应用数学和力学，第9卷第2期(1988年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限元空间的嵌入性质和紧致性

王 鸣　　张鸿庆

（大连工学院应用数学所，1986年11月30日收到）

摘　　要

本文将 Sobolev 嵌入定理和 Rellich-Kondrachov 紧致定理推广到多套函数有限元空间.特殊地，在非协调元，杂交元和拟协调元空间等情形建立了这两个定理.

一、符号和定义

设$\Omega\subset R^n$是有界多胞形区域.对于$m\geqslant 0$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，记$W^{m,p}(\Omega)=\{w\,|\,D^\alpha w\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\}$，这里$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$是$n$重指标，

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\quad D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$$

当$w\in W^{m,p}(\Omega)$时，若$p<\infty$，记

$$\|w\|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha w|^p dx\Big)^{1/p}\text{和}|w|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha w|^p dx\Big)^{1/p}$$

若$p=\infty$，记

$$\|w\|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha w(x)|\text{和}|w|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|=m}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha w(x)|$$

记$\mathring{W}^{m,p}(\Omega)$为$C_0^\infty(\Omega)$在$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$意义下完备化的空间.定义$L^{m,p}(\Omega)=\{u=(u^\alpha)\,|\,u^\alpha\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\}$，当$u\in L^{m,p}(\Omega)$时，若$p<\infty$，记

$$\|u\|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|u^\alpha|^p dx\Big)^{1/p}$$

若$p=\infty$，记

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u^\alpha(x)|$$

对$w\in W^{m,p}(\Omega)$，记$Ew=(D^\alpha w)$，则$EW^{m,p}(\Omega)$成为$L^{m,p}(\Omega)$的闭子空间.由于E是保范映射，我们仍以$W^{m,p}(\Omega)$记$W^{m,p}(\Omega)$.

对$h\in(0,\ 1)$，令K_h是Ω的一个有限元剖分.假设$\{K_h\}$满足：1）对$\forall K\in K_h$，K是一个n维单纯形（或n维超平行体），且$\bigcup_{K\in K_h}K=\bar{\Omega}$；2）$K_h$中的任意两相异单元$K'$，$K''$的交$K'\cap K''$或是空集，或是$K'$与$K''$的公共表面；3）对$\forall K\in K_h$，$K$的外径小于$h$，若记$\rho_K$是$K$的最大内含球的直径，则存在与$h$无关的常数$\eta$使得$\rho_K\geqslant\eta h$，$\forall K\in K_h$，$h\in(0,1)$.

设$\{U_h\}_{h\in(0,1)}$是$L^{m,p}(\Omega)$的一列有限维子空间，对$u_h\in U_h$，$u_h^\alpha|_K\in P_r(K)$，$K\in K_h$，$|\alpha|$

$\leqslant m$。称$\{U_h\}$具有相容性，如果存在与K，h无关的常数C使得下述不等式

$$0\leqslant l\leqslant m-1,\quad \sum_{|\alpha|=l}|u_h^\alpha|_{1,p,K}\leqslant C\sum_{t=l+1}^{m}h^{t-l-1}\sum_{|\alpha|=t}|u_h^\alpha|_{0,p,K} \tag{1.1}$$

对$\forall u_h\in U_h$，$\forall K\in K_h$和$\forall h\in(0,1)$一致成立，下述不等式

$$0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1,\quad |(u_h^\alpha)^{K'}(x)-(u_h^\alpha)^{K''}(x)|\leqslant C\sum_{t=|\alpha|+1}^{m}h^{t-|\alpha|}\sum_{|\beta|=t}\sup_{K\in K_h(x)}|u_h^\beta|_{0,\infty,K} \tag{1.2}$$

对$\forall K'$，$K''\in K_h(x)$，$\forall x\in\Omega$，$\forall u_h\in U_h$及$h\in(0,1)$一致成立。这里$(u_h^\alpha)^{K'}$，$(u_h^\alpha)^{K''}$分别是$(u_h^\alpha)|_{\underset{\circ}{K}'}$和$(u_h^\alpha)|_{\underset{\circ}{K}''}$在$K'$和$K''$上的连续延拓，$\underset{\circ}{K}'$，$\underset{\circ}{K}''$分别是$K'$，$K''$的内点集，$K_h(B)=\{K|K\cap B\neq\phi,\ K\in K_h\}$如果$B\subset\bar{\Omega}$，$P_r(K)$是$K$上的不高于$r$次的多项式空间，对于整数$s$，$|\cdot|_{s,p,K}$是$W^{s,p}(K)$上的 Sobolev 半范数。

