应用数学和力学，第9卷第2期(1988年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变壁厚轴对称球壳*

王 慎 行

（中国天津化学工程公司，1985年6月15日收到）

摘 要

本文研究变壁厚轴对称球壳问题．对于不包含零厚度点及球极的壳体，给出了问题的解．

一、控 制 方 程

在变壁厚球壳的中面上选取球面坐标φ,θ，第三坐标z选取中面的外法线（图1）．在这一坐标系中，轴对称球壳的平衡方程为

$$\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi \sin\varphi)-N_\theta\cos\varphi+Q_\varphi\sin\varphi+Rq_\varphi\sin\varphi=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi \sin\varphi)-N_\theta\sin\varphi-N_\varphi\sin\varphi+Rq_z\sin\varphi=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(M_\varphi \sin\varphi)-M_\theta\cos\varphi-RQ_\varphi\sin\varphi=0 \tag{1.3}$$

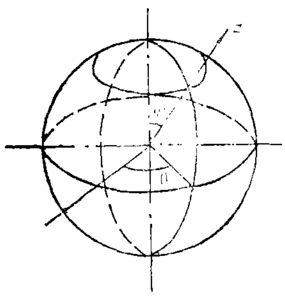

图 1

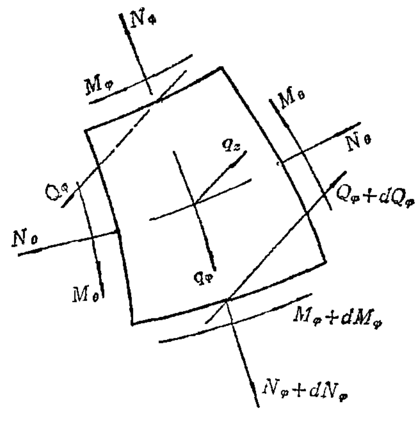

图 2

式中，N_φ是经向力，N_θ是环向力，Q_φ是相应于坐标φ的横剪力，M_φ和M_θ分别是相应于坐标φ和θ的弯矩，R是球壳中面半径，q_φ和q_z分别是相应于坐标φ和z的外载荷．内力和外载的正方向如图2所示．

*钱伟长推荐．
1982年7月24日第一次收到．

令u和w为相应于坐标φ和z的位移，则轴对称应变为

$$\varepsilon_\varphi = R^{-1}(du/d\varphi + w) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_\theta = R^{-1}(u\cot\varphi + w) \tag{1.5}$$

中面的经线转角为

$$\chi = R^{-1}(dw/d\varphi - u) \tag{1.6}$$

曲率改变为

$$\kappa_\varphi = -R^{-1}d\chi/d\varphi \tag{1.7}$$

$$\kappa_\theta = -\cot\varphi \cdot R^{-1}\chi \tag{1.8}$$

力与应变的关系为

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) \tag{1.9}$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) \tag{1.10}$$

$$M_\varphi = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_\varphi + \mu\kappa_\theta) \tag{1.11}$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_\theta + \mu\kappa_\varphi) \tag{1.12}$$

式中，E为弹性模量，μ为泊桑比，h为壳体壁厚.

以上是变壁厚轴对称球壳的基本关系式．据此便可导出它的控制方程.

由式(1.1)、(1.2)消去N_θ可得

$$\begin{aligned}\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi\sin\varphi) - \cos\varphi\frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi\sin\varphi) + N_\varphi\sin\varphi\cos\varphi \\ + Q_\varphi\sin^2\varphi + Rq_\varphi\sin^2\varphi - Rq_z\sin\varphi\cos\varphi = 0\end{aligned} \tag{1.13}$$

式 (1.13) 是沿球壳旋转轴方向上力的平衡方程．将它积分得

$$N_\varphi\sin^2\varphi - Q_\varphi\sin\varphi\cos\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi} R(q_z\cos\varphi - q_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + \frac{P}{2\pi R} \tag{1.14}$$

式中，φ_1是φ所取的边界值，常数P是φ_1处力的轴向合力.

