

热特性参数可变时抛物线型截面环肋传热的最优化研究*

杨 翔 翔

(华侨大学, 1987年1月11日收到)

摘 要

肋片传热的最优化的传统处理方法是当执行一定的传热任务时, 具有最少的肋片材料消耗(投资)。最少重量的冷却肋片是具有抛物线型的截面。本文应用不变嵌入原理研究了当热特性参数可变时抛物线型截面环肋传热的最优几何尺寸, 同时还对两个主要的物理参数, 即导热系数变化参数 α 和放热系数变化指数 m 对最优几何尺寸的影响进行研究。所得结果对工程设计具有现实指导意义。

命 名 法

- | | | | |
|----------|--|------------|---|
| a | 过程的开始数值, | q_{nf} | 无肋片时的传热量, $q_{nf} = 4\pi r_b b h_{nf} T_{nf}$ (单位为W)。 |
| b | 肋片根部的半厚度 (单位为m), | Q_h | 从肋片传走的无因次传热量
$Q_h = q / (4\pi r_b^2 h_a T_b)$, |
| B_r | 无因次参数 $h_a r_b / k_a$, | r | 肋片的径向距离(单位为m), |
| c | 过程开始点上的一般化边值条件, | r_b | 肋片的内半径(根部半径)(单位为m), |
| f, g | 独立变数 x_1, x_2 和 ξ 导数的函数, | r_o | 肋片的外半径(根部半径)(单位为m), |
| $g(L)$ | 参数 L 的函数: $g(L) = \int_1^L \beta \xi d\xi$, | r_m | 未知的初值条件, |
| h | 放热系数(单位为 $W/m^2 \cdot K$), | t | 肋片的温度(单位为K), |
| h_a | 平均放热系数(单位为 $W/m^2 \cdot K$), | t_b | 肋片根部的温度(单位为K), |
| h_{nf} | 无肋片壁的放热系数(单位为 $W/m^2 \cdot K$), | t_∞ | 周围环境的温度(单位为K) |
| H | 无因次放热系数 h/h_a , | T | 肋片的相对温度, $T = t - t_\infty$ (单位为K), |
| k | 导热系数(单位为 $W/m \cdot K$), | T_b | 肋片根部的相对温度, $T_b = t_b - t_\infty$ (单位为K), |
| k_a | 参考的导热系数(单位为 $W/m \cdot K$), | T_{nf} | 无肋片壁面的温度(单位为K), |
| K | 描写放热系数的变化, 是 L 和 m 的函数, | U | 无因次肋片体积, $U = \frac{k_a V}{4\pi r_b^2 h_a}$, |
| L | 无因次肋片长度参数: r_o/r_b , | V | 肋片体积, $V = 4\pi \int_{r_b}^{r_o} y(r) r dr$ (单位为 m^3), |
| m | 放热系数变化的指数, | | |
| N_r | 热量移走数 q/q_{nf} , | | |
| q | 通过肋片的传热量, | | |
- $q = -4\pi r_b b k (T) \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_b}$ (单位为W)。

* 王志忠推荐。本文是作者在美国堪萨斯州立大学机械工程系黄敬伦教授的指导下完成的, 原文为英文。

W 与肋片根部厚度有关的无因次参数,

$$W = r_b \left(\frac{h_a}{k_a \cdot b} \right)^{1/2},$$

x_1 独立变数, $x_1 = \theta$,

x_2 独立变数, $x_2 = (1 + \alpha\theta)\beta\xi d\theta/d\xi$.

$y(r)$ 肋片的 y 坐标厚度(单位为m),

α 导热系数变化参数,

Δ 过程区间的间隔数.

δ 肋片端部的半厚度(单位为m),

θ 无因次温度 $\theta = T/T_b$,

ξ 无因次独立变数 $\xi = r/r_b$,

β 无因次肋片厚度 $\beta = y(r)/b$.

一、引 言

环形肋片被广泛使用在热交换设备上以增强传热。为了经济起见,有必要对肋片传热的最优化进行研究。肋片传热的最优化问题可以分为,在给定传热量下的最小肋片体积,或者是在一定体积下的最大肋片传热量。这些传热的最优化问题在近一二十年来已被许多学者进行了研究^[1-11]。

对于具有对流边界条件下的导热肋片, Schmidt^[12]是第一位提出肋片传热的最优化解的学者,他假设肋片的温度分布是肋片径向距离的线性函数。在恒定放热系数下,其最优的肋片剖面是抛物线型曲线。Duffin^[13]应用变分原理证明Schmidt的假设是正确的。

