应用数学和力学，第9卷第3期（1988年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

组合KdV方程的孤立波解与相似解*

潘秀德

（浙江大学应用数学系，1986年12月26日收到）

摘　要

本文讨论组合KdV方程孤立波解的一个性质，指出该方程可化为Painlevé方程，并利用相似变量的特殊变换导出一类新的偏微分方程。

我们考虑组合KdV方程

$$u_t+(\alpha u+\beta u^2)u_x+u_{xxx}=0 \tag{A}$$

其中α和β为常数。它可作为一维非线性晶格传播波的模型[1]。1982年戴世强在[2]中应用约化摄动法于两层流体界面近临界情形也得出了方程(A)。于文[3]中已讨论了它的行波解、守恒律Bäcklund变换和反散射解法，文[3]是利用当$\xi=x-vt\to\pm\infty$时，u及u的有关导数趋于零的假定下导出了方程(A)的行波解。本文以选取初始条件求出方程(A)的行波解。它较[3]中以无穷区间上的边界条件容易处理，且当方程不易积分时可用数值解法，随后指出方程(A)没有扭钟状孤立波解只能有钟状孤立波解。

于1977年Ablowitz等人[4]曾猜测，凡是可用反散射变换(I. S. T.)求解的偏微分方程与六种Painlevé方程(PI～PⅥ)之间有密切联系，它是没有流动的临界点的二阶非线性常微分方程。例如KdV方程，mKdV方程可化为PⅡ。Sine-Gordon方程可化为PⅢ。本文在第二节中指出方程(A)也可化为第Ⅱ型Painlevé方程。并利用该方程的相似变量的特殊变换，导出一类新的偏微分方程。而这一类方程仍具有孤立子解且可简化为Painlevé方程。

一、孤立波解

我们研究具有波速为常数v的传播波，令

$$u(x,t)=u(\xi)\qquad \xi=x-vt \tag{1.1}$$

将(1.1)代入方程(A)得

$$u'''(\xi)+(\alpha u+\beta u^2-v)u'(\xi)=0 \tag{1.2}$$

积分两次得

$$\frac{1}{2}(u'(\xi))^2+\frac{\beta}{12}u^4+\frac{\alpha}{6}u^3-\frac{1}{2}vu^2=c_1u+c_2 \tag{1.3}$$

---

* 戴世强、江福汝推荐。

选取初始条件

$$\left.\begin{aligned} u(0)&=-\frac{3\alpha}{4\beta}\eta \\ u'(0)&=\eta\frac{3\alpha}{4\beta}\sqrt{v+\frac{\alpha^2}{4\beta}\eta-\frac{3\alpha^2}{32\beta}\eta^2} \\ u''(0)&=-\frac{3\alpha}{64\beta^2}\eta(16v\beta+6\alpha^2\eta-3\alpha^2\eta^2) \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

其中η： $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{6v\beta+\alpha^2}\right)<\eta<\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{6v\beta+\alpha^2}\right)$

使(1.3)中的积分常数$c_1=0, c_2=0$即

$$c_1=u''(0)+\frac{\alpha}{2}u^2(0)+\frac{\beta}{3}u^3(0)-vu(0)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2}(u'(0))^2-\frac{1}{2}vu^2(0)+\frac{\alpha}{6}u^3(0)+\frac{\beta}{12}u^4(0)=0$$

于是在初值条件(1.4)下，对方程(1.2)积分两次可得

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2=-\frac{\beta}{6}u^2(u-u_+)(u-u_-) \tag{1.5}$$

这里 $$u_\pm=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+6\beta v}}{\beta}$$

积分方程(1.5)，可得两种类型的孤立波

1) $0<u<u_+$

$$u(\xi)=v\Big/\left[C\cosh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(\xi-\xi_0)\right)+D\sinh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(\xi-\xi_0)\right)\right]$$

2) $u_-<u<0$

$$u(\xi)=-v\Big/\left[D\cosh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(\xi-\xi_0)\right)+C\sinh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(\xi-\xi_0)\right)\right]$$

其中 $C=\frac{1}{6}(\sqrt{\alpha^2+6v\beta}+\alpha)$, $D=\frac{1}{6}(\sqrt{\alpha^2+6v\beta}-\alpha)$.