由式(1.14)，

$$N_\varphi = Q_\varphi\cot\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi} R(q_z\cos\varphi - q_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + \frac{P}{2\pi R}\right] \tag{1.15}$$

然后，将式 (1.15) 代入式 (1.2) 得

$$N_\theta = \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi} R(q_z\cos\varphi - q_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + \frac{P}{2\pi R}\right] + Rq_z \tag{1.16}$$

此外，由式(1.4)、(1.5)、(1.9)、(1.10)可得

$$du/d\varphi + w = R(Eh)^{-1}(N_\varphi - \mu N_\theta) \tag{1.17}$$

$$u\cot\varphi + w = R(Eh)^{-1}(N_\theta - \mu N_\varphi) \tag{1.18}$$

将式 (1.18) 对φ求导数，则

$$\frac{du}{d\varphi}\cot\varphi - \frac{u}{\sin^2\varphi} + \frac{dw}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{R}{Eh}(N_\theta - \mu N_\varphi)\right] \tag{1.19}$$

由式(1.6)、(1.17)、(1.18)、(1.19)得

$$\chi = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{Eh}(N_\theta - \mu N_\varphi)\right] + \frac{\cot\varphi}{Eh}(1+\mu)(N_\theta - N_\varphi) \tag{1.20}$$

再将式(1.15)、(1.16)代入式(1.20)，便得联系χ和Q_φ的一个方程

$$\frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2}+\left(\cot\varphi-\frac{1}{h}\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dQ_\varphi}{d\varphi}+\left(\frac{\mu}{h}\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi+\mu-\cot^2\varphi\right)Q_\varphi-Eh\chi$$

$$=-\frac{(1+\mu)}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{h}\frac{dh}{d\varphi}\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi}R(q_z\cos\varphi-q_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{P}{2\pi R}\right]-R\frac{dq_z}{d\varphi}+\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}Rq_z-(1+\mu)Rq_\varphi \tag{1.21}$$

另一方面，将式(1.7)、(1.8)代入式(1.11)、(1.12)，然后再将式(1.11)、(1.12)代入式(1.3)，可得联系χ和Q_φ的另一方程

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}+\left(\frac{3}{h}\frac{dh}{d\varphi}+\cot\varphi\right)\frac{d\chi}{d\varphi}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3\mu}{h}\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi-\mu-\cot^2\varphi\right)\chi\right]+R^2Q_\varphi=0 \tag{1.22}$$

现在，令

$$U=mRQ_\varphi,\qquad m=\sqrt{12(1-\mu^2)} \tag{1.23}$$

$$V=Eh^2\chi \tag{1.24}$$

利用式(1.23)、(1.24)，则式(1.22)、(1.21)可变换为

$$\frac{h}{mR}\left\{\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\left(\cot\varphi-\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dV}{d\varphi}-\left[\mu+\cot^2\varphi\right.\right.$$

$$\left.\left.+(2-3\mu)\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi+\frac{2}{h}\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right]V\right\}+U=0 \tag{1.25}$$

$$\frac{h}{mR}\left\{\frac{d^2U}{d\varphi^2}+\left(\cot\varphi-\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dU}{d\varphi}+\left(\mu-\cot^2\varphi\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi\right)U\right\}-V=-f(\varphi) \tag{1.26}$$

其中

$$f(\varphi)=\frac{1+\mu}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi}R(q_z\cos\varphi-q_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{P}{2\pi R}\right]+Rh\frac{dq_z}{d\varphi}-Rq_z\frac{dh}{d\varphi}+(1+\mu)Rhq_\varphi \tag{1.27}$$

设

$$L(\cdots)=\frac{h}{mR}\left\{\frac{d^2}{d\varphi^2}+\left(\cot\varphi-\frac{1}{h}\cdot\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{d}{d\varphi}\right.$$

$$\left.+\mu-\cot^2\varphi+\frac{\mu}{h}\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi-\frac{2}{h}\psi(\varphi)\right\}(\cdots) \tag{1.28}$$

其中

$$\psi(\varphi)=d^2h/d\varphi^2+(1-\mu)(dh/d\varphi)\cot\varphi+\mu h \tag{1.29}$$

则式(1.25)、(1.26)可写为

$$L(V)+U=0 \tag{1.30}$$

$$L(U)+2(mR)^{-1}\psi U-V=-f(\varphi) \tag{1.31}$$

将式(1.30)代入式 (1.31) 得

$$LL(V)+2(mR)^{-1}\psi L(V)+V=f(\varphi) \tag{1.32}$$

式 (1.32) 就是变壁厚轴对称球壳的控制方程。

二、控制方程的解

控制方程(1.32)的一般解由齐次解和特解组成。此处首先研究齐次解，它满足齐次方程

$$LL(V)+2(mR)^{-1}\psi L(V)+V=0 \tag{2.1}$$

在式（2.1）中若ψ为一常数，则它可分解为两个二阶方程。显然，满足

$$\psi=\mu h_0=\text{const} \tag{2.2}$$

的$h(\varphi)$是 $$h=A\sin^{\mu}\varphi+h_0 \tag{2.3}$$

式中，h_0, A为常数。

将式（2.2）代入式(2.1)得

$$L(V)+\left[\frac{\mu h_0}{mR}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu h_0}{mR}\right)^2-1}\right]V=0 \tag{2.4a,b}$$