本文确定了抛物线型截面环肋在一定体积下,产生最大传热量时的最优几何尺寸。传热的主导模式是导热和对流,假定一维导热具有线性的导热系数变化和放热系数具有指数变化规律。不变嵌入原理已被应用在本文的研究之中。

二、最优化问题的数学描述

考虑如图1所示的抛物线型截面的环肋,其控制微分方程式可表示如下

$$\frac{d}{dr} \left[k(T) r y(r) \frac{dT}{dr} \right] - h(r) r T = 0 \quad (2.1)$$

式中 T 是肋片的相对温度, $T = t - t_\infty$, t 是肋片的温度, t_∞ 是周围流体温度, $k(T)$ 是导热系数, r 是肋片的径向坐标, $h(r)$ 是放热系数,和 $y(r)$ 是肋片从中部计算的半厚度坐标,这里要意注,抛物线型曲线有如下关系

$$y(r) = (b - \delta) \left(\frac{r_0 - r}{r_0 - r_b} \right)^2 + \delta \quad (2.2)$$

式中 δ 是肋片端部的半厚度, b 是肋片根部的半厚度, r_0 是肋片的外半径,而 r_b 是肋片的内半径。

边界条件是

$$T|_{r=r_b} = \text{常数} = T_b \quad (2.3a)$$

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (\text{当 } y(r_0) = \delta \neq 0)$$

$$(2.3b)$$

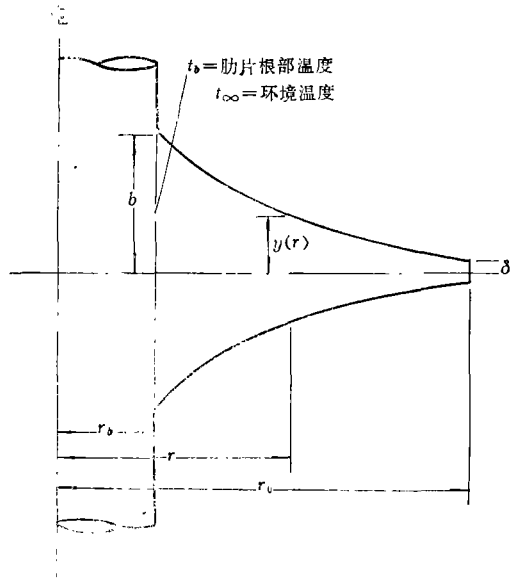


图 1

$$T|_{r=r_0}=0 \quad (\text{当 } y(r_0)=0) \quad (2.3c)$$

式中 T_0 是肋片根部的相对温度, $T_0 = t_b - t_\infty$, t_b 是肋片根部的温度。

肋片根部的半厚度 b 和肋片的长度 $(r_0 - r_b)$, 这两个参数是表征抛物线型截面肋片的几何尺寸。这些尺寸应当如此选择以便确保在稳定状态下肋片能够传递最大数量的热流量。这个最优化条件要求如下总的传热量必须最大

$$q = -4\pi r_b b k(T) \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_b} \quad (2.4)$$

限制条件要求

$$q > q_{nf} \quad (2.5)$$

和

$$q_{nf} = 4\pi r_b b h_{nf} T_{nf} \quad (2.6)$$

式中 q_{nf} 表示无肋片存在时换热表面上的传热量, h_{nf} 和 T_{nf} 分别代表换热表面上的放热系数和温度。

假定导热系数随温度作线性变化, 放热系数随肋片的半径作指数函数的变化, 它们分别表示为

$$k(T) = k_a(1 + \alpha\theta) \quad (2.7)$$

$$h(r) = h_a H(r, m) \quad (2.8)$$

式中 θ 是无因次温度, $\theta = T/T_0$, α 是导热系数变化参数, k_a 是参考的导热系数, h_a 是平均放热系数, 和 H 是肋片半径 r 和指数 m 的函数。

无因次变数定义为

$$\xi = r/r_b \quad (2.9)$$

$$\beta = y(r)/b \quad (2.10)$$

同时, 引入无因次长度参数

$$L = r_0/r_b \quad (2.11)$$

将式(2.7), (2.8), (2.9)和(2.10)代入式(2.1), 此时控制微分方程式变成如下

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \alpha\theta) \beta \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right] = W^2 H \xi \theta \quad (2.12)$$

