应用数学和力学，第9卷第3期（1988年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

地形作用下的非线性Rossby波

刘式适　　谭本馗

（北京大学）（云南大学）

（叶开沅推荐，1987年5月19日收到）

摘　　要

本文利用一个受地形强迫作用的半地转正压模式讨论了非线性 Rossby 波的稳定度和解。结果发现，东西向地形和南北向地形对非线性 Rossby 波的稳定度和相速的影响很不相同。同时也发现，地形强迫下的非线性 Rossby 波可用著名的 KdV 方程描述。

一、引　　言

地形对大尺度大气运动的影响问题历来是气象学家极其感兴趣的问题。自 Charney 和 Eliassen、Bolin 的开创性工作以来[1,2]，人们采用不同的手段作了大量的工作来研究地形效应。现已认识到地形是对大气环流状态产生影响的一个重要因子。例如，Egger、Charney 和 Devore 以及李国庆等的工作表明[3-5]，地形强迫与大气中冬季发生的阻塞现象关系极为密切。

本文的目的是研究地形对非线性 Rossby 波的动力作用，特别是地形对非线性 Rossby 波的稳定度的作用。同时，本文对地形强迫下的非线性 Rossby 波的解也作了讨论。文中得到了一些很有趣味的结果，有些结果与观测事实很好地一致。

二、基 本 方 程 组

我们取β平面上的均质不可压流体为我们的模式大气。其自由面高度为$h=H+\eta(x,y,t)$，平均高度为H。下边界高度用h_B来表示，同时本文假定有条件$h_B\ll h$。这样，控制流体运动的方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(h-h_B)+(h-h_B)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里第一、二个方程是运动方程，第三个方程是连续性方程。引入半地转近似或地转动量近似后运动方程成为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u_g-fv=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v_g+fu=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这里
$$\phi=g\eta,\quad u_g=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad v_g=\frac{1}{f_0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\tag{2.3}$$

从(2.2)可以推得半地转涡度方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial y}+f_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta v_g=0\tag{2.4}$$

式中βv项中的v已用v_g代替。

本文中，我们取两类特殊地形作为流体下边界，一类是东西走向地形，另一类是南北走向地形。我们将东西走向的地形的高度看成仅仅是y的函数，同时假定地形坡度是常数，即

$$h_B=h_B(y),\quad \frac{dh_B}{dy}=\text{constant}\tag{2.5}$$

于是连续性方程化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\eta-v\frac{dh_B}{dy}+(h-h_B)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\tag{2.6}$$

利用条件$h_B\ll h$，(2.6)可近似地写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi-gv_g\frac{dh_B}{dy}+(c_0^2+\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\tag{2.7}$$

这里vdh_B/dy项中的v也用v_g代替了，$c_0=\sqrt{gH}$是浅水波的相速。我们假定方程(2.4)和(2.7)有下列形式的解：

$$u=U(\xi),\quad v=V(\xi),\quad \phi=\Phi(\xi),\quad (\xi=kx+ly-\nu t)\tag{2.8}$$

将(2.8)代入(2.4)和(2.7)，有

$$(kU+lV-\nu)\Phi'''+(kU'+lV')+\frac{f_0^2}{k^2+l^2}(kU'+lV')+\frac{\beta k}{k^2+l^2}\Phi'=0\tag{2.9}$$

$$(kU+lV-\nu)\Phi'+(kU'+lV')(\Phi+c_0^2)-\frac{gk}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi'=0\tag{2.10}$$

这里撇号代表对ξ的微商。(2.9)和(2.10)对ξ积分，有

$$(kU+lV-\nu)\Phi''+\frac{f_0^2}{k^2+l^2}(kU+lV)+\frac{\beta k}{k^2+l^2}\Phi=0\tag{2.11}$$

$$(kU+lV-\nu)\Phi+c_0^2(kU+lV)-\frac{gk}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi=0\tag{2.12}$$