式(2.4)中，h_0是$\varphi=0$处壳体的壁厚，R是中面半径，$\mu/m<1$。所以$(\mu h_0/mR)<1$，而式（2.4）可改写为

$$L(V)+\left[\frac{\mu h_0}{mR}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{\mu h_0}{mR}\right)^2}\right]V=0 \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{2.5a,b}$$

方程（2.5a）与（2.5b）的解是复共轭的。因此，求解其中的一个方程，例如(2.5b)，然后分离复值函数的实部与虚部，便可得方程（2.1）的四个独立的实值函数解.

将式（1.28）代入式（2.5b），并考虑式（2.2），得

$$h\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\left(h\cot\varphi-\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dV}{d\varphi}+\left\{\mu h-h\cot^2\varphi+\mu\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi-\mu h_0\left[1+i\sqrt{\left(\frac{mR}{\mu h_0}\right)^2-1}\right]\right\}V=0 \tag{2.6}$$

令

$$W=V\sqrt{\sin\varphi/h} \tag{2.7}$$

则式（2.6）可变换为

$$h\frac{d^2W}{d\varphi^2}+\left\{\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\left(h+\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi\right)+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)^2-h\cot^2\varphi\right]+\frac{1}{2}\frac{d^2h}{d\varphi^2}-\mu h_0\left[1+i\sqrt{\left(\frac{mR}{\mu h_0}\right)^2-1}\right]\right\}W=0 \tag{2.8}$$

将式(2.3)代入式（2.8）得

$$d^2W/d\varphi^2+J_1(\varphi)W=0 \tag{2.9}$$

其中

$$J_1(\varphi)=\frac{1}{2}\left\{1+\mu-\frac{\mu h_0\left[1+2i\sqrt{(mR/\mu h_0)^2-1}\right]}{A\sin^{\mu}\varphi+h_0}\right\}-\frac{3}{4}\cot^2\varphi\left\{1+\left(\frac{\mu A\sin^{\mu}\varphi}{A\sin^{\mu}\varphi+h_0}\right)^2-\frac{2\mu^2A\sin^{\mu}\varphi}{A\sin^{\mu}\varphi+h_0}\right\} \tag{2.10}$$

设 $$\beta=\pi(\varphi-\varphi_1)/2(\varphi_2-\varphi_1) \tag{2.11}$$

即 $$\varphi=\varphi_1+2(\varphi_2-\varphi_1)\pi^{-1}\beta \tag{2.12}$$

其中，φ_1和φ_2是φ的边界值。并且此处要求：

（i） $0<\frac{\varphi_1}{\varphi_2}<\pi$ (2.13)

（ii） 在区间$[\varphi_1,\varphi_2]$上处处满足如下条件

$$A\sin^\mu\varphi+h_0\neq 0 \tag{2.14}$$

现在让我们将方程(2.10)写为

$$d^2W/d\beta^2+J(\beta)W=0 \tag{2.15}$$

式中

$$J(\beta)=4\pi^{-2}(\varphi_2-\varphi_1)^2J_1(\varphi(\beta)) \tag{2.16}$$

将$J(\beta)$视为周期等于π的偶函数，则方程（2.15)的解为[1]：

$$W=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\exp[i(\nu+2n)\beta] \tag{2.17}$$

为了求出式(2.17)中的特征指标ν和系数b_n，可将$J(\beta)$表示为区间$[0,\pi/2]$上的富氏余弦级数

$$J(\beta)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos 2k\beta \tag{2.18}$$

用某一方法，例如数值积分法，算出系数a_k，便可根据

$$\sin^2(\nu\pi/2)=\Delta(0)\sin^2(\sqrt{a_0}\,\pi/2) \tag{2.19}$$

确定特征指标ν。在式（2.19）中，

$$\Delta(0)=1+\frac{\pi\cot(\sqrt{a_0}\,\pi/2)}{4\sqrt{a_0}}\left[\frac{a_1^2}{1^2-a_0}-\frac{a_2^2}{2^2-a_0}+\frac{a_3^2}{3^2-a_0}+\cdots+\frac{a_k^2}{k^2-a_0}+\cdots\right] \tag{2.20}$$

