

# 具有非零最小弯曲刚度梁在多载荷 情况作用下的等强度设计

叶开沅 唐燮黎

(兰州大学)(河海大学)

(1985年8月9日收到)

## 摘 要

用最小余能原理对静不定梁进行等强度设计的解析方法被推广到有指定的非零最小弯曲刚度约束和多载荷工作情况的情形, 并提出了一个求解等强度设计的数值方法, 因而对任意截面形式的梁, 在几个任意分布的载荷情况作用下, 且考虑最小弯曲刚度约束这一最一般情形得到了统一的等强度设计解法。

## 一、引 言

最近唐燮黎和叶开沅<sup>[1]</sup>提出了用最小余能原理<sup>[2]</sup>对承受单一载荷情况静不定梁进行等强度设计的解析方法, 得到了沿梁轴线有分段连续可微的弯曲刚度分布的等强度梁。然而对于具有强度约束的梁还有一些问题在文[1]中未能得到考虑:

- 1) 由文[1]所举算例表明, 在缺乏非零最小弯曲刚度的限制条件时所得的等强度梁会有零刚度的截面出现, 相当于在梁中插入了一个“铰”, 它允许“铰”两边的梁部分有相对转角, 这在工程中通常是不希望有的;
- 2) 实用上常常需要考虑的是梁承受多种载荷工作情况的情形;
- 3) 对工程实践上所采用的梁截面形状和复杂受载情形确定等强度设计支座反力的积分方程很难得到闭合形式的积分。

本文考虑线性弹性梁受多组横向载荷情况作用的弯曲强度设计, 并假定弯曲应变是主要的, 因而与剪力关联的剪应变可以忽略不计。我们将表明文[1]提出的求解等强度设计的原则思想是可以被推广到包括上述讨论的各种情形。对有指定非零最小刚度约束的单一载荷情况, 文[1]的解析方法仍然可以应用, 但弯矩零点的判断往往比较麻烦, 因而只适用于简单受载和简单支承条件的情况。为此, 对于包括多载荷情况等的一般情形, 我们建议了一个普遍适用的数值方法, 这将描述如下。

## 二、公 式 推 导

以 $\bar{A}(x)$ ,  $\bar{W}(x)$ ,  $\bar{S}(x)$ 分别表示梁在距左端点为 $x$ 处的截面的横截面积, 截面模量和弯

曲刚度; 以  $M_i(\bar{x})$ ,  $\sigma_i(\bar{x})$  表示在第  $i$  工作情况作用下的截面弯矩和截面上最大应力的绝对值; 并设  $E$ ,  $\sigma_A$  为材料的弹性模量和最大容许弯曲正应力. 考虑具有各种截面形式的梁, 其弯曲刚度, 横截面积和截面模量间的关系可以表为如下形式:

$$\bar{S} = \alpha W^\beta \quad (2.1)$$

$$\bar{A} = \gamma W^\delta \quad (2.2)$$

又结构总体积

$$V = \int_0^l \bar{A} d\bar{x} \quad (2.3)$$

式中  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  为反映截面形状的参量;  $l$  为梁的长. 显然对于高度  $h$  固定宽  $b$  沿  $\bar{x}$  可变的矩形截面梁  $\alpha = Eh/2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 6/h$ ,  $\delta = 1$ ; 对于高度  $h$  沿  $\bar{x}$  可变宽  $b$  固定的矩形截面梁,  $\alpha = E(3/2b)^{1/2}$ ,  $\beta = 3/2$ ,  $\gamma = (6b)^{1/2}$ ,  $\delta = 1/2$ ; 对于半径  $\rho$  可变的圆形截面梁,  $\alpha = E(4/\pi)^{1/3}$ ,  $\beta = 4/3$ ,  $\gamma = (16\pi)^{1/3}$ ,  $\delta = 2/3$ ; 对于各种型钢材料也可按照各类型钢表 (例如参见[3]的附录 3) 得到相应的  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  和  $\delta$  值. 应用最小二乘法<sup>[4]</sup>思想, 对热轧普通工字钢 (GB706-65) 求得  $\alpha = 0.89846E$ ,  $\beta = 1.4398$ ,  $\gamma = 1.51647$ ,  $\delta = 0.58578$ .