式中 W 代表一个无因次参数函数, 即

$$W = r_b \left(\frac{h_a}{k_a b} \right)^{1/2} = W(b) \quad (2.13)$$

而 H 可以假定具有如下形式

$$H = K(L, m) [(\xi - 1)/(L - 1)]^m \quad (2.14)$$

其中 K 表示 L 和 m 的函数, 它反映热系数的变化, 本文已假设 K 具有如同文献[6]的关系, 即

$$K(L, m) = \frac{(L+1)(m+1)(m+2)}{2[(m+1)L+1]} \quad (2.15)$$

现在, 边界条件式(2.3)可改写成无因次的形式

$$r = r_b, \quad \xi = 1, \quad \theta = 1 \quad (2.16a)$$

$$r=r_0, \quad \xi=L, \quad \frac{d\theta}{d\xi}=0 \quad (2.16b)$$

$$r=r_0, \xi=L, \text{ 如 } \beta(L)=0, \text{ 则 } \theta \text{ 有界} \quad (2.16c)$$

肋片的无因次体积 U 定义为

$$U = \frac{k_a V}{4\pi r_0^2 h_a} = \frac{g(L)}{W^2} \quad (2.17)$$

式中 V 是肋片的给定体积, 即

$$V = 4\pi \int_{r_b}^{r_0} y(r) r dr \quad (2.18)$$

和

$$g(L) = \int_1^L \beta \xi d\xi \quad (2.19)$$

肋片的无因次传热量定义为

$$Q_h = \frac{q}{4\pi r_0^2 h_a T_b} = \frac{-(1+\alpha)\theta'(1)}{W^2} \quad (2.20)$$

式中
$$\theta'(1) = \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1}$$

为了评估抛物线型截面环肋的设计优劣, 必须计算一个无因次准则 B_r , 令 $B_r = h_a r_0 / k_a$, 重写限制条件不等式(2.5)

$$N_r = \frac{q}{q_{nf}} = \frac{Q_h W^2}{B_r} \left[\frac{h_a T_b}{h_{nf} T_{nf}} \right] > 1 \quad (2.21)$$

式中 N_r 已被称为热量移走数。

概括以上所述, 考虑如方程式(2.12)所描述的系统, 该系统可用更一般化的形式表示

$$N(\xi, \theta, \alpha, m, b, L) = 0 \quad (2.22)$$

其边界条件如式(2.16)所示, 式中 b 和 L 是两个可调整的几何参数, 它们应当如此选择以便使肋片的传热量 Q_h , 即式(2.20)为最大。

三、求解方法

控制微分方程式(2.12)是一个二阶非线性微分方程式, 它可以转化成如下两个一阶微分方程式

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \begin{matrix} x_2 \\ [\beta \xi (1 + \alpha x_1)] \end{matrix} = f(x_1, x_2, \xi) \quad (3.1a)$$

$$\frac{dx_2}{d\xi} = W^2 H \xi x_1 = g(x_1, x_2, \xi) \quad (3.1b)$$

其中 $x_1 = \theta$ 和 $x_2 = (1 + \alpha \theta) \beta \xi \frac{d\theta}{d\xi}$.

边界条件是

$$x_1|_{\xi=1} = 1, \quad x_2|_{\xi=L} = 0 \quad (3.2)$$

现在应用不变嵌入原理, 其控制微分方程式(3.1)可以借助计算机来求解。对于抛物线

曲线存在着如下关系

$$\beta = \left(\frac{L-\xi}{L-1} \right)^2 - \left[\left(\frac{L-\xi}{L-1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\delta}{b} \quad (3.3)$$

现在方程式(2.19)可以简化成如下近似的关系式

$$g(L) = \frac{(L+1)(L^4-4L+3)}{12L^2(L-1)} \quad (3.4)$$

将式(2.14), (2.15), (2.17) 和 (3.4) 代入式 (3.1), 在这种情况下, 函数 f 和 g 分别给出如下

$$f(x_1, x_2, \xi) = \frac{x_2 L^2 (L-1)}{[(L+1)(L-\xi)^2 + (L-1)] \xi (1+ax_1)} \quad (3.5a)$$

$$g(x_1, x_2, \xi) = \frac{(L+1)(L^4-4L+3)}{24UL^2(L-1)} \cdot \frac{(L+1)(m+1)(m+2)}{[(m+1)L+1]} \left(\frac{\xi-1}{L-1} \right)^m \cdot \xi x_1 \quad (3.5b)$$

边界条件式(3.2)可转化成更为普遍的形式

$$x_1(a) = c, \quad x_2(L) = 0 \quad (3.6)$$

式中 a 表示独立变数 ξ 的初始值, $a \leq \xi \leq L$. 通过改变初始值 a , 可以改变过程的区间, c 表示过程的初始状态, 过程的未知初始条件 $x_2(a)$ 不仅是过程的初始值 a 的函数, 而且也是过程的初始状态 c 的函数. 因此, 过程的未知初始条件可表示为如下的函数

$$x_2(a) = r_m(c, a) \quad (3.7)$$

如果 a 假设具有一系列不同的离散值, 如 $a=1, \dots, L-2\Delta, L-\Delta, L$, 式中 Δ 代表增量, 这样原始问题便形成一连串具有不同区间的类似问题. 为寻求未知初始条件 r_m 而控制不变嵌入过程的方程式可表示为^[14]

$$r_m(c, a) = r_m(c + f(c, r_m(c, a+\Delta), a)\Delta, a+\Delta) - g(c, r_m(c, a+\Delta), a)\Delta \quad (3.8)$$