称$\{U_h,\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)\}$（或$\{U_h,\ W^{m,p}(\Omega)\}$）通过广义分片检验，如果当$v_h\in U_h$，$h\in(0,1)$且$\sup\limits_h\|v_h\|_{m,p,\Omega}<\infty$时，$\lim\limits_{h\to0}T_{l,\alpha}(\varphi,v_h)=0$。对$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$|\alpha|\leqslant m-1$，及$\forall\varphi\in C_0^\infty(R^n)$（或$C_0^\infty(\Omega)$）成立。这里若记$e_l$是第$l$个分量为1其余的为0的$n$重指标，则对$l=1,\ \cdots,\ n$，$|\alpha|\leqslant m-1$，$\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega})$和$v\in L^{m,p}(\Omega)$，

$$T_{l,\alpha}(\varphi,v)=\int_\Omega(D^{e_l}\varphi v^\alpha+\varphi v^{\alpha+e_l})dx \tag{1.3}$$

关于相容性和广义分片检验的详细讨论参见[1]或[2]。

二、主 要 结 果

现在给出$\{U_h\}$上的广义 Sobolev 嵌入定理和广义 Rellich-Kondrachov 定理。

定理1 设$\{U_h\}$具有相容性，$1\leqslant p<\infty$。假设$q_0,\cdots,q_{m-1}$是一组不小于p的实数且满足：当$n>(m-j)p$时，$q_j\leqslant np/(n-(m-j)p)$；当$n=(m-j)p$时，$q_j<\infty$；当$n<(m-j)p$时，$q_j\leqslant\infty$。则存在与$u_h$，$h$无关的常数$C$使得

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega} \tag{2.1}$$

对$\forall u_h\in U_h$和$\forall h\in(0,1)$一致成立。

定理2 设$\{U_h\}$具有相容性，$1<p<\infty$。假设$q_0,\cdots,q_{m-1}$是一组不小于p的实数且当$n>(m-j)p$时，$q_j<np/(n-(m-j)p)$；当$n=(m-j)p$时$q_j<\infty$，当$n<(m-j)p$时$q_j\leqslant\infty$。则下述结论为真：

1）如果$u_h\in U_h$，且$\{u_h\}$在$L^{m,p}(\Omega)$意义下弱收敛于0，则

$$\lim_{h\to0}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}=0$$

2）设$\{U_h,\ W^{m,p}(\Omega)\}$（或$\{U_h,\ \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)\}$）通过广义分片检验，且对$\forall u\in W^{m,p}(\Omega)$（或$\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$），

$$\lim_{h\to0}\inf_{v_h\in U_h}\left\{\|u-v_h\|_{m,p,\Omega}+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|D^\alpha u-v_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}\right\}=0$$

如果$u_k\in U_{h_k}$ $(k=1,2,\cdots)$，$h_k\to 0$且$\{u_k\}$在$L^{m,p}(\Omega)$意义下有界，则存在$\{u_k\}$的子列(仍记为$\{u_k\}$)及$u_0\in W^{m,p}(\Omega)$(或$\mathring{W}^{m,p}(\Omega)$)，使得$\{u_k\}$弱收敛于$u_0$且

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|u_k^\alpha-D^\alpha u_0\|_{0,q_j,\Omega}=0$$

定理2的结论2)成立的条件是相容性，广义分片检验及其2)中的逼近性要求。一般地，逼近性利用插值理论不难验证。相容性和广义分片检验的验证要困难一些。对于一类比较广泛的有限元空间，例如非协调元，杂交元和拟协调元空间，文[1]给出了容易验证的条件。虽然那里是对$m=n=p=2$的情形加以讨论，其它情形的结果是不难用类似的方法得到的。而且由下面的定理3可知，相容性是与p的选择无关的。故可以选择合适的进行验证。例如[1]选择$p=2$。