从(2.11)和(2.12)消去U和V，我们得到

$$\Phi''=F(\Phi)\tag{2.13}$$

此处
$$F(\Phi)=\left\{\left[\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]\Phi+\beta\Phi^2\right\}\Bigg/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x-\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]\tag{2.14}$$

$c_x=\nu/k$是非线性 Rossby 波的相速。方程(2.13)是本文用来描述东西向地形强迫下的非线

性 Rossby 波扰动的一个基本方程。

同样，我们将南北向地形的高度看成仅仅是 x 的函数，同时也假定地形坡度是常数，即

$$h_B=h_B(x),\ dh_B/dx=\text{constant} \tag{2.15}$$

这时，连续性方程可近似地写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi-gu_g\frac{dh_B}{dx}(c_0^2+\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{2.16}$$

将(2.8)代入(2.4)和(2.16)后进行与得到(2.13)相同的运算，有

$$\Phi''=F_1(\Phi) \tag{2.17}$$

式中

$$F_1(\Phi)=\left\{\left[\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\right]\Phi+\beta\Phi^2\right\}\Big/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x+\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi\right)\right] \tag{2.18}$$

方程(2.17)是本文用来描述南北向地形强迫下的非线性 Rossby 波扰动的另一基本方程。下面几节我们将详细研究方程(2.13)和(2.17)的性质。

三、东西向地形强迫下的非线性Rossby波扰动的稳定度

我们现在开始讨论受东西向地形强迫作用的非线性 Rossby 波的行为，其控制方程是(2.13)。很明显，若不考虑地形，(2.13)化为

$$\Phi''=\frac{\beta+\mu^2c_x}{(k^2+l^2)c_x}\Phi+\frac{\beta}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi^2 \tag{3.1}$$

式中 $\mu^2=f_0^2/c_0^2$。方程(3.1)描述的是非线性自由 Rossby 波，由我们在研究地球物理流体中的非线性 Rossby 波动力学时首先得到。我们已求得了它的解析解，这里我们不再讨论，有兴趣的读者可参看我们的文章[6]。

若考虑地形，一般来说要求得(2.13)的精确解析解是困难的。因此，我们将在(2.13)的平衡点附近讨论它的近似解。

令 $\Phi'=\psi$，(2.13) 化为下列一阶联立方程组：

$$\Phi'=\psi,\ \psi'=F(\Phi) \tag{3.2}$$

这里 $F(\Phi)$ 由(2.14)给出。显而易见，方程组(3.2)有两个平衡点：

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡点 }A:\ (\Phi,\psi)=(0,0)\\&\text{平衡点 }B:\ (\Phi,\psi)=\left(-\left[\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]\Big/\beta,\ 0\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

下面我们将分别在两个平衡点附近考察方程组(3.2)的性质。首先我们考虑平衡点 A。在平衡点 A 附近将非线性函数 $F(\Phi)$ 作泰勒级数展开，我们得到

$$F(\Phi)=\frac{1}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}(a\Phi+b\Phi^2+\cdots) \tag{3.4}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}a&\equiv\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\\b&\equiv\left(\beta c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}a\right)\Big/c_0^2c_x\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

若仅仅保留(3.4)右边的第一项，(3.2)化为

$$\Phi'=\psi,\quad \psi'=\frac{a}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi \tag{3.6}$$

我们称(3.6)为一次系统，它描述的是受东西向地形强迫、在平衡点A附近的线性 Rossby 波扰动。若同时还保留(3.4)右边的第二项，(3.2)化成

$$\Phi'=\psi,\quad \psi'=\frac{(a\Phi+b\Phi^2)}{(k^2+l^2)c_0^2c_x} \tag{3.7}$$

我们称(3.7)为二次系统，下面用它代替(3.2)近似地描述受地形强迫、在平衡点A附近的非线性 Rossby 波扰动。在本节，我们仅仅讨论扰动的稳定度，在第五节我们再来求它的解。

首先，我们分析一次系统(3.6)。(3.6)的特征方程是

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \dfrac{a}{(k^2+l^2)c_0^2c_x} & -\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{3.8}$$