式中 f 和 g 函数已给出在方程式(3.5a)和(3.5b), 因此, 方程式(3.8)可重写为

$$r_m(c, a) = r_m(c + \frac{r_m(c, a+\Delta)L^2(L-1)\Delta}{[(L+1)(L-a)^2 + (L-1)]a(1+ac)}, a+\Delta) - \frac{(L+1)(L^4-4L+3)}{24UL^2(L-1)} \cdot \frac{(L+1)(m+1)(m+2)}{[(m+1)L+1]} \cdot \left(\frac{a-1}{L-1} \right)^m \cdot ac\Delta \quad (3.9)$$

方程式(3.9)可以用向后递归的方式并执行边界条件式(3.6)来求解

$$x_2(L) = r_m(c, a) |_{a=L} = 0 \quad (3.10)$$

递归过程的第一步是去求解邻近过程 $r_m(c, L-\Delta)$ 当 $a=L-\Delta$ 时的未知初始条件. 根据方程式(3.9), 它可求得如下

$$r_m(c, L-\Delta) = r_m(c + \frac{r_m(c, L)L^2(L-1)\Delta}{[(L+1)\Delta^2 + (L-1)](L-\Delta)(1+ac)}, L) - \frac{(L+1)(L^4-4L+3)}{24UL^2(L-1)} \cdot \frac{(L+1)(m+1)(m+2)}{[(m+1)L+1]} \cdot \left(\frac{L-\Delta-1}{L-1} \right)^m (L-\Delta)c\Delta \quad (3.11)$$

式(3.11)右边的第一项, 根据式(3.10)必须为零, 因此 $r_m(c, L-\Delta)$ 可以对不同的 c 值计算, 本文对 c 值取为0, 0.1, 0.2, ..., 1.0, 增量值取 $\Delta=0.01$. 从式(3.11)可以求得 $a=L-\Delta$ 和各种不同 c 值下的全部 r_m 值, 将 r_m 值以表格的形式存贮在计算机里, 所有这些 r_m 值将被使用在下一步邻近过程的计算中. 这样的递归过程将以向后的方式, 通过每一步减少 Δ 的数值进行下去, 一直到 $a=1.0$ 为止. 在计算过程中需要所有 c 值下的 $r_m(c, 1)$ 数值, 然而, 在最后结果中只有 $r_m(c, 1)|_{c=1}$ 才是我们感兴趣的数值. 换句话说, 我们兴趣的只是未知的初始条件 $r_m(1, 1)=x_2(1)$.

在计算机求解时, 首先选择无因次肋片体积 U , 最优化的计算过程通过假设一个无因次长度参数 L 开始, 从式(2.17)可以求出 W^2 的数值. 应用不变嵌入原理, 代表肋片根部处的温度梯度, 即未知的初始条件 $x_2(1)$ 可以被求得. 现在, 函数 $x_1(\xi)$ 和 $x_2(\xi)$ 可根据方程式(3.5a)和(3.5b), 当初值问题具有初始状态 $x_1(1)=1$ 和 $x_2(1)=r_m(1, 1)$ 时求得. 从方程式(2.20), $r_m(1, 1)$ 数值也同样被用来计算肋片的总传热量 Q_h . 其次, 无因次长度参数 L 增加 Δ 值, Q_h 再次被计算, 如此重复计算直到最大的传热量 $Q_{h,opt}$ 被得到为止. 对应的 L 和 W 的最优值分别用 L_{opt} 和 W_{opt} 表示, 根据某种直观的或计算的的经验, 可以选择相当接近于最优值的 L 数值, 于是计算时间就可以大大减少.

四、结 论

所编写的最优化传热问题的计算机程序, 不仅被用来求解抛物线型截面环肋的最优化几何尺寸, 而且还用来研究两个主要的物理参数 α 和 m 对最优几何尺寸的影响. 首先研究当 $\alpha=0.00$ 和 $m=0.00$ 时的情况, 并且将它看作是参考情况(基本情况), 对于其他各种不同的 α 和 m 数值所获得的结果, 将直接同基本情况进行比较.