定理3 如果$\{U_h\}$做为$L^{m,p}(\Omega)$空间的子空间列具有相容性，则对$1\leqslant\sigma\leqslant\infty$，把$\{U_h\}$看成$L^{m,\sigma}(\Omega)$的子空间列时也具有相容性。

定理1和2的重要应用是用来讨论有限元方法求解 Navier-Stokes 方程组，von Kármán 方程等一类非线性问题的收敛性。对此问题，我们将另文讨论。这里我们给出一个简单的应用情形。由[1]可知，6参、9参、12参、15参等拟协调元构造的空间满足定理2的条件。这样由结论2)可得，用这些单元求解薄板弯曲问题时，有限元解不仅在$L^{2,2}(\Omega)$意义下收敛，而且还在$L^\infty(\Omega)$意义下收敛。

三、主要结果的证明

定理1的证明思路与[4]基本一致。分几步进行。由于Ω是有界多胞形域，所以$\bar\Omega$可表为有限个n维超平行体的并：$\bar\Omega=\bigcup_{k=1}^{l}Q_k$。对于固定的$k$，不妨设$Q_k$是边长为2的形心在原点的超立方体$[-1,1]^n$，且$Q_k$的各边均平行于某坐标轴，因为通过一个非奇异仿射变换总可把Q_k化成所需的，且相容性质不变。

第一步：$mp<n$的情形。记$p_j=np/(n-(m-j)p)$，$j=0,1,\cdots,m$。用归纳法证明

$$\sum_{|\alpha|<j}\|u_h^\alpha\|_{0,p_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega},\qquad 0\leqslant j\leqslant m \tag{3.1}$$

对$\forall u_h\in U_h$，$h\in(0,1)$一致成立。今后C总表示与u_h，h无关的常数，各处的C可以不同。由(3.1)及Ω的有界性可推得定理1的结论在$mp<n$的情形为真。

(3.1)式在$j=m$时是显然的。假设(3.1)对$M+1\leqslant j\leqslant m$均成立，现证明$j=M$时(3.1)式也成立。

记$\Omega_h=\bigcup_{K\in K_h}\underline{K}$。令$|\alpha|\leqslant M$，$x\in Q_k\cap\Omega_h$，$w_i(x)$表示$Q_k$和通过$x$平行于$x_i$坐标轴的直线的交，则存在沿着$x_i$轴的单位向量$\tilde e_i$使得$I_i=\{x+t\tilde e_i,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}\subset w_i(x)$。记$\tilde p=np/(n-(m-M-1)p)$，$\sigma=(n-1)\tilde p/(n-\tilde p)$，$q=p_M$。对$\forall u_h\in U_h$，利用分部积分法得

$$|u_h^\alpha(x)|^\sigma=\int_{I_i}|u_h^\alpha(x+(1-t)\tilde e_i)|^\sigma dt+\sigma\int_{I_i\cap\Omega_h}t|u_h^\alpha(x+(1-t)\tilde e_i)|^{\sigma-1}\frac{d}{dt}|u_h^\alpha(x$$

$$+(1-t)\tilde e_i)|dt+\sum_{s=1}^{N_x}t_s(|u_h^\alpha(y_s)^+|^\sigma-|u_h^\alpha(y_s)^-|^\sigma) \tag{3.2}$$

其中$y_s=x+t_s\tilde{e}_i\in\{I_i-I_i\cap\Omega_h\}$是$u_h^\alpha(x+(1-t)\tilde{e}_i)$的间断点，$u_h^\alpha(y_s)^+$，$u_h^\alpha(y_s)^-$分别表示它在$t=t_s$的左、右极限.

用$p'=p/(p-1)$记$p(1\leqslant p\leqslant\infty)$的共轭指数：$1/p+1/p'=1$；$S_h(B)$是所有与$B$的距离不大于$h$的点的集合，如果$B\subset\bar{\Omega}$是某点集. 在$\bar{\Omega}$的余集上定义$u_h=0$. 因为对$\forall\sigma>1$，存在只与$\sigma$有关的常数$\xi$使得对$\forall a, b\in R^1$，$||a|^\sigma-|b|^\sigma|\leqslant\xi|a-b|(|a|^{\sigma-1}+|b|^{\sigma-1})$，所以