或

$$\lambda^2=\frac{a}{(k^2+l^2)c_0^2c_x} \tag{3.8)'$$

由于本文没有考虑基本气流，所以对于 Rossby 波有$c_x<0$。从(3.8)或(3.8)′我们得到如下结论：

$$(0,0)\text{是}\begin{cases}\text{鞍点，若}a<0,\\ \text{中心，若}a>0.\end{cases}$$

现在我们分析二次系统(3.7)。(3.7)中的非线性项是

$$X(\Phi,\psi)=0,\quad Y(\Phi,\psi)=\frac{b}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi^2 \tag{3.9}$$

它们满足

$$X(0,0)=Y(0,0)=\frac{\partial X(0,0)}{\partial\Phi}=\frac{\partial Y(0,0)}{\partial\Phi}=\frac{\partial X(0,0)}{\partial\psi}=\frac{\partial Y(0,0)}{\partial\psi}=0 \tag{3.10}$$

根据Poincaré-Bendxson理论[7]，一次系统的鞍点仍是二次系统的鞍点。我们将(3.7)改写成

$$\Phi'=\psi=I(\Phi,\psi),\quad \psi'=\frac{(a\Phi+b\Phi^2)}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}=J(\Phi,\psi) \tag{3.11}$$

$I(\Phi,\psi)$和$J(\Phi,\psi)$满足对称原理[7]：

$$J(\Phi,\psi)=J(\Phi,-\psi),\quad I(\Phi,\psi)=-I(\Phi,-\psi) \tag{3.12}$$

所以一次系统的中心仍是二次系统的中心。故在平衡点A附近二次系统的性质与一次系统的性质定性地一致。

这样，我们得到了受东西向地形强迫、在平衡点A附近的非线性 Rossby 波扰动的不稳定判据

$$a<0 \tag{3.13}$$

或

$$\beta+\mu^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)<0 \tag{3.13)'$$

从此判据我们清楚地看到，扰动的稳定度受行星涡度梯度β、扰动相速c_x和地形坡度dh_B/dy等因子的影响。很明显，β的作用是使扰动稳定，c_x的作用是使扰动不稳定。地形对扰动的作用是：南坡($dh_B/dy>0$)起稳定作用，北坡($dh_B/dy<0$)总起不稳定作用。

我们取大气参数的量级如下：

$g\sim10$米/秒^2　　　$f_0\sim10^{-4}$秒$^{-1}$

$H\sim 10^4$米 $\beta\sim 10^{-11}$米$^{-1}$秒$^{-1}$

$c_x\sim 10$米/秒

我们立即看到，$\mu^2 c_x$的量级是$O(10^{-12})$，比β小一个量级。故，南坡上空的非线性 Rossby 波扰动总是稳定的，而北坡上空的非线性 Rossby 波扰动当地形坡度小于$O(10^{-4})$时是稳定的，当地形坡度大于$O(10^{-4})$时是不稳定的。

我们刚刚研究的是受东西向地形强迫、在平衡点A附近的非线性 Rossby 波扰动的稳定度。我们现在来讨论受东西向地形强迫、在平衡点B附近的非线性 Rossby 波扰动的稳定度。为方便起见，我们引进变换

$$\Phi_*=\Phi+\Phi_1 \tag{3.14}$$

其中

$$\Phi_1=\left[\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]\Big/\beta \tag{3.15}$$

于是 (3.2) 变换成

$$\Phi_*'=\psi,\quad \psi'=F_*(\Phi_*) \tag{3.16}$$

这里

$$F_*(\Phi_*)=\beta\Phi_*(\Phi_*-\Phi_1)\Big/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1-\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_*\right)\right] \tag{3.17}$$

同时，平衡点B变换成B_*：$(\Phi_*,\psi)=(0,0)$。将非线性函数$F_*(\Phi_*)$在平衡点B_*附近作泰勒级数展开并仅仅保留线性项和平方项，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_*'=\psi\\&\psi'=\beta(-\Phi_1\Phi_*+b_1\Phi_*^2)\Big/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

