

均布载荷作用下变厚度圆球扁薄壳的 非线性轴对称弯曲和稳定性*

叶志明

(兰州大学力学系, 1986年12月10日收到)

摘要

本文应用叶开沅教授与作者在文[1]中提出的修正迭代法, 研究了在均布载荷作用下变厚度圆球扁薄壳的非线性轴对称弯曲和稳定性, 求得了挠度曲线与临界载荷值, 所获得的数值结果以图表形式给出, 另外关于确定壳体中心挠度与载荷的方程式对应于尖点突变流形。

符号意义

W ——壳体 z 方向上的挠度

r ——柱坐标的半径坐标

N_r ——径向薄膜力

D ——弯曲刚度: $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$

E ——杨氏模量

μ ——泊松比

f ——扁壳的拱高

a ——扁壳的半跨长

一、引言

随着科学技术的发展, 柔韧壳体在工程中的应用日益广泛, 人们也越来越关注这类壳体的非线性弯曲与稳定性问题。由于这类壳体的受力响应是一非线性现象, 其微分方程是一组非线性方程, 所以这类问题的解是复杂的且在很简单的情形下得到了一些解答。文[3~6]用各种解法研究了在各种边界条件下这类方程组的解, 但所有这些工作仅限于等厚度壳体情形。

非均匀厚度的柔韧壳体在工程设计中常被应用。本文用叶开沅教授和作者在文[1]中提出的修正迭代法, 研究了在均布载荷作用下变厚度圆球扁薄壳的非线性轴对称弯曲和稳定性问题, 求得了挠度曲线和临界载荷值, 所得的数值结果以图表形式给出, 此外关于确定壳体中心挠度与载荷的方程式对应于尖点突变流形, 文中还将所求之解与等厚度情形之解进行了对比, 采用变厚度壳体可以有效地提高或降低壳体的稳定特性。

二、基本方程和边界条件

设 $h = h_0 \exp[-(\beta/6)(r/a)^2]$ 并引入下列无量纲量:

* 叶开沅推荐。

中国科学院科学基金资助的课题。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad y = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{W}{h_0} + \frac{1}{2} K \rho^2, \quad \theta = \frac{dy}{d\rho}, \quad K = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{f}{h_0} \\ S &= \rho \cdot \frac{12(1-\mu^2)a^2 N_r}{E h_0^3}, \quad p = [12(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}} \frac{q a^4}{E h_0^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

则由作者在文[2]中导得的基本微分方程组有如下形式(无量纲形式):

$$\mathcal{L}(\rho\theta) = \beta \left(\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} + \mu\rho\theta - K\lambda\rho^2 \right) + \left(\frac{p}{2} \rho^2 + S\theta \right) \exp\left(\frac{\beta}{2} \rho^2\right) \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{L}(\rho S) = \frac{\beta}{3} \left(\mu\rho S - \rho^2 \frac{dS}{d\rho} \right) + \frac{1}{2} (K^2 \rho^2 - \theta^2) \exp\left(-\frac{\beta}{6} \rho^2\right) \quad (2.2b)$$

式中: 微分算子 $\mathcal{L}(\quad) = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\quad)$, $\lambda = 1 + \mu$.

固定夹支边的边界条件为:

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } \quad y=K/2, \quad \theta=K, \quad \frac{dS}{d\rho} - \mu S = 0 \quad (2.3a)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \quad \theta=S=0 \quad (2.3b)$$

三、分析解

取 $\varepsilon = \beta/6$, 当 β 不太大时, $\varepsilon < 1$ 为一小参数. 则 $\exp(3\varepsilon\rho^2)$ 与 $\exp(-\varepsilon\rho^2)$ 可展成关于 ε 的 Taylor 级数如下:

$$\exp(3\varepsilon\rho^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \varepsilon^k}{k!} \rho^{2k} \quad (3.1a)$$

$$\exp(-\varepsilon\rho^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varepsilon^k}{k!} \rho^{2k} \quad (3.1b)$$

在一次近似中, 我们略去方程式(2.2)中的变厚度项与非线性项, 则边值问题成为下面形式:

$$\mathcal{L}(\rho\theta_1) = \frac{p}{2} \rho^2 \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{L}(\rho S_1) = \frac{1}{2} (K^2 \rho^2 - \theta_1^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varepsilon^k}{k!} \rho^{2k} \quad (3.2b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } \quad y_1=K/2, \quad \theta_1=K, \quad \frac{dS_1}{d\rho} - \mu S_1 = 0 \quad (3.3a)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \quad \theta_1=S_1=0 \quad (3.3b)$$

对于二次近似, 有变厚度壳体的边值问题为:

$$\mathcal{L}(\rho\theta_2) = 6\varepsilon \left(\rho^2 \frac{d\theta_1}{d\rho} + \mu\rho\theta_1 - K\lambda\rho^2 \right) + \left(\frac{p}{2} \rho^2 + S_1\theta_1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \varepsilon^k}{k!} \rho^{2k} \quad (3.4)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } \quad y_2=K/2, \quad \theta_2=K \quad (3.5a)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时: } \quad \theta_2=0 \quad (3.5b)$$