$$\left|\sum_{s=1}^{N_x}t_s(|u_h^\alpha(y_s)^+|^\sigma-|u_h^\alpha(y_s)^-|^\sigma)\right|\leqslant\xi\sum_{s=1}^{N_x}|u_h^\alpha(y_s)^+-u_h^\alpha(y_s)^-|(|u_h^\alpha(y_s)^+|^{\sigma-1}$$

$$+|u_h^\alpha(y_s)^-|^{\sigma-1})\leqslant C\left(\sum_{s=1}^{N_x}|u_h^\alpha(y_s)^+-u_h^\alpha(y_s)^-|^{\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{p}}\left(\sum_{s=1}^{N_x}|u_h^\alpha(y_s)^+|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}\right.$$

$$\left.+|u_h^\alpha(y_s)^-|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}\right)^{1/\tilde{p}'}$$

利用相容性及文[3]的方法可得

$$\left|\sum_{s=1}^{N_x}t_s\left(|u_h^\alpha(y_s)^+|^\sigma-|u_h^\alpha(y_s)^-|^\sigma\right)\right|$$

$$\leqslant C\sum_{l=|\alpha|+1}^{m}h^{l-|\alpha|}\left(\sum_{K\in K_h(w_i(x))}\sum_{|\beta|=l}|u_h^\beta|_{0,\infty,K}^{\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{p}}\left(\sum_{K\in K(w_i(x))}|u_h^\alpha|_{0,\infty,K}^{(\sigma-1)\tilde{p}'}\right)^{1/\tilde{p}'}$$

$$\leqslant C\sum_{l=|\alpha|+1}^{m}h^{l-|\alpha|-n}\left(\sum_{K\in K_h(w_i(x))}\sum_{|\beta|=l}\int_K|u_h^\beta|^{\tilde{p}}dy\right)^{1/\tilde{p}}\left(\sum_{K\in K_h(w_i(x))}\int_K|u_h^\alpha|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}dy\right)^{1/\tilde{p}'}$$

$$\leqslant C\sum_{l=|\alpha|+1}^{m}h^{l-|\alpha|-n}\left(\sum_{|\beta|=l}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\beta|^{\tilde{p}}dy\right)^{1/\tilde{p}}\left(\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\alpha|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}dy\right)^{1/\tilde{p}'}\tag{3.3}$$

记$\hat{x}_i=(x_1,\cdots,x_{i-1}, x_{i+1},\cdots, x_n)$，令

$$F_i(\hat{x}_i)=\sup_{y\in w_i(x)\cap\Omega_h}|u_h^\alpha(y)|^{\tilde{p}/(n-\tilde{p})}\tag{3.4}$$

(3.2)式和(3.3)式给出

$$|F_i(\hat{x}_i)|^{n-1}\leqslant\int_{w_i(x)}|u_h^\alpha(x)|^\sigma dx_i+\sigma\int_{w_i(x)\cap\Omega_h}|u_h^\alpha(x)|^{\sigma-1}|\partial_iu_h^\alpha(x)|dx_i$$

$$+C\sum_{l=|\alpha|+1}^{m}h^{l-|\alpha|-n}\left(\sum_{|\beta|=l}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\beta|^{\tilde{p}}dy\right)^{1/\tilde{p}}$$

$$\cdot\left(\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\alpha|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}dy\right)^{1/\tilde{p}'}$$

在上式两端在$\Omega_i=\{y|y=(x_1,\cdots,x_{i-1}, 0, x_{i+1},\cdots, x_n), x\in Q_k\}$上积分得

$$\int_{\Omega_i}|F_i(\hat{x}_i)|^{n-1}d\hat{x}_i\leqslant\int_\Omega|u_h^\alpha|^\sigma dx+\sigma\int_{\Omega_h}|u_h^\alpha|^{\sigma-1}|\partial_iu_h^\alpha|dx$$

$$+C\sum_{l=|\alpha|+1}^{m}h^{l-|\alpha|-n}\left(\sum_{|\beta|=l}\int_{\Omega_i}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\beta(y)|^{\tilde{p}}dyd\hat{x}_i\right)^{1/\tilde{p}}$$

$$\cdot\left(\int_{\Omega_i}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\alpha(y)|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}dyd\hat{x}_i\right)^{1/\tilde{p}'} \tag{3.5}$$