为形式简洁和便于求解, 采用无量纲形式的物理量是适宜的. 以  $l, P, \sigma_A, Pl, Pl/\sigma_A, \alpha(Pl/\sigma_A)^\beta, \gamma(Pl/\sigma_A)^\delta, \gamma(P/\sigma_A)^{\delta\beta+1}$  分别对长度, 力, 截面弯曲正应力, 截面弯矩, 截面模量, 弯曲刚度, 横截面积和结构体积进行无量纲化, 以不带“—”的字母表示相应量的无量纲形式, 则得无量纲量间的关系为

$$W = \frac{|M_i|}{\sigma_i} \quad (2.4)$$

$$S = W^\beta \quad (2.5)$$

$$A = W^\delta \quad (2.6)$$

$$V = \int_0^1 A l dx \quad (2.7)$$

结构的总余能为<sup>[1]</sup>:

$$\bar{U}_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\bar{M}_i^2}{\bar{S}} d\bar{x} = \lambda U_i \quad (2.8)$$

式中  $\lambda = \alpha^{-1} \sigma_A^\beta P^{2-\beta} l^{\beta-1}$ ,  $U_i$  为相应于第  $i$  工作情况的无量纲余能:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{M_i^2}{S} dx \quad (2.9)$$

确定支座反力的相容性方程<sup>[1]</sup>亦化为无量纲形式:

$$\frac{\partial U_i}{\partial M_{0i}} = \int_0^1 \frac{M_i}{S} \frac{\partial M_i}{\partial M_{0i}} dx = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{和 (或)} \quad \frac{\partial U_i}{\partial R_{0i}} = \int_0^1 \frac{M_i}{S} \frac{\partial M_i}{\partial R_{0i}} dx = 0 \quad (2.11)$$

设  $S_m$  和  $W_m$  分别为指定的最小弯曲刚度和最小截面模量, 由式 (2.5) 知  $S_m = W_m^\beta$ . 梁在多载荷情况作用下并考虑有最小刚度约束的等强度设计是要找到沿梁轴线的这样一种刚度分布函数  $S(x)$ , 使梁的每一截面或者在某一载荷情况下达到梁的最大容许应力  $\sigma_A$  或者取得最小容许的弯曲刚度  $S_m$ . 根据 (2.4) 式, 对在第  $i$  载荷情况下达到容许应力  $\sigma_A$  的截面有  $W = |M_i|$ , 因此对一个受  $N$  个载荷情况作用的梁, 等强度设计的弯曲刚度分布应满足

$$S = \begin{cases} |M_i|^\beta & \text{当 } |M_i| \geq |M_j| \quad (j=1, 2, \dots, N), |M_i| \geq W_m \\ W_m^\beta & \text{当 } |M_j| < W_m \quad (j=1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (2.12)$$

从(2.10)~(2.12)式出发可以建立等强度设计的数值解法, 现叙述如下. 为简明起见, 以一次静不定梁受两种载荷情况作用为例进行说明, 相容性方程采用(2.11)形式, 弯曲刚度需满足(2.12)式( $N=2$ ). 数值方法基于静不定梁的“暂时静定化”假设. 其基本思想如下: 从任意给定的一个刚度分布 $S^{(1)}(x)$ 出发由相容性方程

$$\int_0^1 \frac{M_1}{S^{(1)}} \frac{\partial M_1}{\partial R_{01}} dx = 0 \quad (2.13)$$

和

$$\int_0^1 \frac{M_2}{S^{(1)}} \frac{\partial M_2}{\partial R_{02}} dx = 0 \quad (2.14)$$