式中

$$b_1=1-\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1\Big/\left(c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1\right) \tag{3.19}$$

我们用 (3.18) 代替 (3.16) 来近似地描述受东西向地形强迫、在平衡点 B_* 附近的非线性 Rossby 波扰动。可以证明，若

$$\Phi_1<0,\quad c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1<0 \tag{3.20}$$

或

$$\Phi_1>0,\quad c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1>0 \tag{3.21}$$

时，平衡点B_*是二次系统(3.18)的中心。若

$$\Phi_1<0,\quad c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1>0 \tag{3.22}$$

或

$$\Phi_1>0,\quad c_0^2c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\Phi_1<0 \tag{3.23}$$

时，平衡点B_*是不稳定鞍点。(3.22)或(3.23)就是东西向地形强迫下的在平衡点 B_* 附近的非线性 Rossby 波扰动的不稳定判据。利用(3.15)，(3.22)和(3.23)可以改写成

$$\beta+\mu^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)<0,\quad \beta c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\left[\beta+\mu^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]>0 \tag{3.22$'$}$$

$$\beta+\mu^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)>0,\quad \beta c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\left[\beta+\mu^2\left(c_x+\frac{g}{f_0}\frac{dh_B}{dy}\right)\right]<0 \tag{3.23$'$}$$

从(3.22)′和(3.23)′我们知道，当

$$\frac{dh_B}{dy}<\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_1} \tag{3.24}$$

时，南坡上空的非线性 Rossby 波扰动是稳定的，否则是不稳定的。这里

$$\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_1}=-\frac{f_0}{2g}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)+\sqrt{\left(\frac{f_0^2}{2g}\right)^2\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)^2-\frac{\beta c_0^2 c_x}{g^2}} \tag{3.25}$$

北坡上空的非线性 Rossby 波扰动当

$$\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_2}<\left|\frac{dh_B}{dy}\right|<\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_3} \tag{3.26}$$

时是稳定的。当

$$\left|\frac{dh_B}{dy}\right|<\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_2} \tag{3.27}$$

或

$$\left|\frac{dh_B}{dy}\right|>\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_3} \tag{3.28}$$

时是不稳定的。式中

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_2}=\frac{f_0}{g}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)\\&\left(\frac{dh_B}{dy}\right)_{c_3}=\left|-\frac{f_0}{2g}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)-\sqrt{\left(\frac{f_0}{2g}\right)^2\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)^2-\frac{\beta c_0^2 c_x}{g^2}}\right|\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

四、南北向地形强迫下的非线性Rossby波扰动的稳定度

我们现着手研究南北向地形强迫下的非线性 Rossby 波扰动的行为，其控制方程是(2.17)。很显然，(2.17)是一非线性常微分方程，要求得它的精确解析解几乎是不可能的。与前节一样，我们将在(2.17)的平衡点附近研究它的性质。

令 $\Phi'=\psi$，(2.17)化为下列一阶联立方程组：

$$\Phi'=\psi,\ \psi'=F_1(\Phi) \tag{4.1}$$

式中$F_1(\Phi)$由(2.18)给出。易看出，(4.1)有两个平衡点：

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡点 }D:\ (\Phi,\ \psi)=(0,0)\\&\text{平衡点 }E:\ (\Phi,\ \psi)=\left(-\left[c_0^2\beta+f_0^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\right]\Big/\beta,\ 0\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

下面我们将依次在二平衡点附近讨论方程(4.1)的性质。我们先考虑平衡点D。将非线性函数$F_1(\Phi)$在平衡点D附近作泰勒级数展开并只保留线性项和平方项，我们得到

$$\Phi'=\psi,\ \psi'=(a_2\Phi+b_2\Phi^2)/c_0^2c_x(k^2+l^2) \tag{4.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&a_2=\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\\&b_2=\left(\beta c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}a_2\right)\Big/c_0^2c_x\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