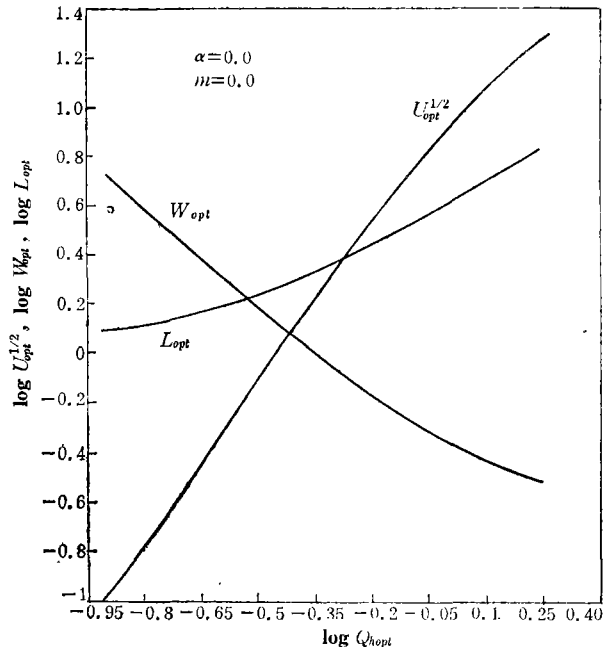


图 2

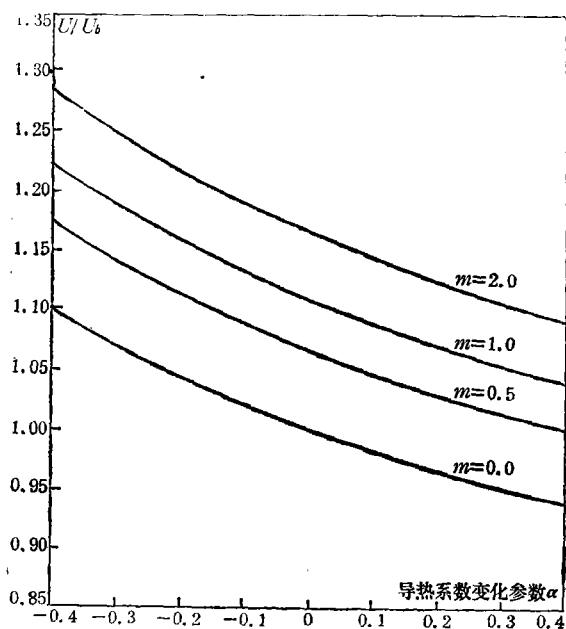


图 3

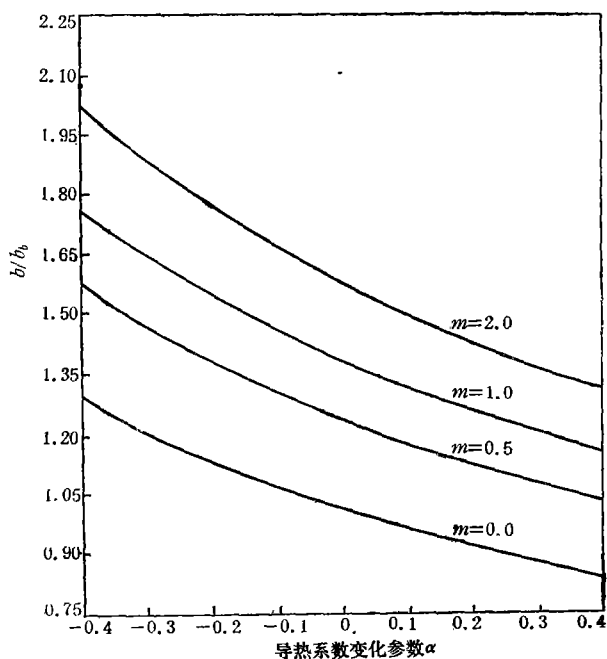


图 4

可以求出各种不同肋片体积下的最大肋片传热量 Q_{hopt} ，肋片体积从 0.01 到 400 之间变化，求得的 $U_{opt}^{1/2}$ ， W_{opt} 和 L_{opt} 对 Q_{hopt} 的结果已借助计算机作图画在图2上。由图可见，最大的肋片传热量 Q_{hopt} 增大时，所要求的肋片体积 $U_{opt}^{1/2}$ 也随之增大，同样，当 Q_{hopt} 增大时，与肋片根部厚度有关的参数 W_{opt} 随之减小， W_{opt} 的减小意味着最优肋片根部厚度 b 的增加，当 Q_{hopt} 增大时，肋片长度参数 L_{opt} 也随之增大。但是，对于一定的传热量 Q_{hopt} 的变化， W_{opt} 的变化要比 L_{opt} 的变化大得多。换句话说，肋片根部厚度的变化在肋片传热过程中起着非常重