逐次求解上述边值问题, 取壳体中心挠度 $y|_{\rho=0} = y_m$ 为迭代参数. 我们可求得关于壳体

中心挠度 y_m 与载荷 p 的方程式为:

$$p = M_1 [(M_2 + K^2 M_3) y_m + M_4 K y_m^2 + M_5 y_m^3] \quad (3.6)$$

式中: M_1, M_2, M_3, M_4 与 M_5 均为泊松比 μ 与壳体变厚度参数 β 的函数。

四、数值结果

1. 两个特例

(1) 当 $\beta=0, K \neq 0$ 时, 解(3.6)式即为等厚度圆球扁壳之解答:

$$p = M_1 [(M_2 + K^2 M_3) y_m + M_4 K y_m^2 + M_5 y_m^3] \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中: } M_1 &= 64, M_2 = 1, M_3 = \frac{2-\mu}{96(1-\mu)} - \frac{13}{2304} \\ M_4 &= \frac{3\mu-5}{192(1-\mu)} - \frac{5(2-\mu)}{216(1-\mu)} + \frac{1}{240} - \frac{5}{192} + \frac{3}{72} \\ M_5 &= -\frac{77}{4320} + \frac{5-3\mu}{48(1-\mu)} - \frac{5-3\mu}{108(1-\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

此结果与文[10]解一致。

(2) 当 $K=0, \beta \neq 0$ 时, 解(3.6)式为变厚度圆板大挠度问题之解:

$$\frac{qa^4}{Eh_0^4} = A \left(\frac{W_m}{h_0} \right) + B \left(\frac{W_m}{h_0} \right)^3 \quad (4.3)$$

式中: $A = M_1 M_2 / 12(1-\mu^2)$, $B = M_1 M_5$ 。一些数值结果列于图 1 与表 1 中。

由图 1 可见, 本文解与文[7,8]关于变厚度圆板的解吻合良好。

表 1

($\mu=1/3$)

β	3	2	1	0	-1	-2	-3
K_0	7.190	7.991	8.827	9.696	10.59	11.52	12.47
y_{m0}	3.407	3.709	4.021	4.341	4.669	5.005	5.349
p_0	106.7	147.8	201.4	270.2	357.0	465.3	598.5
q_0/q_{01}	1.030	1.046	1.035	1.000	0.943	0.868	0.783
A	2.657	3.507	4.565	5.861	7.423	9.279	11.45
B	2.178	2.483	2.823	3.198	3.610	4.060	4.549

2. 变厚度壳体的稳定性

为概括地表示壳体的稳定特性, 式(3.6)改写如下:

$$E_3 y_m^3 + E_2 y_m^2 + E_1 y_m + E_0 = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{式中: } E_0 = p, E_1 = -M_1(M_2 + K^2 M_3), E_2 = -M_1 M_4 K, E_3 = -M_1 M_5 \quad (4.5)$$

$$\text{设 } w_m = y_m - (E_2/3E_3) \quad (4.6)$$

$$\text{以及 } u = \frac{E_1}{E_3} - \frac{E_2^2}{3E_3^2} \quad (4.7)$$

$$v = \frac{E_0}{E_3} - \frac{E_1 E_2}{3E_3^2} + \frac{2E_2^3}{27E_3^3} \quad (4.8)$$

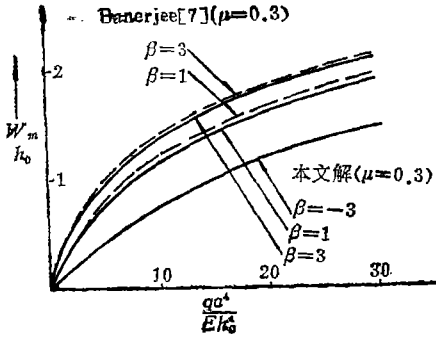


图1 挠度曲线

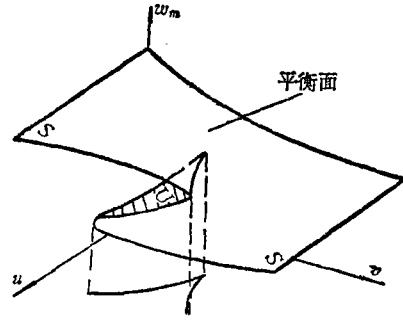


图2 平衡面与尖点突变流形

从而我们可求得正则化的平衡方程为:

$$w_m^3 + uw_m + v = 0 \tag{4.9}$$

表达式(4.9)关于 p 与 K 的平衡面的集, 且对应于文[9,11]的尖点突变流形, 即:

$$B = \{(w_m, u, v) | w_m^3 + uw_m + v = 0\} \tag{4.10}$$

经运算后, 又有分叉集为:

$$C = \{(u, v) | 4u^3 + 27v^2 = 0\} \tag{4.11}$$

图2示出了在三维空间 (w_m, u, v) 中的平衡面(4.10)和二维 (p, K) 中的临界载荷分叉集. 上、下叶是稳定平衡状态 (S 标记), 中叶是不稳定平衡态 (U 标记). 分叉集在坐标系 Ouv 中给出, 此集对应于临界曲线. 在 $Ow_m u$ 平面上突变曲面的截面是叉型分叉线, 显示了 $y_m \sim K$ 关系. 在任一不过临界点的 Ouv 平面上突变曲面的截面一般是突变曲线 (即为临界曲线).