可以求得梁的刚度分布为 $S^{(1)}(x)$ 时的多余反力 $R_{01}^{(1)}$ 和 $R_{02}^{(1)}$ . 如所周知, 若所讨论的是静定梁, 则因支座反力与刚度分布方式无关, 因而所求得的 $R_{01}^{(1)}$ 和 $R_{02}^{(1)}$ 也就是相应于等强度设计刚度分布 $S(x)$ 的支座反力. 将 $R_{01}^{(1)}$ 和 $R_{02}^{(1)}$ 代入(2.12)式中 $M_i$ 的表达式里, 即可得到所求的刚度分布 $S(x)$ . 对于静不定梁, 由于支座反力因刚度分布方式的改变而变动, 因此 $R_{01}^{(1)}$ 和 $R_{02}^{(1)}$ 并非是相应于等强度设计刚度分布 $S(x)$ 的多余反力, 也就是说将 $R_{01}^{(1)}$ 和 $R_{02}^{(1)}$ 代入(2.12)式后求得的新刚度分布只是等强度设计刚度分布的一个近似, 记为 $S^{(2)}(x)$ , 从 $S^{(2)}(x)$ 出发又可重复进行上述步骤: 从(2.13)和(2.14)式得到相应于 $S^{(2)}(x)$ 的多余反力 $R_{01}^{(2)}$ 和 $R_{02}^{(2)}$ , 将它们代入(2.12)得到等强度设计刚度分布的又一次近似 $S^{(3)}(x)$ , 如此循环可以得到以下迭代序列

$$S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}, \dots$$

$$R_{0i}^{(1)}, R_{0i}^{(2)}, \dots, R_{0i}^{(n)}, \dots \quad (i=1, 2)$$

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{0i}^{(n)} = R_{0i} \quad (i=1, 2) \quad (2.15)$$

存在则可断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = S$ 亦存在, 且 $R_{0i}$ 和 $S$ 分别为等强度设计的多余支座反力和刚度分布.

实现上述设计思想的主要一步在于给定 $S^{(n)}$ 后由(2.13)和(2.14)式解出 $R_{0i}^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 应该注意到在求解积分方程组时,  $S^{(n)}$ 是通过(2.12)式由上一次的迭代解 $R_{0i}^{(n-1)}$ 决定的刚度分布, 作为不随 $R_{0i}^{(n)}$ 改变的已知函数出现, 这也正是所谓“暂时静定化假设”的含义. 如果我们将 $M_i$ 写成多余反力 $R_{0i}$ 的函数形式, 这一步不难完成. 对梁而言容易发现 $M_i$ 可以表为形式

$$M_i(x) = f_i(x)R_{0i} + g_i(x) \quad (2.16)$$

于是

$$\frac{\partial M_i}{\partial R_{0i}} = f_i(x) \quad (2.17)$$

现在可以将(2.12)~(2.14), (2.16)~(2.17)式写成如下迭代形式

$$S^{(n)} = \begin{cases} |M_1^{(n-1)}|^\beta & \text{当 } |M_1^{(n-1)}| \geq |M_2^{(n-1)}|, |M_1^{(n-1)}| \geq W_m \\ |M_2^{(n-1)}|^\beta & \text{当 } |M_1^{(n-1)}| \leq |M_2^{(n-1)}|, |M_2^{(n-1)}| \geq W_m \\ W_m & \text{当 } |M_1^{(n-1)}| \leq W_m, |M_2^{(n-1)}| \leq W_m \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\int_0^1 \frac{M_i^{(n)}}{S^{(n)}} \frac{\partial M_i^{(n)}}{\partial R_{0i}} dx = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.19)$$

$$M_i^{(n)} = f_i(x) R_{0i}^{(n)} + g_i(x) \quad (i=1,2) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial M_i^{(n)}}{\partial R_{0i}} = f_i(x) \quad (i=1,2) \quad (2.21)$$

将 (2.20) 和 (2.21) 代入 (2.19) 式可得

$$R_{0i}^{(n)} = - \frac{\int_0^1 \frac{f_i g_i}{S^{(n)}} dx}{\int_0^1 \frac{f_i^2}{S^{(n)}} dx} \quad (i=1,2) \quad (2.22)$$

用数值积分法<sup>[4]</sup>求得上式的解  $R_{0i}^{(n)}$  后代入 (2.20), 又利用 (2.18) 式可以得到等强度设计的下一个近似弯曲刚度分布  $S^{(n+1)}$ . 迭代中也可用多余力改变量的表达式代替 (2.22) 式, 这样更便于观察收敛进程, 即令  $R_{0i}^{(n)} = R_{0i}^{(n-1)} + \Delta R_{0i}^{(n-1)}$  代入 (2.20) 得

$$M_i^{(n)} = M_i^{(n-1)} + f_i(x) \Delta R_{0i}^{(n-1)} \quad (2.23)$$

于是有

$$\Delta R_{0i}^{(n-1)} = - \frac{\int_0^1 \frac{f_i M_i^{(n-1)}}{S^{(n)}} dx}{\int_0^1 \frac{f_i^2}{S^{(n)}} dx} \quad (2.24)$$