求得ν值之后，便可用下列方程组算出b_n：

$$-(\nu+2n)^2b_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kb_{n-k}=0 \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots;\quad a_{-k}=a_k) \tag{2.21}$$

由式（2.19）解出的$\nu_{1,2}=\pm\nu_0$不是整数，所以，方程（2.15）的相应于ν_0和$-\nu_0$的两个解是互相独立的。这两个解分别为：

$$W_1^c=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^{(1)}\exp[i(\nu_0+2n)\beta] \tag{2.22}$$

$$W_2^c=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^{(2)}\exp[i(2n-\nu_0)\beta] \tag{2.23}$$

W_1^c,W_2^c为复值函数，分离其实部与虚部，便得四个独立的实值函数解W_1,W_2,W_3和W_4。而方程（2.15）的一般解为

$$W=C_1W_1+C_2W_2+C_3W_3+C_4W_4 \tag{2.24}$$

式中，C_1，C_2，C_3，C_4为任意实常数。

已知W之后，便可依式（2.7）确定满足方程（2.1）的解V。

控制方程(1.32)的特解,可以用齐次方程的解由常数变易法来求。但是此处给出另一解法。

将式（2.2）代入式（1.32），则方程（1.32）的左端可写成分解形式

$$\left\{L+\left[\frac{\mu h_0}{mR}-i\sqrt{1-\left(\frac{\mu h_0}{mR}\right)^2}\right]\right\}\left\{L+\left[\frac{\mu h_0}{mR}+i\sqrt{1-\left(\frac{\mu h_0}{mR}\right)^2}\right]\right\}V=f(\varphi) \tag{2.25}$$

令

$$L(V)+[\mu h_0/mR+i\sqrt{1-(\mu h_0/mR)^2}]V=V^* \tag{2.26}$$

则式(2.25)变为

$$L(V^*)+[\mu h_0/mR-i\sqrt{1-(\mu h_0/mR)^2}]V^*=f(\varphi) \tag{2.27}$$

注意式（1.28）、（2.3），并利用

$$W^*=V^*\sqrt{\sin\varphi/h} \tag{2.28}$$

将式（2.27）进行变换，得

$$d^2W^*/d\varphi^2+J_1(\varphi)W^*=f_1(\varphi) \tag{2.29}$$

其中，$J_1(\varphi)$由式（2.10）确定，而

$$f_1(\varphi)=mR\sqrt{\sin\varphi}(A\sin^\kappa\varphi+h_0)^{-\frac{3}{2}}f(\varphi) \tag{2.30}$$

再利用式（2.11），则方程（2.29）变为

$$d^2W^*/d\beta^2+J(\beta)W^*=f^*(\beta) \tag{2.31}$$

式中，$J(\beta)$由式（2.16）确定，而

$$f^*(\beta)=4\pi^{-2}(\varphi_2-\varphi_1)^2f_1(\varphi(\beta)) \tag{2.32}$$

将$J(\beta)$，$f^*(\beta)$表示为区间$[0,\pi/2]$上的富氏余弦级数，并写成如下形式：

$$J(\beta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\exp[2ik\beta],\quad a_{-k}=a_k \tag{2.33}$$

$$f^*(\beta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^*\exp[2in\beta],\ f_{-n}^*=f_n^* \tag{2.34}$$

设

$$W^*(\beta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^*\exp[2in\beta] \tag{2.35}$$

将式（2.33)、（2.34）、(2.35)代入式(2.31)，则有

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2n)^2b_n^*\exp[2in\beta]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\exp[2ik\beta]\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^*\exp[2in\beta]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^*\exp[2in\beta] \tag{2.36}$$

由此得

$$-(2n)^2b_n^*+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kb_{n-k}^*=f_n^*\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{2.37}$$

根据方程组（2.37）即可算出系数b_n^*。这样便求得W^*，也就求得V^*。然后依照求V^*的方法解方程（2.26），便可得到方程（1.32）的特解。

参 考 文 献

［1］王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社（1965），703—708.

Axisymmetric Spherical Shell with Variable Wall Thickness

Wang Shen-xing

(China Tianjin Chemical Engineering Corporation, Tianjin)

Abstract

This paper is engaged in research of the problem of axisymmetric spherical shell with variable wall thickness. The solutions for the problem are given for the spherical shell segment which does not contain the pole of sphere and the point of zero wall thickness.