下面说明方程(A)不存在扭状或扭钟状孤立波解．为此，我们借助于KdV-Burgers方程

$$u_t+(\alpha u+\beta u^2)u_x+\gamma u_{xx}+u_{xxx}=0 \tag{1.6}$$

其中α,β和γ是任意常数．当$\gamma=0$时，(1.6)即为组合KdV方程(A)．有关系式[5]

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f'(\xi)]^2d\xi=\frac{1}{12\gamma}(C_+-C_-)^3[\alpha+\beta(C_++C_-)] \tag{1.7}$$

这里 $$u(x,t)=f(\xi),\ \xi=x-vt$$

$$v=\frac{\alpha}{2}(C_++C_-)+\frac{\beta}{3}(C_+^2+C_+C_-+C_-^2),\ C_\pm=\lim_{\xi\to\pm\infty}f(\xi)$$

假设KdV-Burgers 方程(1.6)的解为$u=f(\xi)$，如当$\gamma\to0$时有极限；$f(\xi)\to\bar{f}(\xi)$，则$u=\bar{f}(\xi)$必满足组合 KdV 方程(A)，如假定$\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{f}'(\xi)]^2d\xi<\infty$（至少存在满足初始条件(1.4)的解$u=\bar{f}(\xi)$，且$[\bar{f}(\xi)]^2$是可积的）．由(1.7)式，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{f}'(\xi)]^2d\xi=\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{12\gamma}(C_+-C_-)^3[\alpha+\beta(C_++C_-)]$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\neq-(C_++C_-)\right)$$

由于上式左端的积分存在，而右端的极限，只有当$C_+\to C_-$时才有可能存在，因而组合 KdV 方程只可能有钟状孤立波，而不可能有扭状孤立波。

二、相 似 解

对方程(A)应用单参数 ε 的无穷小变换[6]

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=x+\varepsilon\xi(x,t)+O(\varepsilon^2)\\&\bar{t}=t+\varepsilon\tau(x,t)+O(\varepsilon^2)\\&\bar{u}=u+\varepsilon\eta(x,t,u)+O(\varepsilon^2)\\&\bar{u}_{\bar{x}}=u_x+\varepsilon[\eta_x]+O(\varepsilon^2)\\&\bar{u}_{\bar{t}}=u_t+\varepsilon[\eta_t]+O(\varepsilon^2)\\&\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}=u_{xxx}+\varepsilon[\eta_{xxx}]+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中ξ，τ和η分别是关于变量x,t和u变换的无穷小元，而$[\eta_x]$，$[\eta_t]$和$[\eta_{xxx}]$是专用导数。如果方程(A)在变换(2.1)下是不变的，则有

$$\bar{u}_{\bar{t}}+(\alpha\bar{u}+\beta\bar{u}^2)\bar{u}_{\bar{x}}+\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}=0\tag{2.2}$$

将(2.1)代入方程(2.2)且令关于 ε 的一次项的系数等于零，得到

$$[\eta_t]+(\alpha+2\beta u)\eta u_x+(\alpha u+\beta u^2)[\eta_x]+[\eta_{xxx}]=0\tag{2.3}$$

方程(2.3)的解给出了保持方程(A)不变的无穷小元 ξ，τ 及 η。而相似变量可由解下面的特征方程

$$\frac{dx}{\xi(x,t)}=\frac{dt}{\tau(x,t)}=\frac{du}{\eta(x,t,u)}\tag{2.4}$$

而得。这里我们假定

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\xi(x,t)\\&\tau=\tau(x,t)\\&\eta=g(x,t)u+f(x,t)\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

其专用导数变为较简单的形式：

$$\left.\begin{aligned}&[\eta_x]=\eta_x+(\eta_u-\xi_x)u_x-\tau_xu_t\\&[\eta_t]=\eta_t+(\eta_u-\tau_t)u_t-\xi_tu_x\\&[\eta_{xxx}]=\eta_{xxx}+(3\eta_{xxu}-\xi_{xxx})u_x-\tau_{xxx}u_t+3(\eta_{xu}-\xi_{xx})u_{xx}\\&\qquad-3\tau_{xx}u_{xt}+(\eta_u-3\xi_x)u_{xxx}-3\tau_xu_{xxt}\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

将(2.5)和(2.6)代入方程(2.3)，并令u及 u 的导数项的系数为零（u_{xxx} 项由方程(A)中的u_t，uu_x及u^2u_x表示）。我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\xi=-c_1\left(x-\frac{\alpha^2}{2\beta}t\right)+c_3\\&\tau=-3c_1t+c_2\\&\eta=c_1\left(u+\frac{\alpha}{2\beta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

其中c_1，c_2和c_3是任意常数。

当$c_1\neq0$时，积分特征方程组(2.4)得相似变量ζ和相似解$f(\zeta)$为

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=\frac{x+\dfrac{\alpha^2}{4\beta}t-\left(\dfrac{\alpha^2c_2}{4\beta c_1}+\dfrac{c_3}{c_1}\right)}{(3c_1t-c_2)^{1/3}}\\ f(\zeta)&=(3c_1t-c_2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\alpha}{2\beta}+u\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