在数值求解时可用

$$\left| \frac{\Delta R_{0i}^{(n-1)}}{R_{0i}^{(n-1)}} \right| \leq \varepsilon \quad (2.25)$$

代替 (2.15) 式作为收敛性判据, 式中  $\varepsilon > 0$  为控制精度. 此外, 选取初始刚度分布的一个简便方法是任意选定多余反力  $R_{0i}^{(0)}$  代入 (2.20) 和 (2.18) 来得到  $S^{(1)}(x)$ .

### 三、数值例子

本节中例举三个算例. 例1和例2为有非零最小刚度约束梁在单一载荷情况作用下的等强度设计例, 采用解析和数值两种解法, 所得结果十分接近. 例3是用数值方法求在二个载荷情况作用下带有非零最小刚度约束梁的等强度设计. 在所举各例中, 均与按等弯曲刚度设计所需材料体积进行了比较, 结果表明采用等强度设计可节省材料达40%左右. 在数值求解时均取  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

例1 长  $l$  两端固支承受强度为  $q$  的均布载荷梁. 取  $P = ql$ , 进行无量纲化(参见上节),

由对称性知  $R_0 = R_1 = 1/2$ , 且只须考虑  $0 \leq x \leq 1/2$  的半段(图1). 设梁具有矩形截面形状, 各截面宽  $b$  相同, 高度  $h$  沿  $x$  方向可变. 并设梁的最小高度为  $h_m$ , 由于  $S = Ebh^3/12$ ,  $W = bh^2/6$ , 这相当于指定最小弯曲刚度  $S_m = Ebh_m^3/12$ , 最小截面模量  $W_m = bh_m^2/6$ . 为进行具体计算取  $l = 1000\text{cm}$ ,  $q = 100\text{kg/cm}^2$ ,  $b = 20\text{cm}$ ,  $h_m = 10\text{cm}$ ,  $\sigma_A = 1600\text{kg/cm}^2$ . 梁内无量纲弯矩分布

$$M(x) = M_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \quad (3.1)$$

式中  $M_0$  是  $x=0$  处的弯矩, 相容性方程为

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{S} \left( M_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 0 \quad (3.2)$$

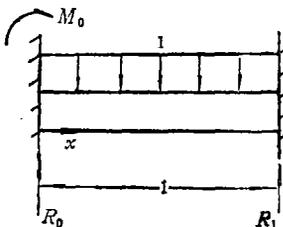


图 1

1) 用解析法求解。首先应使用 (2.12) 式求得弯曲刚度的表达式 (本例中取  $N=1$ ,  $\beta=3/2$ ), 为此须求出使  $|M(x)|=W_m$  点的坐标。在这一简单情形梁内弯矩有图2形式的分布。令  $|M(x_i)|=W_m$  ( $i=1,2$ ) 得到

$$x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2(M_0 + W_m)}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2(M_0 - W_m)}$$

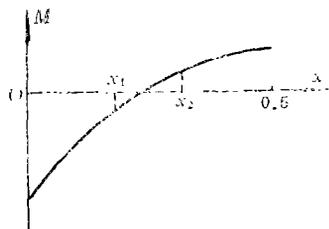


图 2

由上述分析和 (2.12) 式可知半跨长内弯曲刚度可分段表之:

$$S(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - M_0\right)^{\frac{3}{2}} & 0 \leq x \leq x_1 \\ W_m & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \left(M_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}} & x_2 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.3)$$

将  $S(x)$  的分段表达式代入 (3.2) 式得到求解  $M_0$  的积分方程

$$\begin{aligned} & -\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - M_0} dx + W_m^{-\frac{1}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \left(M_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ & + \int_{x_2}^{\frac{1}{2}} \sqrt{M_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2} dx = 0 \end{aligned}$$

完成上式中积分得

$$\begin{aligned} & \ln \left| \sqrt{-M_0 - \frac{\sqrt{2}}{4}} \right| - \ln \left| W_m^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + 2M_0 + 2W_m} \right| \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} W_m^{-\frac{3}{2}} \left[ M_0(x_2 - x_1) + \frac{1}{4}(x_2^2 - x_1^2) - \frac{1}{6}(x_2^3 - x_1^3) \right] \\ & + \sin^{-1} \left( \frac{(1/2) - x}{\sqrt{(1/4) + 2M_0}} \right) = 0 \end{aligned}$$

