

# 一种用于平面弹性材料分析的有限元法\*

蒋友谅

(北京工业学院, 1986年12月30日收到)

## 摘要

本文在有限元位移法的基础上, 提出一种用于平面弹性材料机械性能分析的有限元法。利用这种方法及其微机程序, 可以确定任一未知的平面弹性材料的机械性能, 算出其全部弹性系数。

## 一、引言

迄今, 固体力学中的有限元法均假定材料性能已知, 用给定的本构关系进行应力分析。本文在有限元位移法的基础上, 提出一种用于平面弹性材料机械性能分析的有限元法。作者在研究这种方法的同时, 编制出平面弹性材料分析微机程序PEMA, 并计算了大量例题。计算结果表明, 利用这种方法及其微机程序PEMA, 对于一材料性能完全未知的弹性平板, 只要给出三个点的位移值, 就可以准确地确定该平板材料是完全各向异性的, 还是正交异性的, 还是各向同性的; 精确地算出该平板材料的全部弹性系数。

## 二、基本原理

众所周知, 在有限元位移法中, 最终要求解的是下列节点平衡方程:

$$[K]\{U\}=\{P\} \quad (2.1)$$

如果把节点位移 $\{U\}$ 作为已知向量, 并后乘刚度矩阵 $[K]$ 后, 再把原 $[K]$ 中独立的弹性系数排成列矩阵作为待求的未知量 $\{D\}$ , 那么节点平衡方程(2.1)式可写成下列形式:

$$[A]\{D\}=\{P\} \quad (2.2)$$

其中 $[A]$ 是未知量 $\{D\}$ 的系数矩阵。 $[A]$ 反映了物体的几何尺寸和变形情况, 我们把它称为物体的几何变形矩阵。若几何变形矩阵 $[A]$ 是非奇异的, 则未知的弹性系数 $\{D\}$ 可按下式求解:

$$\{D\}=[A]^{-1}\{P\} \quad (2.3)$$

\* 薛大为推荐。

### 三、平面弹性材料特性

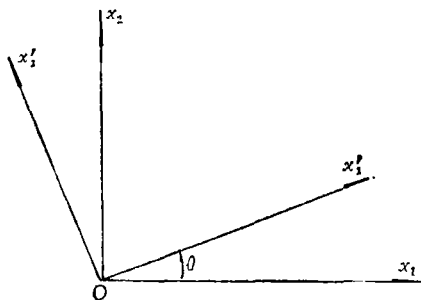


图 1

任一平面各向异性弹性材料有 6 个独立的弹性系数。在参考坐标系  $x_1-x_2$  中的弹性系数矩阵为

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{1,1} & & \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \text{对称} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

由于平面弹性矩阵的坐标变换关系 (参看图 1) 为

$$[Q] = [T][D][T]^T \quad (3.2)$$

其中

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

所以若

$$Q_{3,1} = Q_{3,2} = 0 \quad (3.4)$$

则该平面弹性材料是正交异性的。此时的坐标系  $x'_1-x'_2$  是主轴坐标系,  $\theta$  是主轴方向角, 且

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= Q_{1,1} - Q_{2,1}^2/Q_{2,2}, & E_2 &= Q_{2,2} - Q_{2,1}^2/Q_{1,1} \\ \nu_{12} &= Q_{2,1}/Q_{2,2}, & G_{12} &= Q_{3,3} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

若对任何参考坐标系均有

$$d_{3,1} = d_{3,2} = 0, \quad d_{1,1} = d_{2,2}, \quad d_{3,3} = d_{1,1} - d_{2,1} \quad (3.6)$$

则该平面弹性材料是各向同性的, 且

$$E = (1 - d_{2,1}^2/d_{1,1}^2)d_{1,1}, \quad \nu = d_{2,1}/d_{2,2} \quad (3.7)$$