将(2.8)代入方程(A)，我们得到三阶不变方程为

$$f'''(\zeta)-c_1(f+\zeta f')+\beta f^2f'(\zeta)=0\tag{2.9}$$

积分一次得

$$f''(\zeta)-c_1\zeta f+\frac{\beta}{3}f^3=K\tag{2.10}$$

其中K为积分常数，作变换

$$\left.\begin{aligned}f(\zeta)&=\left(\frac{-6}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}c_1^{\frac{1}{3}}W(z)\\ \zeta&=c_1^{-\frac{1}{3}}z\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

我们有

$$\frac{d^2W}{dz^2}=2W^3+zW+a\quad\left(a=Kc_1^{-1}\left(\frac{-6}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\tag{2.12}$$

它是第Ⅱ型Painlevé方程（无流动的临界点）。

我们进一步作形式变换

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{lx+mt+n}{(pt+q)^{1/3}}\\ T&=g_0(t)\\ u&=r+\frac{1}{(pt+q)^{1/3}}U(X,T)\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

其中l,m,n,p,q及r是常数，而$g_0(t)$是t的待定函数，将(2.13)代入方程(A)，选择$g_0(t)$使变换后的新方程不显含变量x,t。这里我们选取

$$g_0(t)=\frac{1}{p}\ln(pt+q),\qquad r=-\frac{\alpha}{2\beta},\qquad m=\frac{\alpha^2}{4\beta}l$$

方程(A)变为

$$U_T-\frac{P}{3}(U+XU_X)+\beta lU^2U_X+l^3U_{XXX}=0\tag{2.14}$$

此方程具有孤立子解，且能化为第Ⅱ型Painlevé方程。

当$c_1=0$，c_2，$c_3\neq0$设变换为

$$X=lx+mt,\ T=t,\ U(X,T)=u(x,t)\tag{2.15}$$

方程(A)化为

$$U_T+[m+l(\alpha U+\beta U^2)]U_X+l^3U_{XXX}=0\tag{2.16}$$

这里指出，若组合KdV方程(A)改为以下形式

$$u_t+(\alpha u+\beta u^2+r)u_x+u_{xxx}=0\tag{2.17}$$

可用同样的方法求得无穷小元为

$$\left.\begin{aligned}&\xi=-c_1x+c_1\left(\frac{\alpha^2}{2\beta}-2r\right)t+c_3\\&\tau=-3c_1t+c_2\\&\eta=c_1\left(\frac{\alpha}{2\beta}+u\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.18}$$

相似变量和相似解为

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=\frac{x+\left(\frac{\alpha^2}{4\beta}-r\right)t-\left[\frac{c_3}{c_1}+\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\alpha^2}{4\beta}-r\right)\right]}{(3c_1t-c_2)^{1/3}}\\&f(\zeta)=(3c_1t-c_2)^{1/3}\left(\frac{\alpha}{2\beta}+u\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.19}$$

方程(2.17)变为

$$f''(\zeta)-c_1\zeta f+\frac{\beta}{3}f^3=K\tag{2.20}$$

方程(2.20)属于第Ⅱ型Painlevé方程。

感谢徐宝智副教授的支持。

参 考 文 献

[1] Toda M., Waves in nonlinear lattice, *Progr. Theor. Phys. Supp.*, 45(1970), 174., 200.

[2] 戴世强，两层流体界面上的孤立波，应用数学和力学，3, 6 (1982), 721—731.

[3] Wadati, Miki, Wave propagation in nonlinear lattice, I, II., *J. Phys. Soc. Japan.*, 38, 3(1975), 673—686.

[4] Ablowitz, M. J. and H. Segur, Exact Linearization of a Painlevé Transcendent. *Phys. Rev. Lett.*, 38 (1977).

[5] 王明亮，KdV—Burgers方程的孤立波解的性质，兰州大学学报，19, 1 (1983), 9—18.

[6] Bluman, G. W. and J. D. Cole, *Similarity Methods for Differential Equation*, Springer, Berlin (1974).

Solitary Wave and Similarity Solutions of the Combined KdV Equation

Pan Xiu-de

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, we discuss a property of solitary wave solutions of the combined KdV equation. Meantime, we point out that the combined KdV equation can be reduced to the Painlevé equation Furthermore, utilizing special transformations of similarity variables, we derive a kind of new partial differential equations.