用二分法等超越方程求解法<sup>[5]</sup>容易得到上述方程的解  $M_0 = -0.10433$ 。

2) 用数值法求解。由于数值法中积分是通过数值求积完成, 因此无须事前判断使弯矩绝对值等于最小截面模量点的位置, 这就是数值法区别于解析法能适用于各种复杂受载条件和多载荷情况的主要原因。采用上节中对二个载荷情况所描述的同样方法, 取等刚度梁的固定端弯矩为迭代的初始弯矩, 即令  $M_0^{(0)} = -1/12$ 。将半跨长分为50等分, 分别用梯形和辛普生两种方法进行数值积分。由表1可见, 数值解的结果与解析解符合很好。将所求得的  $M_0$

表 1

例 1 等强度设计解

方 法	解析法	数值法 (梯形求积)	数值法 (辛普生求积)
多余反力矩 $M_0$	-0.10433	-0.10421	-0.10387
总体积 $V$	451070cm <sup>3</sup>	451102cm <sup>3</sup>	451009cm <sup>3</sup>
迭代次数		69	46

值代入(3.3)式中即可得到等强度设计的弯曲刚度分布。图3显示了等强度矩形梁的高度沿轴向的变化。容易算得等弯曲刚度梁的总体积为790569cm<sup>3</sup>。与之相比,采用等强度设计可节省材料约43%。

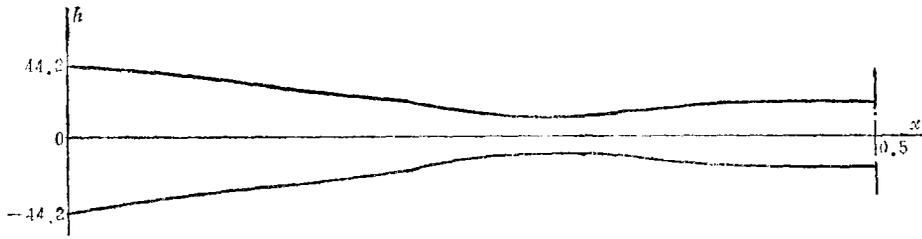


图 3

例2 长  $l$  一端固定一端自由的外伸梁。设外载为作用于自由端的集中力  $P/2$  和作用于距自由端  $0.6l$  处的集中力  $P$ , 并设铰支座距自由端距离为  $al (a < 0.6)$ 。图4为无量纲化后的梁几何和受力简图。梁截面仍采用等宽  $b$  和可变高度  $h$  的矩形形状。同例1, 取  $l=1000\text{cm}$ ,  $b=20\text{cm}$ ,  $h_m=10\text{cm}$ ,  $\sigma_A=1600\text{kg/cm}^2$ ; 取  $P=10^5\text{kg}$ 。梁内无量纲弯矩分布

$$M(x) = -\frac{1}{2}x + R(x-a)\{x-a\}^0 - (x-0.6)\{x-0.6\}^0 \tag{3.4}$$

确定等强度设计多余力  $R$  的方程

$$\int_a^1 \frac{M}{S} (x-a) dx = 0 \tag{3.5}$$

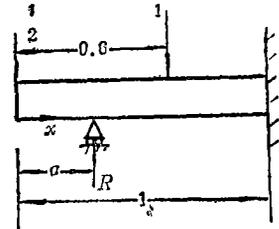


图 4

式中  $S$  由(2.12)给出 ( $N=1, \beta=3/2$ )。在用解析法设计时,为得到  $S(x)$  的分段表达式,首先要分析等强度设计的弯矩零点的可能分布方式。从弯矩方程(3.4)出发可得如下结论:

- 1) 若在  $a \leq x \leq 0.6$  区间有弯矩零点  $y_1$ , 则  $y_1 = aR / (R - 0.5)$ , 且必须有  $R \geq 3 / (6 - 10a)$ ;
- 2) 若在  $0.6 \leq x \leq 1$  区间有弯矩零点  $y_2$ , 则  $y_2 = (0.6 - aR) / (1.5 - R)$ , 且必须有  $a \leq 0.4, 3 / (6 - 10a) \leq R \leq 9 / 10(1 - a)$  或  $a \geq 0.4, 9 / 10(1 - a) \leq R \leq 3 / (6 - 10a)$ 。