### 四、单元几何变形矩阵

为了建立平面弹性材料分析的通用公式, 我们假定材料是完全各向异性的, 并把 6 个独立的弹性系数排成下面列矩阵形式:

$$\{D\} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T \quad (4.1)$$

其中

$$d_1 = d_{1,1}, \quad d_{t(p-1)+q} = d_{p,q} \quad (p=2,3; \ q=1,2,3) \quad (4.2)$$

这里  $t(p-1)$  为  $[D]$  中第  $p-1$  行主对角线元素在  $\{D\}$  中的位置, 而

$$t(p) = \begin{cases} 1, & (p=1) \\ 3, & (p=2) \\ 6, & (p=3) \end{cases} \quad (4.3)$$

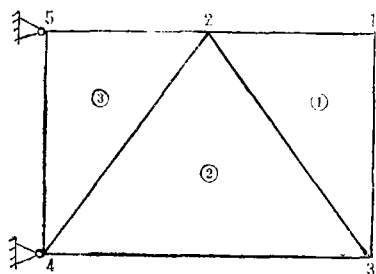


图 2

由于要具体建立以  $6 \times 1$  阶的  $\{D\}$  为未知量的  $6 \times 6$  阶矩阵方程, 所以若采用最简单的常应变三角形单元, 则计算模型极易选取。例如图 2 所示计算模型就是其中之一。由图 2 可知,

约束处理后该模型的刚度方程恰恰是6×6阶的矩阵方程，即

$$[K]_{6 \times 6} \{U\}_{6 \times 1} = \{P\}_{6 \times 1} \quad (4.4)$$

若按节点分块，则(4.4)式可写为

$$\begin{bmatrix} [k]_{1,1}^{①} & & & & & \\ & \text{对称} & & & & \\ [k]_{2,1}^{①} & [k]_{2,2}^{①②③} & & & & \\ & & & & & \\ [k]_{3,1}^{①} & [k]_{3,2}^{①②} & [k]_{3,3}^{①②} & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_1 \\ \{U\}_2 \\ \{U\}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

其中①②和①②③分别表示①，②两个单元和①，②，③三个单元同名分块子矩阵之和。

众所周知，对常应变三角形单元，有

$$[k]_{(r),(s)}^e \{U\}_{(s)} = t S^e [B]_{(r)}^T [D] [B]_{(s)} \{U\}_{(s)}, \quad (r),(s) = (1),(2),(3) \quad (4.6)$$

其中

$$S^e = (b_{1(2)} b_{2(3)} - b_{1(3)} b_{2(2)}) / 2 \quad (4.7)$$

$$[B]_{(k)} = \frac{1}{2S^e} \begin{bmatrix} b_{1(k)} & 0 \\ 0 & b_{2(k)} \\ b_{2(k)} & b_{1(k)} \end{bmatrix}, \quad (k) = (r),(s) \quad (4.8)$$

$$b_{1(1)} = x_{2(2)} - x_{2(3)}, \quad (1),(2),(3) \quad (4.9)$$

$$b_{2(1)} = x_{1(3)} - x_{1(2)}, \quad (1),(2),(3) \quad (4.10)$$

于是，把(3.1)和(4.8)式代入(4.6)式，并考虑到(4.1)式可得

$$[k]_{(r),(s)}^e \{U\}_{(s)} = [a]_{(r),(s)}^e \{D\}_{6 \times 1} \quad (4.11)$$