我们用(4.3)代替(4.1)来近似地描述受南北向地形强迫、在平衡点D附近的非线性Rossby波扰动可以证明：

$$(0,0)\text{是}\begin{cases}\text{鞍点，若}a_2<0\text{；}\\ \text{中心，若}a_2<0\text{。}\end{cases}$$

所以，受南北向地形强迫、在平衡点D附近的非线性 Rossby 波扰动的不稳定判据是

$$\beta+\mu^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)<0 \tag{4.5}$$

从此判据我们知道，波动的稳定度不仅受β、c_x和dh_B/dx的影响，而且还受波数k和l的影响，这是一个新特点。很明显，β的作用是使波动稳定，c_x的作用是使波动不稳定，地形对波动的作用讨论如下：对于导式波动（$l/k>0$，槽线或脊线呈西北—东南走向），西坡（$dh_B/dx>0$）使其不稳定，东坡（$dh_B/dx<0$）使其稳定。对于曳式波动，（$l/k<0$，槽线或脊线呈东北—西南走向），西坡使其稳定，东坡使其不稳定。

由于β比μ^2c_x大一个量级，东坡上空的导式波动总是稳定的，西坡上空的导式波动当

$$\frac{dh_B}{dx}<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4} \tag{4.6}$$

时是稳定的，否则是不稳定的。这里

$$\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4}=\left|\frac{f_0k}{gl}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)\right| \tag{4.7}$$

西坡上空的曳式波动总是稳定的，东坡上空的曳式波动当

$$\left|\frac{dh_B}{dx}\right|<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4} \tag{4.8}$$

时是稳定的，否则是不稳定的。

我们现考虑平衡点E。为方便起见，我们作变换

$$\Phi_*=\Phi+\Phi_2 \tag{4.9}$$

式中

$$\Phi_2=\left[\beta c_0^2+f_0^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\right]\Big/\beta \tag{4.10}$$

于是（4.1）变换成

$$\Phi_*'=\psi,\ \psi'=F_{1*}(\Phi_*) \tag{4.11}$$

其中

$$F_{1*}(\Phi_*)=\beta\Phi_*(\Phi_*-\Phi_2)\Big/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2+\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_*\right)\right] \tag{4.12}$$

同时平衡点E变换成E_*：$(\Phi_*,\psi)=(0,0)$。将非线性函数$F_{1*}(\Phi_*)$在平衡点E_*附近作泰勒级数展开并只保留线性项和平方项，我们得到

$$\Phi_*'=\psi,\ \psi'=\beta(-\Phi_2\Phi_*+b_3\Phi_*^2)\Big/\left[(k^2+l^2)\left(c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2\right)\right] \tag{4.13}$$

式中

$$b_3=1-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2\Big/\left(c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2\right) \tag{4.14}$$

我们用（4.13）代替（4.11）来近似地描述南北向地形强迫下的在平衡点E_*附近的非线性 Rossby 波扰动。很易证明：若

$$\Phi_2<0,\ c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2<0 \tag{4.15}$$

或

$$\Phi_2>0,\ c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2>0 \tag{4.16}$$

时，平衡点E_*是二次系统(4.13)的中心。若

$$\Phi_2<0,\ c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2>0 \tag{4.17}$$

或

$$\Phi_2>0,\ c_0^2c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\Phi_2<0 \tag{4.18}$$

时，平衡点E_*是二次系统(4.13)的不稳定鞍点。(4.17)或(4.18)是南北向地形强迫下的在平衡点E附近的非线性Rossby波扰动的不稳定判据。将(4.10)代入(4.17)和(4.18)后我们得到

$$\beta+\mu^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)<0,\ \beta c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\left[\beta+\mu^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\right]>0 \tag{4.17$'$}$$

$$\beta+\mu^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)>0,\ \beta c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\left[\beta+\mu^2\left(c_x-\frac{gl}{f_0k}\frac{dh_B}{dx}\right)\right]<0 \tag{4.18$'$}$$

从(4.17)′和(4.18)′我们知道，西坡上空的导式波动，若

$$\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4}<\frac{dh_B}{dx}<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_5} \tag{4.19}$$