要的作用。

图3和图4分别表示导热系数变化参数 α 和放热系数变化指数 m 对最优肋片体积和最优肋片根部厚度的影响。在一定的导热系数变化参数 α 下,最优肋片体积和最优肋片根部厚度,两者都随着指数 m 的增加而增加,同样,在一定的指数 m 值下,两者都随着导热系数变化参数 α 的增加而减小。

图5和图6分别表示,当导热系数变化参数 $\alpha = -0.4$ 时,放热系数变化指数 m 对最优肋片体积和最优肋片根部厚度的影响。在一定的肋片传热量下,最优肋片体积和最优肋片根部厚

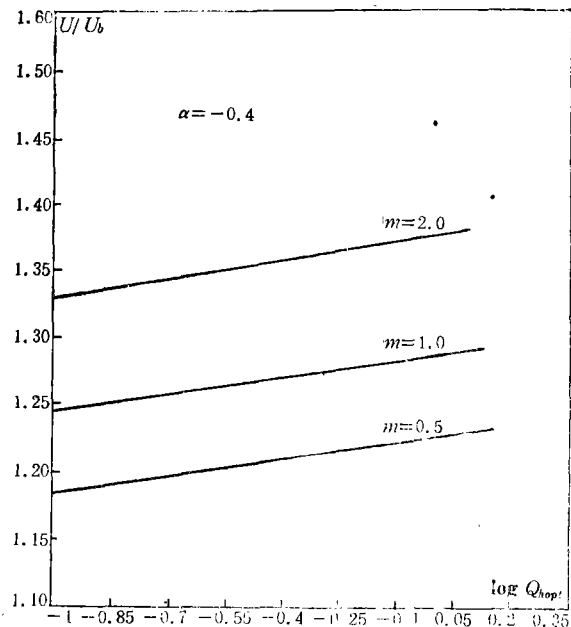


图 5

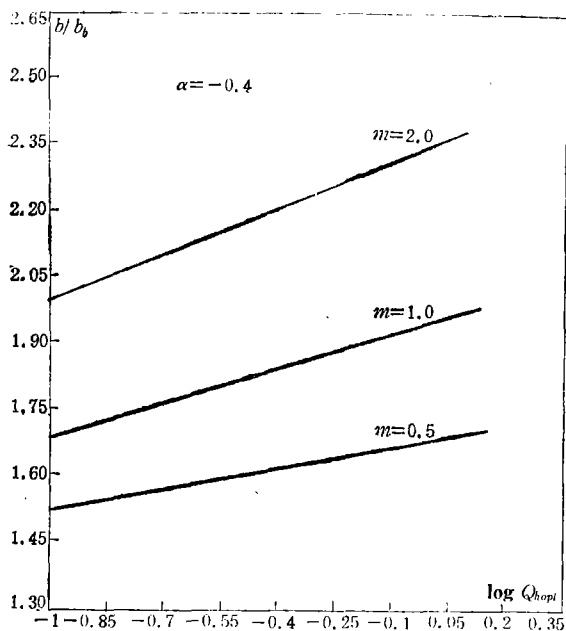


图 6

度均随 m 的增加而增加。同样，在一定指数 m 值下，两者均随肋片传热量的增加而增加。图7和图8分别表示，当导热系数变化参数 $\alpha=0$ 时 m 对上述两者的影响，其结论是相同的，然而在图5~6上当 $\alpha=-0.4$ 时曲线的平均斜率要比图7~8上当 $\alpha=0$ 时陡得多。

图9和图10分别表示，当导热系数变化参数 $\alpha=0.4$ 时 m 对上述两者的影响，其结论也是相同的，然而在图9~10上当 $\alpha=0.4$ 时曲线的平均斜率要比图7~8上当 $\alpha=0$ 时平坦得多。因此，可以得出如此结论，当导热系数变化参数从 $\alpha=0.4$ 变化到 $\alpha=-0.4$ 时，最优肋片体积和最优肋片根部厚度，两者曲线的斜率变得越来越陡。