其中

$$[a]_{(r),(s)}^e = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{t}{4S^e} b_{1(r)} b_{1(s)} u_{1(s)} \\ a_{1,2} &= \frac{t}{4S^e} b_{1(r)} b_{2(s)} u_{2(s)} \\ a_{1,4} &= \frac{t}{4S^e} [(b_{2(r)} b_{1(s)} + b_{1(r)} b_{2(s)}) u_{1(s)} + b_{1(r)} b_{1(s)} u_{2(s)}] \\ a_{1,5} &= \frac{t}{4S^e} b_{2(r)} b_{2(s)} u_{2(s)} \\ a_{1,6} &= \frac{t}{4S^e} (b_{2(r)} b_{2(s)} u_{1(s)} + b_{2(r)} b_{1(s)} u_{2(s)}) \\ a_{2,2} &= \frac{t}{4S^e} b_{2(r)} b_{1(s)} u_{1(s)} \\ a_{2,3} &= \frac{t}{4S^e} b_{2(r)} b_{2(s)} u_{2(s)} \\ a_{2,4} &= \frac{t}{4S^e} b_{1(r)} b_{1(s)} u_{1(s)} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{2,5} &= \frac{t}{4S^e} [b_{2(r)}b_{2(s)}u_{1(s)} + (b_{1(r)}b_{2(s)} + b_{2(r)}b_{1(s)})u_{2(s)}] \\ a_{2,6} &= \frac{t}{4S^e} (b_{1(r)}b_{2(s)}u_{1(s)} + b_{1(r)}b_{1(s)}u_{2(s)}) \end{aligned} \right\}$$

## 五、模型几何变形矩阵

把(4.11)式代入(4.5)式使得

$$[A]_{6 \times 6} \{D\}_{6 \times 1} = \{P\}_{6 \times 1} \quad (5.1)$$

其中

$$[A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [A]_1 \\ [A]_2 \\ [A]_3 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} [A]_1 &= [a]_{1,1}^{(1)} + [a]_{1,2}^{(1)} + [a]_{1,3}^{(1)} \\ [A]_2 &= [a]_{2,1}^{(1)} + [a]_{2,2}^{(1)(2)(3)} + [a]_{2,3}^{(1)(2)} \\ [A]_3 &= [a]_{3,1}^{(1)} + [a]_{3,2}^{(1)(2)} + [a]_{3,3}^{(1)(2)} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

**定理** 在引入了位移边界条件的有限元节点平衡方程中,模型的几何变形矩阵必定是不对称的非奇异矩阵。

**证明** 把(4.12)、(4.13)式代入(5.2)、(5.3)式后可知,  $A_{ij} \neq A_{ji}$ , 同时 $[A]$ 中任意两行(或两列)向量都是线性无关的,即矩阵 $[A]$ 是满秩的,所以几何变形矩阵是不对称的非奇异矩阵。

## 六、计算举例

为了考察本文方法的有效性,作者按(2.3)~(5.3)式编制出平面弹性材料分析微机程序PEMA,并把由SAP84计算出的节点位移作为已知数据,用PEMA程序计算了以下四个方面的例题。

- (1) 主轴方向角相同( $\theta=20^\circ$ )的两种正交异性材料  
计算结果如表1所示。

表 1

|       | 硼/环氧单层复合材料 |         | 碳/环氧单层复合材料 |      |
|-------|------------|---------|------------|------|
|       | 计算值        | 原值      | 计算值        | 原值   |
| $E_1$ | 21.09319   | 21.092  | 9.12970    | 9.13 |
| $E_2$ | 2.10933    | 2.1092  | 8.82968    | 8.83 |
| $G$   | 0.70305    | 0.70307 | 0.46000    | 0.46 |
| $\nu$ | 0.30000    | 0.3     | 0.32000    | 0.32 |

\*  $E_1$ ,  $E_2$ 和 $G$ 的单位均为 $10^6\text{kg/cm}^2$  (下同)

- (2) 主轴方向角不同的同种正交异性材料

计算结果如表 2 所示。

表 2

| $\theta$ | 10°      | 30°      | 45°      | 70°      |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $E_1$    | 21.09290 | 21.08595 | 21.08784 | 21.09292 |
| $E_2$    | 2.10931  | 2.10865  | 2.10879  | 2.10952  |
| $G$      | 0.70310  | 0.70313  | 0.70308  | 0.70290  |
| $\nu$    | 0.30000  | 0.30060  | 0.30000  | 0.30000  |