时是稳定的。若

$$\frac{dh_B}{dx}<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4} \tag{4.20}$$

或

$$\frac{dh_B}{dx}>\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_5} \tag{4.21}$$

时，西坡上空的导式波动是不稳定的。式中

$$\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_5}=\left|\frac{f_0k}{2gl}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)+\sqrt{\left(\frac{f_0k}{2gl}\right)^2\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)^2-\left(\frac{k}{gl}\right)^2\beta c_0^2c_x}\right| \tag{4.22}$$

而$(dh_B/dx)_{c_4}$由(4.7)给出。东坡上空的导式波动当

$$\left|\frac{dh_B}{dx}\right|>\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_6} \tag{4.23}$$

时是稳定的，否则是不稳定的。这里

$$\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_6}=\left|\frac{f_0k}{2gl}\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)-\sqrt{\left(\frac{f_0k}{2gl}\right)^2\left(\frac{\beta}{\mu^2}+c_x\right)^2-\left(\frac{k}{gl}\right)^2\beta c_0^2c_x}\right| \tag{4.24}$$

西坡上空的曳式波动当

$$\frac{dh_B}{dx}>\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_5} \tag{4.25}$$

时是稳定的，否则是不稳定的。东坡上空的曳式波动当

$$\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4}<\left|\frac{dh_B}{dx}\right|<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_6} \tag{4.26}$$

时是稳定的，若

$$\left|\frac{dh_B}{dx}\right|<\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_4} \tag{4.27}$$

或

$$\left|\frac{dh_B}{dx}\right|>\left(\frac{dh_B}{dx}\right)_{c_6} \tag{4.28}$$

时是不稳定的。

五、地形强迫下的非线性Rossby波扰动的解

前两节我们讨论了地形强迫下的非线性 Rossby 波的稳定度，本节我们讨论它们的解。我们将仅仅求解方程(3.7)和(4.3)，方程(3.18)和(4.13)很容易以相同的方式求得，我们这里不再给出其结果。

（一） 东西向地形强迫下的非线性 Rossby 波扰动的解

(3.7)描述的是受东西向地形强迫、在平衡点 A 附近的非线性 Rossby 波扰动，它可改写成

$$\Phi''=\frac{(a\Phi+b\Phi^2)}{(k^2+l^2)c_0^2c_x} \tag{5.1}$$

略去(5.1)右边的平方项，我们有

$$\Phi''=\frac{a\Phi}{(k^2+l^2)c_0^2c_x} \tag{5.2}$$

(5.2)是一线性常微分方程，若

$$\frac{a}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}=-1 \tag{5.3}$$

或

$$c_x=-\frac{\beta+\dfrac{f_0}{H}\dfrac{dh_B}{dy}}{k^2+l^2+\mu^2} \tag{5.3$'$}$$

它的解是波动解。(5.3)或(5.3)′就是东西向地形强迫下的线性 Rossby 波的色散关系。由于本文未考虑基本气流，同时对于稳定的Rossby波有$\beta+(f_0/H)\cdot(dh_B/dx)>0$。所以，东西向地形强迫下的线性Rossby波是向西传播的。从(5.3)′我们知道，南坡上空的 Rossby 波比北坡上空的 Rossby 波向西传播要快些。如果我们考虑基本气流的作用，Rossby 波一般向东传播。北坡使波动传播加快，南坡使波动传播减慢，这与观测事实很好地一致。故东西向地形有利于横槽或切变线的形成。

特别，若$dh_B/dy=0$，(5.3)′退化成

$$c_x=-\frac{\beta}{k^2+l^2+\mu^2} \tag{5.4}$$

(5.4)正是自由 Rossby 波的色散关系。

我们现考虑非线性微分方程(5.1)。将(5.1)对ξ微分一次，有

$$\Phi'''-\frac{2b}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi\Phi'-\frac{a}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi'=0 \tag{5.5}$$