用简单的积分次序交换和积分区域估计（参见[3]），容易得到

$$\int_{\Omega_i}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\beta(y)|^{\tilde{p}}dyd\hat{x}_i\leqslant Ch^{n-1}\|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega}^{\tilde{p}} \tag{3.6}$$

$$\int_{\Omega_i}\int_{S_h(w_i(x))}|u_h^\alpha(y)|^{(\sigma-1)\tilde{p}'}dyd\hat{x}_i\leqslant Ch^{n-1}\|u_h^\alpha\|_{0,q,\Omega}^{q} \tag{3.7}$$

将(3.6)、(3.7)代入(3.5)中得

$$\|F_i\|_{0,n-1,\Omega_i}^{n-1}\leqslant C\|u_h^\alpha\|_{0,q,\Omega}^{q/\tilde{p}'}\Big(\|u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega}+\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}^{m}h^{|\beta|-|\alpha|-1}\|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega}$$

$$+\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega_h}\Big) \tag{3.8}$$

在上式使用了 Hölder 不等式。利用[4]引理5.10的方法得

$$\|u_h^\alpha\|_{0,q,Q_k}^{(n-1)q/n}\leqslant C\|u_h^\alpha\|_{0,q,\Omega}^{q/\tilde{p}'}\Big(\|u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega}+\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}^{m}h^{|\beta|-|\alpha|-1}\|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega}+\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega_h}\Big) \tag{3.9}$$

在上式对k从1到J求和，注意 $(n-1)q/n-q/\tilde{p}'=1$，得

$$\|u_h^\alpha\|_{0,q,\Omega}\leqslant C\left(\|u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega}+\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}^{m}h^{|\beta|-|\alpha|-1}\|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega}+\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega_h}\right) \tag{3.10}$$

利用仿射变换的技巧[5]，可以证明：对$1\leqslant l,\ t\leqslant\infty$，存在只与$l,\ t,\ r$有关的常数$\xi$使得，若记$|K|$是$K$的体积，则

$$\forall f\in P_r(K),\ \|f\|_{0,l,K}\leqslant\xi|K|^{1/l-1/t}\|f\|_{0,t,K} \tag{3.11}$$

对$\forall K\in K_h$，$h\in(0,1)$一致成立。于是由(1.1)式得

$$\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,\tilde{p},\Omega_h}\leqslant C\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}^{m}h^{|\beta|-|\alpha|-1}\|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega} \tag{3.12}$$

再使用(3.11)式，注意关于$\{K_h\}$的假设3)，可得

$$|\beta|\geqslant M+2,\ \|u_h^\beta\|_{0,\tilde{p},\Omega}\leqslant Ch^{n/\tilde{p}-n/p_{|\beta|}}\|u_h^\beta\|_{0,p_{|\beta|},\Omega}$$
$$\leqslant Ch^{M+1-|\beta|}\|u_h^\beta\|_{0,p_{|\beta|},\Omega} \tag{3.13}$$

将(3.12)，(3.13)式代入(3.10)式，利用归纳法假设得

$$\|u_h^\alpha\|_{0,q,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega}$$

所以$j=M$时(3.1)式为真。

第二步：$mp>n$且$n\neq(m-j)p$ $(j=0,\ \cdots,\ m)$的情形。设j_0满足$n>(m-j_0)p$，$n<(m-j_0+1)p$。记$p_j=np/(n-(m-j)p)$，$j\geqslant j_0$，由第一步的方法可知

$$m\geqslant j\geqslant j_0,\quad\sum_{|\alpha|<j}\|u_h^\alpha\|_{0,p_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega},\quad\forall u_h\in U_h \tag{3.14}$$

由于Ω是有界多胞形域，存在一个锥$\mathbf{C}=\{y|\ y/\|y\|\in\mathcal{A},\ \|y\|\leqslant H\}$，使得对$\forall x\in\Omega$，存在$\mathbf{C}_x\subset\bar{\Omega}$是顶点在$x$与$\mathbf{C}$全等的锥，这里$\mathcal{A}$是单位球面上一相对开集的闭集。记$(r,\theta)$是$R^n$中原点在$x$的球极坐标，$I_{x,\theta,r}=\{y|y=x+t\theta,\ 0\leqslant t\leqslant r\}$。令$x\in\Omega_h$，$|\alpha|<j_0$，则

$$u_h^\alpha(x)=\sum_{s=1}^{N_{(r,\theta)}}(u_h^\alpha(y_s)^+-u_h^\alpha(y_s)^-)+u_h^\alpha(r,\theta)-\int_{\Omega_h\cap I_{x,\theta,r}}\frac{d}{dt}u_h^\alpha(t,\theta)dt$$