\* 材料为硼/环氧，其原值和20°的计算值见表 1。

(3) 加力方式不同的同模型同种正交异性材料

同一模型的不同加力方式如图 3 所示。同模型同种正交异性材料在不同加力方式下的计算结果如表 3 所示。

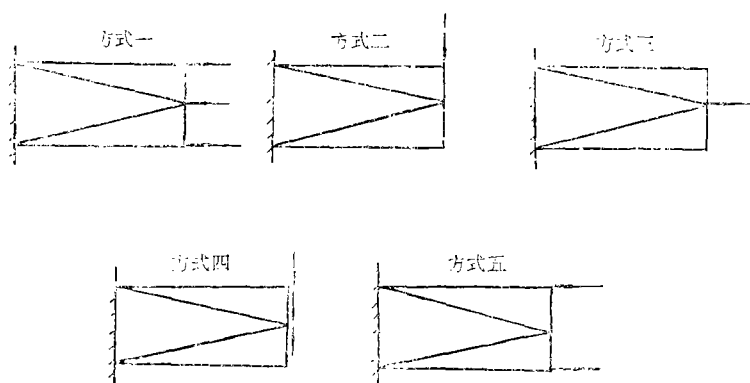


图 3

表 3

|       | 方式一      | 方式二      | 方式三      | 方式四      | 方式五      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $E_1$ | 21.09319 | 21.10056 | 21.08149 | 21.10112 | 21.09203 |
| $E_2$ | 2.10933  | 2.11021  | 2.10826  | 2.11021  | 2.10920  |
| $G$   | 0.70305  | 0.70292  | 0.70310  | 0.70299  | 0.70305  |
| $\nu$ | 0.30000  | 0.30001  | 0.30001  | 0.30000  | 0.30000  |

\* 材料为硼/环氧，主轴方向角为20°，其原值和与方式一反向加力的计算值见表 1。

(4) 模型或单元划分不同的同种正交异性材料

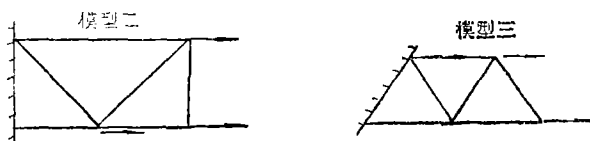


图 4

不同模型或不同的单元划分如图 4 所示。同种正交异性材料用不同模型计算的结果如表 4 所示。

表 4

|       | 模型一      | 模型二      | 模型三      |
|-------|----------|----------|----------|
| $E_1$ | 21.09319 | 21.09256 | 21.12299 |
| $E_2$ | 2.16933  | 2.10926  | 2.11258  |
| $G$   | 0.70305  | 0.70307  | 0.70315  |
| $\nu$ | 0.36000  | 0.36000  | 0.30000  |

\* 材料为硼/环氧, 主轴方向角为  $20^\circ$ , 其原值见表1. 这里的模型一与(2.1)的模型相同.

## 七、结 论

由计算结果表1~表4可知, 对于任一完全未知的弹性材料, 只要模型和加力方式选取得合适, 并通过实验手段精确地测出给定面内外力作用下的节点位移值, 就可以利用本文方法及其微机程序PEMA, 准确无误地判定模型材料的机械性能, 计算出其全部弹性系数.

### 参 考 文 献

- [1] 蒋友谅, 《有限元法基础》, 国防工业出版社(1980).
- [2] 航空材料编辑部, 《复合材料研究进展》, 第二届全国复合材料学术会议论文选编(1984).
- [3] 杨篋引、马正午、孙宇等, 《电子计算机应用数学》, 冶金工业出版社(1979).

## A Finite Element Method on the Plane Elastic Material Analysis

Jiang You-liang

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

### Abstract

Based on the finite element displacement method, a finite element method on the analysis of mechanical behaviour of plane elastic materials is proposed in this paper. By using this method and the corresponding computational program, the material behaviour of any unknown plane elastic material can be determined and all the elastic constants can be calculated.