(5.5)就是著名的 KdV 方程。用$2\Phi'$乘方程(5.1)并对ξ积分一次，有

$$\Phi'^2=\frac{2b}{3(k^2+l^2)c_0^2c_x}F_2(\Phi) \tag{5.6}$$

式中

$$F_2(\Phi)=\Phi^3+\frac{3a}{2b}\Phi^2+D_1 \tag{5.7}$$

是 Φ 的三次多项式，D_1 是积分常数。为了保证 (5.6) 的解是有界周期函数，三次代数方程 $F_2(\Phi)=0$的三个根Φ_a、Φ_b和Φ_c必须是三分立的实根。我们不妨设

$$\Phi_c<\Phi_b<\Phi_a \tag{5.8}$$

这样，(5.6)的解可用雅可比椭圆函数表示出来，即

$$\Phi(\xi)=\Phi_b+(\Phi_a-\Phi_b)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{b(\Phi_a-\Phi_c)}{6(k^2+l^2)c_0^2c_x}}\xi \tag{5.9}$$

或

$$\phi(x,y,t)=\Phi_b+(\Phi_a-\Phi_b)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{b(\Phi_a-\Phi_c)}{6(k^2+l^2)c_0^2c_x}}(kx+ly-\nu t) \tag{5.9$'$}$$

我们称(5.9)或(5.9)′为 Rossby 椭圆余弦波，其波速由下式给出：

$$c_x=-\frac{\left(\beta+\frac{f_0}{H}\frac{dh_B}{dx}\right)\left[\frac{\pi}{2K(m)}\right]^2\left(\frac{\Phi_a-\Phi_c}{\Phi_a+\Phi_b+\Phi_c}\right)}{k^2+l^2+\mu^2\left[\frac{\pi}{2K(m)}\right]^2\left(\frac{\Phi_a-\Phi_c}{\Phi_a+\Phi_b+\Phi_c}\right)} \tag{5.10}$$

式中

$$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-m^2\sin^2t}},\quad m^2=\frac{\Phi_a-\Phi_b}{\Phi_a-\Phi_c} \tag{5.11}$$

显然，色散关系 (5.10) 包含有波振幅，这是非线性 Rossby 波的显著特征。地形对非线性 Rossby 波的波速的影响与地形对线性 Rossby 波的波速的影响是相同的，我们不再详细讨论。

在特定的条件下，Rossby 椭圆余弦波退化成 Rossby 孤立波或 Rossby 余弦波。我们这里不再作讨论。

（二） 南北向地形强迫下的非线性 Rossby 波扰动的解

方程(4.7)描述的是受南北向地形强迫、在平衡点D附近的非线性 Rossby 波扰动，它可改写成

$$\Phi''=\frac{1}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}(a_2\Phi+b_2\Phi^2) \tag{5.12}$$

它的线性近似是

$$\Phi''=\frac{a_2}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}\Phi \tag{5.13}$$

(5.13)描述的是波动，只要

$$\frac{a_2}{(k^2+l^2)c_0^2c_x}=-1 \tag{5.14}$$

或

$$c_x=-\frac{\beta-\frac{f_0l}{Hk}\frac{dh_B}{dx}}{k^2+l^2+\mu^2} \tag{5.14$'$}$$

(5.14)或(5.14)′是南北向地形强迫下的线性 Rossby 波的色散关系。由于本文未考虑基本

气流，同时对于稳定 Rossby 波有 $\beta-\frac{f_0 l}{Hk}\frac{dh_B}{dx}>0$。所以南北向地形强迫下的线性 Rossby 波是向西传播的。若我们考虑基本气流的作用，Rossby 波一般向东传播。地形对导式波和对曳式波的作用是很不相同的。西坡加快导式波但使曳式波减速，东坡使导式波移速减慢但使曳式波加快。故南北向地形使导式波波长变短，使曳式波波长变长。

与得到(5.9)一样，我们可得到非线性微分方程(5.12)的解：

$$\Phi(\xi)=\Phi_b+(\Phi_a-\Phi_b)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{b_2(\Phi_a-\Phi_c)}{6(k^2+l^2)c_0^2c_x}}\,\xi \tag{5.15}$$