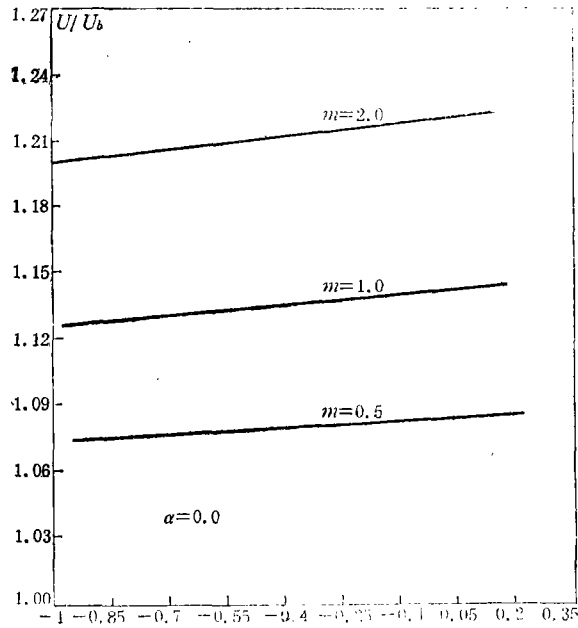
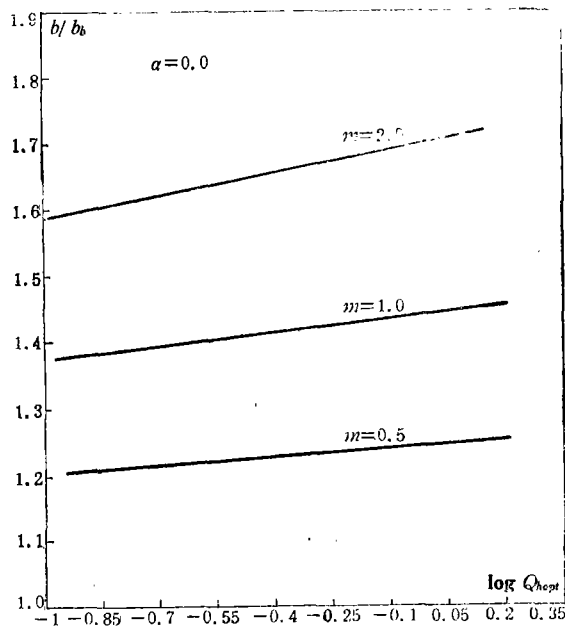


图 7



图

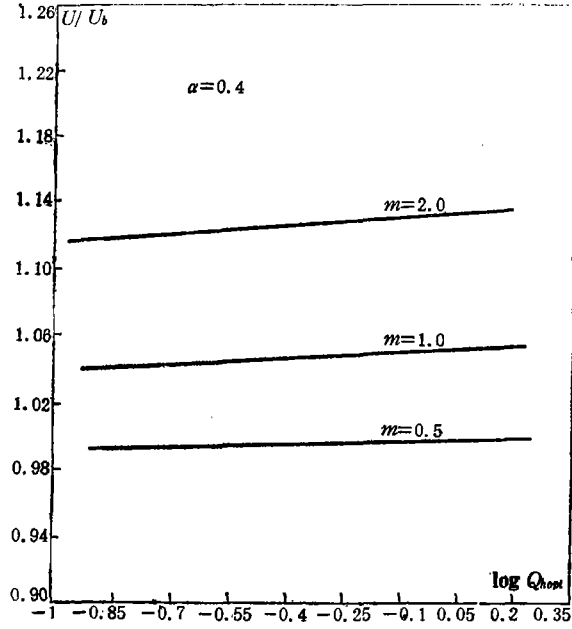


图 9

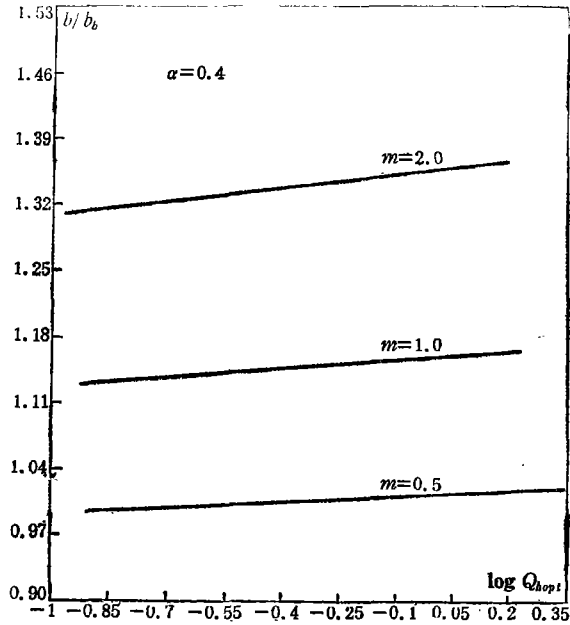


图 10

图11表明当 $N_r=1$ 和几种不同的 α 和 m 值下 Q_{hopt} 对 B_r 的变化关系, 这个图给出任意 B_r 数值时 Q_{hopt} 的极限值。实际上, N_r 必须是大于1, 因此, Q_{hopt} 的操作值应当位于图11所示曲线的左下方。当 B_r 减小或导热系数 k_a 增加时, 肋片的最大传热量随之增大。