进而便于工程设计使用的挠度曲线与临界载荷曲线绘于图3、4. 临界点的数值列于表1中

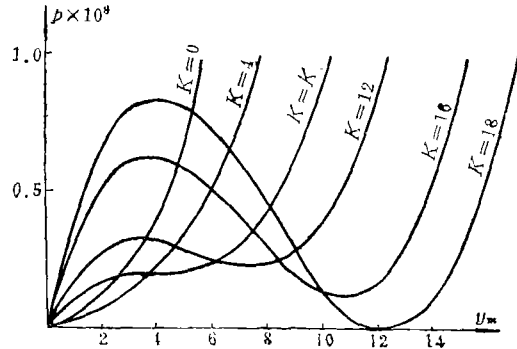


图3 壳体挠度曲线 ($\beta=1, \mu=1/3$)

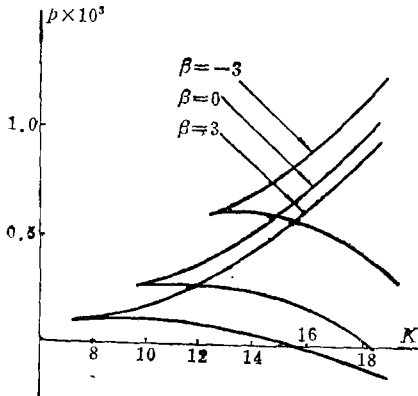


图4 临界载荷曲线 ($\mu=1/3$)

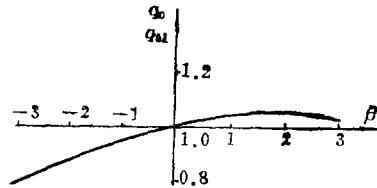


图5

3. 一个比较

设变厚度圆球扁薄壳的体积等于等厚度壳体的体积, 我们考察当壳体厚度变化时对其临界点处临界载荷的影响, 取:

$$V_u = \pi a^2 h_1 \quad (4.12a)$$

$$V_v = \int_v h_0 \exp\left[-\frac{\beta}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] dv = \pi a^2 h_0 F(\beta) \quad (4.12b)$$

式中：函数 $F(\beta) = 6[1 - \exp(-\beta/6)]/\beta$ (4.13)

令 $V_u = V_v$ ，则有：

$$h_1 = h_0 F(\beta) \quad (4.14)$$

将式(4.14)代入(2.1)式，并结合表1，由此可得到有量纲临界载荷比 q_0/q_{01} 与厚度变化参数 β 之关系列于表1与图5，这里 q_0 为变厚度的，而 q_{01} 为等厚度的。

作者感谢导师叶开沅教授的悉心指导和帮助！

参 考 文 献

- [1] 叶开沅、叶志明、王新志，对“变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题”解法的讨论，应用数学和力学，6，3（1985），285—287.
- [2] Ye Zhi-ming, The nonlinear bending and stability of thin circular plates and thin conical and spherical shallow shells with variable thickness, *Proc. Int. Conf. Non-Linear Mechanics*, Shanghai, Oct. (1985), 28—31.
- [3] 叶开沅、宋卫平，在均布压力作用下圆锥扁壳的非线性稳定性，兰州大学学报（自然科学版），力学专号，19（1983）.
- [4] 叶开沅，柔韧构件的研究在中国的进展，力学进展，13，2（1983）.
- [5] 铁木辛柯，S.，S. 沃诺斯基著，《板壳理论》，科学出版社（1977）.
- [6] Huang, N.C., Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells, *J. Appl. Mech.*, 1（1964）.
- [7] Banerjee, B., Large deflections of circular plates of variable thickness, *J. Appl. Mech.*, 49, 1（1982）.
- [8] Banerjee, B., Large deflections of circular plates of variable thickness, *Int. J. Solids and Struct.*, 19, 2（1983）.
- [9] Poston, T. and I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, London（1978）.
- [10] 叶开沅、顾淑贤，在均布压力作用下圆球扁壳的非线性稳定性，《中国力学学会全国计算力学会议论文集》，北京大学出版社（1981）.
- [11] Stumpf, H., On the nonlinear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shell, *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 19, 3（1984）.

Nonlinear Axisymmetric Bending and Stability of Thin Spherical Shallow Shell with Variable Thickness under Uniformly Distributed Loads

Ye Zhi-ming

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, the nonlinear bending and stability of thin spherical shallow shell with variable thickness under uniformly distributed loads are investigated by a new modified iteration method proposed by Prof. Yeh Kai-yuan and the author^[1]. Deflections and critical loads have been calculated and the numerical results obtained have been given in figures and tabular forms. It is shown that the final equation determining the central deflection and the load obtained coincides with the cusp catastrophe manifold.