由上述讨论,弯矩零点的可能分布可列表2。

表2 例2的可能弯矩零点分布

	可能有弯矩零点的区间		条 件
	$a \leq x \leq 0.6$	$0.6 \leq x \leq 1$	
$a \leq 0.4$	有	有	$R \geq 3 / (6 - 10a), R \leq 9 / 10(1 - a)$
	有	无	$R \geq 3 / (6 - 10a), R \geq 9 / 10(1 - a)$
$a \geq 0.4$	有	无	$R \geq 3 / (6 - 10a)$
	无	有	$R \leq 3 / (6 - 10a), R \geq 9 / 10(1 - a)$

本例中取  $a=0.3$ , 由表2知对应的弯矩零点分布只有二种形式: 或在  $a \leq x \leq 0.6$  和  $0.6 \leq x \leq 1$  区间内各有一零点, 或仅在前一区间  $a \leq x \leq 0.6$  内有零点, 这二种形式的弯矩分布分别示于图5和图6。

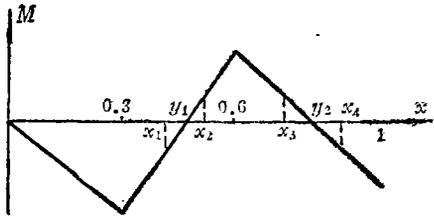


图 5

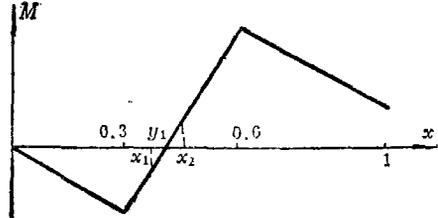


图 6

由弯矩公式 (3.4) 容易算得使  $|M(x_i)| = W_m$  的点  $x_i$  的位置:

$$x_1 = \frac{aR - W_m}{R - 0.5}, \quad x_2 = \frac{aR + W_m}{R - 0.5}, \quad x_3 = \frac{0.6 - aR - W_m}{1.5 - R}, \quad x_4 = \frac{0.6 - aR + W_m}{1.5 - R}$$

相应于图5和图6二种弯矩分布的相容性方程分别为

$$\begin{aligned} & - \int_a^{x_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x-a}{x-R(x-a)}} dx + W_m^{-\frac{3}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{1}{2} x + R(x-a) \right] (x-a) dx \\ & + \int_{x_2}^{0.6} \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{x-a}{x+R(x-a)}} dx + \int_{0.6}^{x_3} \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{x-a}{x+R(x-a)-x+0.6}} dx \\ & + W_m^{-\frac{3}{2}} \int_{x_3}^{x_4} \left[ -\frac{1}{2} x + R(x-a) - x + 0.6 \right] (x-a) dx \\ & - \int_{x_4}^1 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x-a}{x-R(x-a)+x-0.6}} dx = 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \int_a^{x_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x-a}{x-R(x-a)}} dx + W_m^{-\frac{3}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{1}{2} x + R(x-a) \right] (x-a) dx \\ & + \int_{x_2}^{0.6} \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{x-a}{x+R(x-a)}} dx + \int_{0.6}^1 \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{x-a}{x+R(x-a)-x+0.6}} dx = 0 \end{aligned}$$

上述两方程积分后得到关于  $R$  的二个超越方程, 对  $\nu=0.3$  用二分法计算表明此时等强度设计的弯矩分布只有图 5 形式。对同一问题将梁长分为 100 等分用数值法也进行了计算, 二种方法的结果见表 3。

表 3

例 2 等强度设计解

方 法	解 析 法	数值法 (梯形求积)	数值法 (辛普生求积)
多余反力 $R$	1.2243	1.2248	1.2242
总体积 $V$	581463cm <sup>3</sup>	581513cm <sup>3</sup>	581497cm <sup>3</sup>
迭代次数		48	47

按等刚度设计的体积为 941135cm<sup>3</sup>。等强度设计可省材料 38.2%。

从例 1 和例 2 可以看出:

1) 解析法的使用建立在对弯矩绝对值等于最小截面模量点的判断, 这在复杂问题情形

往往难于实现,因而解析解仅适用于简单问题。

2) 数值解法中无论采用梯形公式或辛普生公式求积均能得到相当精确的结果,这表明方法对数值积分法的敏感度不大。

最后例举一个有二个载荷情况的算例

例3 长 $l$ 一端固定一端简支梁,情况1为强度 $q$ 的均布载荷,情况2为作用于梁中点的集中力 $P=q$ 无量纲化后梁的受载简图示于图7。二种载荷情况下梁内的弯矩分布是

$$M_1(x) = R_1 x - \frac{1}{2} x^2$$

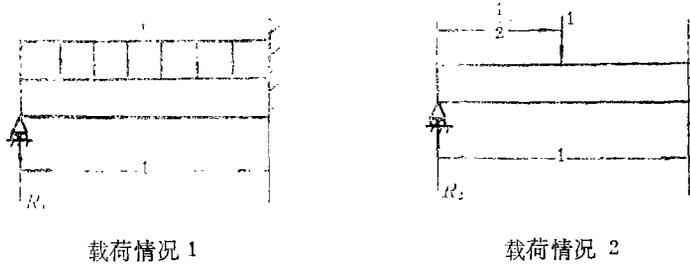


图 7

$$M_2(x) = R_2 x - \left(x - \frac{1}{2}\right) \left\{x - \frac{1}{2}\right\}^0$$

令 $P=20000\text{kg}$ ,  $l=1000\text{cm}$ ,  $\sigma_A=1600\text{kg/cm}^2$ ,考虑三种截面形状:圆形截面,等宽度 $b$ 的矩形截面及工字形型钢截面.对这三种截面形状的最小尺寸约束分别取为:最小直径 $2\rho_m=10\text{cm}$ ,最小矩形高度 $h_m=10\text{cm}$ ,最小工字钢高度 $h_m=10\text{cm}$ .对于三种截面形状都取等刚度梁的支座反力作为求初始弯曲刚度分布的多余反力,经计算为 $R_1^{(0)}=0.375$ ,  $R_2^{(0)}=0.3125$ .数值求解按第二节中式(2.18)~(2.22)进行,此时 $N=2$ .表4汇总了对所讨论三种情况的计算结果。

表 4

例3等强度设计解

		横 截 面 形 状		
		圆 形	矩 形	工 字 形
截面形状参数	$\beta$	4/3	3/2	1.4398
	$\gamma$	3.69054	10.95445	1.51647
	$\delta$	2/3	1/2	0.58578
最小高度(或直径)		10cm	10cm	10cm
初始迭代支座反力	$R_1$	0.375	0.375	0.375
	$R_2$	0.3125	0.3125	0.3125
等强度设计支座反力	$R_1$	0.345532	0.336214	0.338146
	$R_2$	0.274889	0.25694	0.260702
迭 代 次 数		47	80	274
等强度设计梁的体积( $\text{cm}^3$ )		358662	340696	83361
等刚度设计梁的体积( $\text{cm}^3$ )		651174	530330	142843
等强度设计梁的体积 等刚度设计梁的体积		0.5508	0.6424	0.5836

## 参 考 文 献

- [1] 唐燮黎、叶开沅, 静不定梁的等强度设计, 应用数学和力学, 6,12 (1985), 1053—1060.
- [2] Washizu, Kyuichiro, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd edition, Pergamon Press (1982).
- [3] 孙训方等编, 《材料力学》(上册), 人民教育出版社 (1979).
- [4] Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, Inc. (1974).
- [5] 刘德贵等编, 《Fortran 算法汇编》第一分册, 国防工业出版社 (1980).

## Uniform Strength Design of Beams with Non-Zero Minimum Flexural Rigidity under Multiple Loadings

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Tang Xie-li

(Hehai University, Nanjing)

### Abstract

The analytical method for uniform strength design (U. S. D.) of statically indeterminate beams is extended to deal with a preassigned constraint of non-zero minimum flexural rigidity and multiple load cases. And a numerical method of finding the U. S. D. is presented. Therefore we have a uniform procedure of solution of U.S.D. to beams with arbitrary cross-sectional shape and acted upon by several loadings and subjected to the constraint of minimum flexural rigidity.