d(p,q)).
\end{aligned}$$

另由假定的条件，对任意的$x,y\in E$, $O_T(x,y;0,\infty)$是概率一致有界的，故由定理1.2，对任意的x, $y\in E$，存在$M(x,y)>0$，使得

$$\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}d_\alpha(p,q)<M(x,y)\qquad(\forall\alpha\in(0,1])\tag{3.4}$$

其中d_α由(1.5)式定义，因而对一切$p,q\in O_T(x,y;0,\infty)$有

$$d_\alpha(p,q)\leqslant M(x,y).$$

由[1]的命题2.1知

$$d(p,q)=\lim_{\alpha\to 0}d_\alpha(p,q)\leqslant M(x,y)\qquad(\forall p,q\in O_T(x,y;0,\infty))$$

故由(3.4)，对一切$x,y\in E$，有

$$\sup_{p,q\in O_T(x,y;0,\infty)}d(p,q)\leqslant M(x,y).$$

故定理的结论由[2]的定理1.8.6得知，证毕。

由定理3.2直接可得下面的推论。

推论3.3 设$(E,\mathscr{F})$是d-完备的PM-空间，其中$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$, d由(3.1)式定义。设$T: E\to E$-d-连续。设存在正整数m,n和$k\in(0,1)$，使得

$$F_{T^mx,T^ny}(t)\geqslant F_{x,y}\left(\frac{t}{k}\right)\qquad(\forall x,y\in E,t\geqslant 0)\tag{3.5}$$

则T在E中存在不动点，而且当$m=n$时T在E中的不动点是唯一的，并且对任一$x_0\in E$，迭代序列$x_n=T^{m\cdot n}x_0$ d-收敛于该唯一不动点。

证 前一结论由定理3.2可得，另当$m=n$时有

$$\inf_t\{t\geqslant 0;\ F_{T^n x,T^n y}(t)=1\}\leqslant\inf_t\left\{t\geqslant 0;\ F_{x,y}\left(\frac{t}{k}\right)=1\right\}\qquad(x,y\in E)$$

因而有

$$d(T^m x,T^m y)\leqslant k\cdot d(x,y)\qquad(\forall x,y\in E)$$

于是由Banach压缩映象原理知T^m在E中存在唯一不动点x_*，且对任一$x_0\in E$，

$x_n=T^{m\cdot n}x_0\xrightarrow{d}x_*$。另显然可知$x_*$是$T$的唯一不动点。证毕。

定理3.4 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一d^*-完备的Menger PM-空间，其中Δ满足条件$\Delta(a,b)\geqslant\max\{a+b-1,0\}$，$\forall a,b\in[0,1]$，$d^*$是$E$上由下式定义的度量：

$$d^*(x,y)=\sup_t\{t;\ F_{x,y}(t)\leqslant 1-t\}.\tag{3.6}$$

设对每一$x\in E$，$O_T(x,0,\infty)=\{T^n x;\ n\geqslant 0\}$是$d^*$-有界的。设$T$；$E\to E$是$d^*$-连续的映象，再设对每一$x\in E$，存在正整数$n(x)$，使得对任意的$u,v\in O_T(x;0,\infty)$和任意的$t>d^*(u,v)$都有

$$F_{T^{n(x)}u,T^{n(x)}v}(\Phi(t))>1-\Phi(t)\tag{3.7}$$

其中Φ满足定理3.2中的条件。则T在E中存在不动点，而且对任一$x_0\in E$，迭代序列$\{T^n x_0\}$ d^*-收敛于T在E中之一不动点。

证 由[3]的引理3.1，在定理的假设下有

$$d^*(T^{n(x)}u,\ T^{n(x)}v)\leqslant\Phi(d^*(u,v)),\quad\forall u,v\in O_T(x;0,\infty)\tag{3.8}$$

因而有

$$\begin{aligned}\sup_{u,v\in O_T(x;0,\infty)}d^*(T^{n(x)}u,T^{n(x)}v)&=\sup_{u,v\in\{T^{n(x)+m}x,m\geqslant 0\}}d^*(u,v)\\&\leqslant\sup_{u,v\in O_T(x;0,\infty)}\Phi(d^*(u,v))\\&\leqslant\Phi(\sup_{u,v\in O_T(x;0,\infty)}d^*(u,v))\qquad(\forall x\in E)\end{aligned}$$

故定理的结论由[2]的定理1.8.2得知，证毕。

注4. 利用定理3.4中所介绍的方法，可把通常度量空间中的许多熟知的不动点定理推广到Menger概率度量空间。限于篇幅这里不再一一给出。

参考文献

[1] 张石生，概率度量空间的基本理论(Ⅰ)，应用数学和力学，9，2 (1988).

[2] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[3] Zhang Shi-sheng, The metrization of probabilistic metric spaces with applications, Zbornike radova Prirodno-matematickog fakulteta u Novom Sadu, *Serija za matematiku*, 15, 1 (1985), 107—117.

[4] Hadžić, O., Some fixed point theorems in PM-spaces, Ibid, 15, 1 (1985), 23—36.

[5] Zhang Shi-sheng, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 67 (1984), 85—94.

[6] 张石生，PM-空间与映象的不动点定理，数学研究与评论，5，3 (1985)，23—28.

[7] Constantin, Gh., On some classes of contraction mappings in Menger spaces, *Seminarul de Teoria Probabilitǎtilor si Applicatii*, 76 (1985), 1—10.

[8] Radu, V., On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Ibid, 74 (1985), 1—10.

[9] Nadler, S.B., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, **30** (1969),

[10] 游兆永等，论概率赋范空间上的线性算子及其它，全国第四次泛函分析会议论文资料（1986）.

[11] 张文修、张继国，PM-空间中概率直径的特征及 LPM-空间，工程数学学报，2（1985）.

Basic Theory and Applications of Probabilistic Metric Spaces(Ⅱ)

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

This paper is a continuation of the author's previous paper [1], in which the characterizations of various probabilistically bounded sets are presented, and the linear operator theory and fixed point theory on probabilistic metric spaces are given, too.