其中$y_s\in\{I_{x,\theta,r}-I_{x,\theta,r}\cap\Omega_h\}$是$u_h^\alpha(t,\theta)$的间断点。利用与第一步类似的方法得

$$|u_h^\alpha(x)|\leqslant|u_h^\alpha(r,\theta)|+\int_{\Omega_h\cap I_{x,\theta,r}}\sum_{i=1}^n|\partial_i u_h^\alpha(t,\theta)|dt$$

$$+C\sum_{l=|\alpha|+1}^m h^{l-|\alpha|-n}\sum_{|\beta|=l}\int_{S_h(I_{x,\theta,r})}|u_h^\beta|dy$$

在上式两端乘以体积元$r^{n-1}w(\theta)drd\theta$，在$(0,H)\times A$上积分得

$$|\mathbf{C}_x||u_h^\alpha(x)|\leqslant\int_{\mathbf{C}_x}|u_h^\alpha|dy+\frac{H^n}{n}\sum_{i=1}^n\int_{\Omega_h\cap\mathbf{C}_x}|\partial_i u_h^\alpha(y)||x-y|^{1-n}dy$$

$$+C\sum_{l=|\alpha|+1}^m h^{l-|\alpha|-n}\sum_{|\beta|=l}\int_{\mathbf{C}_x}\int_{S_h(\overline{zx})}|u_h^\beta(y)|dydz \tag{3.15}$$

其中$\overline{zx}$表示连接z，x的线段。类似第一步得

$$\int_{\mathbf{C}_x}\int_{S_h(\overline{zx})}|u_h^\beta(y)|dydz\leqslant Ch^{n-1}\int_\Omega|u_h^\beta|dy\leqslant Ch^{n-1}\|u_h^\beta\|_{0,p,\Omega} \tag{3.16}$$

注意$p_{j_0}>n$，$(n-1)(1-p'_{j_0})>-1$，所以$i=1,\cdots,n$时

$$\int_{\Omega_h\cap\mathbf{C}_x}|\partial_i u_h^\alpha(y)||y-x|^{1-n}dy\leqslant\Big(\int_{\Omega_h\cap\mathbf{C}_x}|\partial_i u_h^\alpha|^{p_{j_0}}dy\Big)^{1/p_{j_0}}\Big(\int_{\mathbf{C}_x}|x-y|^{-(n-1)p'_{j_0}}dy\Big)^{1/p'_{j_0}}$$

$$\leqslant C\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,p_{j_0},\Omega_h} \tag{3.17}$$

类似于(3.12)，(3.13)式可得

$$\sum_{i=1}^n\|\partial_i u_h^\alpha\|_{0,p_{j_0}\Omega_h}\leqslant C\Big\{\sum_{|\beta|=|\alpha|+1}^{j_0}\|u_h^\beta\|_{0,p_{j_0},\Omega}+\sum_{|\beta|=j_0+1}^m\|u_h^\beta\|_{0,p_{|\beta|},\Omega}\Big\} \tag{3.18}$$

将(3.18)代入(3.17)再将(3.16)，(3.17)代入(3.15)式，然后对(3.15)式右端第一项使用Hölder不等式得

$$|\alpha|<j_0,\quad\forall x\in\Omega_h,\quad|u_h^\alpha(x)|\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega} \tag{3.19}$$

因而定理1的结论在第二步的情形时为真。

第三步：$mp\geqslant n$且$0\leqslant j_0\leqslant m-1$使得$n=(m-j_0)p$的情形。由第一步可得

$$p_j=np/(n-(m-j)p),\quad j_0<j,\quad\sum_{|\alpha|\leqslant j}\|u_h^\alpha\|_{0,p_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega}$$