或

$$\phi(x,y,t)=\Phi_b+(\Phi_a-\Phi_b)\mathrm{cn}^2\sqrt{\frac{b_2(\Phi_a-\Phi_c)}{6(k^2+l^2)c_0^2c_x}}(kx+ly-\nu t) \tag{5.15'}$$

这里Φ_a、Φ_b和Φ_c是三次代数方程 $\Phi^3+\frac{3a_2}{2b_2}\Phi^2+D_2=0$的三分立实根。(5.15)或(5.15)′同样也称为 Rossby 椭圆余弦波，其色散关系由

$$c_x=-\frac{\left(\beta-\frac{f_0 l}{Hk}\frac{dh_B}{dx}\right)\left[\frac{\pi}{2K(m)}\right]^2\left(\frac{\Phi_a-\Phi_c}{\Phi_a+\Phi_b+\Phi_c}\right)}{k^2+l^2+\mu^2\left[\frac{\pi}{2K(m)}\right]^2\left(\frac{\Phi_a-\Phi_c}{\Phi_a+\Phi_b+\Phi_c}\right)} \tag{5.16}$$

给出。式中$K(m)$和m由(5.11)给出。显然，色散关系(5.16)同样包含波振幅，地形对非线性 Rossby 波的波速的影响与地形对线性 Rossby 波的波速的影响是相同的，我们略去对它的讨论。

六、结　　语

Rossby 波是大气中的一种重要波动。本文我们研究了地形强迫下的非线性 Rossby 波的行为。我们主要讨论了波动的稳定度和解，得到了以下主要结论：

a) 在平衡点 $(\Phi,\psi)=(0,0)$ 附近，南坡使波动稳定，北坡使波动不稳定。西坡使导式波动不稳定但使曳式波动稳定，东坡使导式波动稳定但使曳式波动不稳定。

b) 地形强迫下的非线性 Rossby 波可由著名的KdV方程近似地描述。其有界周期解是椭圆余弦波，在一定条件下，椭圆余弦波退化成孤立波或余弦波。

c) 波动的色散关系含有波振幅、地形坡度和一些其它因子。这正反映了 Rossby 波的非线性特征和地形对波动的作用。地形对波动的作用是：南坡使波动向东传播速度减慢，北坡使波动向东传播速度加快。故东西向地形有利于横槽或切变线的形成。西坡使导式波动加速但使曳式波动减速，东坡使导式波动减速但使曳式波动加速。故南北向地形的作用是使导式波动的波长变短，使曳式波动的波长变长。

参 考 文 献

[1] Charney, J. G., and A. Eliassen, A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies, *Tellus*, 1 (1949), 38—54.

[2] Bolin, B., On the influence of the earth's orography on the general character of the westerlies, *Tellus*, 2 (1950), 184—195.

[3] Egger, J., Dynamics of blocking highs. *J. Atmos. Sci.*, 35 (1978), 1788—1801.
[4] Charney, J. G., and J. G. Devore, Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, 36 (1979), 1205—1216.
[5] 李国庆等，地形对斜压流体多流态影响的实验研究，中国科学B辑，4 (1986)，441—448.
[6] 刘式适、谭本馗，地球物理流体中的非线性 Rossby 波，北京大学学报(待发表).
[7] 秦元勋，《微分方程所定义的积分曲线》，科学出版社 (1959).

Nonlinear Rossby Waves Forced by Topography

Liu Shi-kuo

(*Peking University, Beijing*)

Tan Ben-kui

(*Yunnan University, Kunming*)

Abstract

Using a barotropic semi-geostrophic model with topographic forcing the stability and solutions of the nonlinear Rossby waves are discussed. It is found that the effects of the W-E oriented topography and the N-S oriented topography on the stability and phase speed of the waves are quite different. It is also found that the nonlinear Rossby waves forced by the topography can be described by the well-known KdV equation.