综上所述可见, 肋片的体积和肋片的根部厚度在传热优化中是主要的影响因素, 而肋片的长度并不是十分重要的因素。本文所得结果, 如图 2 至图11所示, 对工程设计具有现实的指导意义。

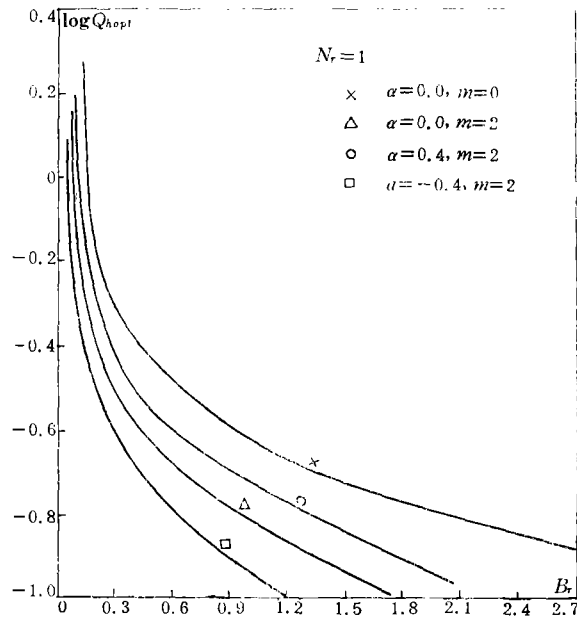


图 11

参 考 文 献

- [1] Brown, A., Optimum dimensions of uniform annular fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8 (1965), 655-662.
- [2] Maday, C. J., The minimum weight one-dimensional straight cooling fins, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96, 1 (1974), 161-165.
- [3] Güceri, S. and C. J. Maday, A least weight circular cooling fin, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 97, 1 (1975) 1190-1193.
- [4] Razelos, P., The optimization of longitudinal convective fins with internal heat generation, *Nuclear Engineering and Design*, 54, 2 (1979), 289-299.
- [5] Razelos, P., The optimum dimensions of convective pin fins, *ASME Journal of Heat Transfer*, 105 (1983), 411-413.
- [6] Razelos, P. and K. Imre, The optimum dimensions of circular fins with variable thermal parameters, *ASME Journal of Heat Transfer*, 102, 3 (1980), 420-425.
- [7] Netrakanti, M. N. and C. L. D. Huang, Optimization of annular fins with variable thermal parameters by invariant imbedding, *ASME Journal of Heat Transfer*, 107, 4 (1985), 966-968.
- [8] Yang, X. X. and C. L. D. Huang, The optimum dimensions of circular fins of hyperbolic profile with variable thermal parameters, Kansas State University, U. S. A., July (1986).
- [9] Mikk, I., Convective fin of minimum mass, *International Journal Heat Mass Transfer*, 23 (1980), 707-711.
- [10] Poulidakos, D. and A. Bejan, Fin geometry for minimum entropy generation in forced convection, *ASME Journal of Heat Transfer*, 104, 11 (1982), 616-623.
- [11] Hrymak, A. N., G. J. Mcrae and A. W. Westerberg, Combined analysis and optimization of extended heat transfer surfaces, *ASME Journal of Heat Transfer*,

- 107, 8 (1985), 527-532.
- [12] Schmidt, E., Die Waermeuebertragung durch Rippen, *Zeitschrift des Vereineschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 70 (1926), 885-889, 947-951.
- [13] Duffin, R. J., A variational problem relating to cooling fins, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8 (1959), 47-56.
- [14] Lee, E. Stanley, *Quasilinearization and Invariant Imbedding, with Applications to Chemical Engineering and Adoptive Control*, Academic Press (1968).

A Study on Heat Transfer of the Optimization in Circular Fins of Parabolic Profile with Variable Thermal Parameters

Yang Xiag-xiang

(Huachiao University, Quanzhou, Fujian)

Abstract

The traditional approach to the optimization of the heat transfer of fins consists of minimizing the consumption (investment) of fin material for the execution of a specified heat transfer task. The minimum weight cooling fin has optional profile to be a concave parabola. Therefore, the optimum geometric dimensions of circular fins of parabolic profile with variable thermal parameters are studied. The effect of the two pertinent physical parameters — thermal conductivity variation parameter α and the index of the heat transfer coefficient variation m upon the optimum geometric dimension has also been studied. An invariant imbedding technique has been used in this study. The results presented can be used as the design guideline for engineering practice.