选定$\delta<p$且$|\delta-p|$充分小使得$n>(m-j_0)\delta$且$n<(m-j_0+1)\delta$。注意$\|u_h\|_{m,\delta,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega}$，由第二步得

$$|\alpha|<j_0,\quad\|u_h^\alpha\|_{0,\infty,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega}$$

$$p_\delta=n\delta/(n-(m-j_0)\delta),\quad\sum_{|\alpha|=j_0}\|u_h^\alpha\|_{0,p_\delta,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,p,\Omega}$$

因为对任意$q>p$，总可选择δ使得$q<p_\delta$，所以定理1的结论在第三步的情形也成立。定理1得

证。

定理2的证明。利用[3]的方法可以证明定理2在$q_0=q_1=\cdots=q_{m-1}=p$ 时是正确的。因而由$\{u_h\}$弱收敛于0 得

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\|u_h^\alpha\|_{0,p,\Omega}=0 \tag{3.20}$$

如果$n>(m-j)p$，$p<q_j<np/(n-(m-j)p)=p_j$，记$s=(p_j-q_j)p/(p_j-p)$，$t=p/s$，利用 Hölder 不等式得

$$\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}\leqslant\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,p,\Omega}^{p/t}\|u_h^\alpha\|_{0,p_j,\Omega}^{p_j/t} \tag{3.21}$$

注意(3.20)及定理1得

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}=0$$

如果$n<(m-j)p$，$p<q_j\leqslant\infty$，则取$\delta<p$且$n<(m-j)\delta$。由定理1得

$$\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,\delta,\Omega}$$

因为嵌入$L^{m,p}(\Omega)\to L^{m,\delta}(\Omega)$是紧的，故$\lim\limits_{h\to 0}\|u_h\|_{m,\delta,\Omega}=0$。进而$\lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}=0$。

如果$n=(m-j)p$，$p<q_j$，利用(3.21)式，在那里取$p_j>q_j$，就能导出

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\alpha|=j}\|u_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}=0$$

定理 2 的结论1)成立。

如果$u_k\in U_{h_k}(k=1,2,\cdots)$是有界序列且$h_k\to 0$，则因定理2在$q_0=\cdots=q_{m-1}=p$ 时成立，存在$\{u_k\}$的子列（仍记为$\{u_k\}$）和$u_0\in W^{m,p}(\Omega)$（或$\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$），使得$\{u_k\}$弱收敛于$u_0$。由2）的条件可知，存在$\varphi_h\in U_h(h\in(0,1))$使得

$$\lim_{h\to 0}\left\{\|u_0-\varphi_h\|_{m,p,\Omega}+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|D^\alpha u_0-\varphi_h^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}\right\}=0$$

因而$\{\varphi_{h_k}-u_k\}$弱收敛于0。由三角不等式及结论1)可知：

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\|D^\alpha u_0-u_k^\alpha\|_{0,q_j,\Omega}=0$$

定理 2 得证。

定理 3 的证明很简单，只须证明

$$0\leqslant l\leqslant m-1,\quad \sum_{|\alpha|=l}|u_h^\alpha|_{1,\sigma,K}\leqslant C\sum_{t=l+1}^{m}h^{t-l-1}\sum_{|\alpha|=t}|u_h^\alpha|_{0,\sigma,K} \tag{3.22}$$

成立。利用(1.1)和(3.11)式很容易得到(3.22)式。

至此，本文的主要结论全部证明完毕。

参 考 文 献

[1] 张鸿庆、王鸣，拟协调元空间的紧致性和拟协调元法的收敛性，应用数学和力学，7，5 (1986)，409—423.

[2] Zhang Hong-qing and Wang Ming, Finite element approximations with multiple sets of functions and quasi-conforming elements, *Proc. of the* 1984 *Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, Ed. by Feng Kang, Science Press (1985), 354—365.

[3] Stummel, F., Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, RAIRO, *Numer. Anal.*, 4, 1 (1980), 81—115.

[4] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[5] Ciarlet, P. C., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1978).

On the Embedding and Compact Properties of Finite Element Spaces

Wang Ming Zhang Hong-qing

(*Institute of Applied Mathematics, Dalian Institute of Technology, Dalian*)

Abstract

In this paper, the generalized Sobolev embedding theorem and the generalized Rellich-Kondrachov compact theorem for finite element spaces with multiple sets of functions are established. Specially, they are true for nonconforming, hybrid and quasi-conforming element spaces with certain conditions.