

多变形体体系动力学*

洪善桃

(同济大学, 1986年10月15日收到)

摘 要

无论对于刚体或是变形体, Gibbs-Appell 方程是建立动力方程的行之有效的工具。本文将采用 Gibbs-Appell 方程来建立多变形体体系的动力方程。我们将指出采用该方法的优越性。文中给出了具有显式表达的多变形体体系的动力方程。此外也采用了一些新的及近代发展的概念, 诸如欧拉参数, 准坐标及相对坐标等。

近年来, 多体动力学引起各方面的兴趣, 这是由于有以下两方面的原因。首先, 很多机械系统和装置可以有效地用相互连接的刚体系统来模拟。其次, 由于高速数字计算机的发展, 目前有可能对于基本的动力学方程组进行有效的数值计算。如果机械系统由若干相互连接的刚体所组成, 而这些刚体至少有一公共的连接点, 但不是闭合的环状形式, 这样的系统称为开链系统如图1所示。

有三种方法可以用来建立上述系统的动力方程。经典的拉格朗日方程在工程上有着广泛的应用, 但是对于图1所示的机械系统是不适用的。人们所感兴趣的方法是由Kane和其它学者所给出的^[1-3]。关于多变形体体系动力学所发表的文章并不多, 而且很多研究者只是研究一个物体而不是多个物体^[4-6]。Huston曾研究过柔性和柔度在多体动力学中的效应^[7]。但是关于多变形体体系动力学比较系统而严密的充分研究似乎还未见到。本文的目的是打算研究这一问题, 并着重探讨 Gibbs-Appell 方程在多变形体体系中的应用。

本文由四部分组成。第一和第二部分包括问题的几何学方面和运动学方面; 第三部分论述采用 Gibbs-Appell 方程来建立多变形体体系的动力方程; 最后一部分讨论了本文所采用方法的优点。

一、变换矩阵

图2中考虑一对典型的相互联接的物体 B_k 和 B_j 。[3×3]的正交变换矩阵定义如下^[8]

$$\mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{n}_{km} = SJK_{im} \quad (1.1)$$

以及

* 徐次达推荐。

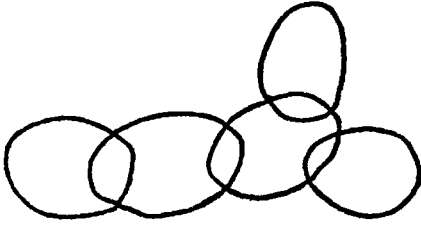


图 1

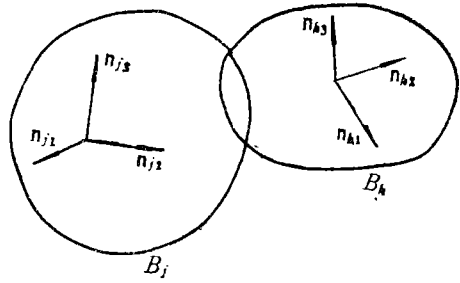


图 2

$$[SJK] = \begin{bmatrix} SJK_{11} & SJK_{12} & SJK_{13} \\ SJK_{21} & SJK_{22} & SJK_{23} \\ SJK_{31} & SJK_{32} & SJK_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

式中在 $[SJK]$ 中的 J, K 以及单位矢量中的第一个下脚标分别表示物体 B_j 和 B_k 。正交的单位矢量系 n_{ji} 和 n_{ki} ($i=1, 2, 3$)的相互关系为:

$$n_{ji} = SJK_{im} n_{km} \quad (1.3)$$

方程(1.3)可写成为矩阵形式

$$\{n_j\}^T = \{n_k\}^T [SJK]^T, \quad \{n_j\} = \begin{Bmatrix} n_{j1} \\ n_{j2} \\ n_{j3} \end{Bmatrix}, \quad \{n_k\} = \begin{Bmatrix} n_{k1} \\ n_{k2} \\ n_{k3} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

将式(1.4)两边乘以 $[SJK]$, 并利用 $[SJK]^T [SJK] = [E]$, $[E]$ 为单位矩阵, 我们有

$$\{n_k\}^T = \{n_j\}^T [SJK] \quad (1.5)$$

应该注意到在以下的分析中, 要经常用到式(1.5)。

$[SJK]$ 的导数在下面的分析中起着非常重要的作用, 因此, 我们需要较为详细地介绍。当分析 B_j 和 B_k 两物体的相对转动时, 我们假定物体 B_j 是不动的, 因而单位矢量系 n_{ji} 也是不动的 (即 $\dot{n}_{ji} = 0$)。因此, 根据方程(1.1), 我们有:

$$SJK_{im} = n_{ji} \cdot \dot{n}_{km} \quad (1.6)$$

注意到

$$\dot{n}_{km} = (\omega_k \times n_{km}) \quad (1.7)$$

上式中 ω_k 表示物体 B_k 相对于 B_j 的相对角速度。在以下的分析中, 我们仅考虑这样的体系, 在该体系中, $j=k-1$ 。将方程(1.7)代入到(1.6)便得到:

$$SJK_{im} = n_{ji} \cdot (\omega_k \times n_{km}) \quad (1.8)$$

上式中, ω_k 可表示为:

$$\omega_k = \omega_{k1} n_{k1} + \omega_{k2} n_{k2} + \omega_{k3} n_{k3} \quad (1.9)$$

n_{k1}, n_{k2} 和 n_{k3} 是固结于物体 B_k 中的三个互相垂直的单位矢量系(如图2所示)。将式(1.9)代入到式(1.8)后并写成为矩阵的形式。

$$[SJK] = [SJK][WJK] \quad (1.10)$$

或者

$$[WJK] = [SJK]^T [SJK] \quad (1.11)$$

以上式中

$$[WJK] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{k3} & \omega_{k2} \\ \omega_{k3} & 0 & -\omega_{k1} \\ -\omega_{k2} & \omega_{k1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

方程(1.10)与 Kane^[6]所给出的一致。

我们应该指出：采用欧拉参数连同相对角速度分量作为广义坐标导数可以避免几何上的奇异性。这意味着[SJK]必须用欧拉参数来表示^[6]。我们有：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{k1} &= 2[\dot{e}_1 e_4 + \dot{e}_2 e_3 - \dot{e}_3 e_2 - \dot{e}_4 e_1] \\ \omega_{k2} &= 2[\dot{e}_2 e_4 + \dot{e}_3 e_1 - \dot{e}_1 e_3 - \dot{e}_4 e_2] \\ \omega_{k3} &= 2[\dot{e}_3 e_4 + \dot{e}_1 e_2 - \dot{e}_2 e_1 - \dot{e}_4 e_3] \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

上式表示相对角速度可以用欧拉参数来表示。

二、角速度和角加速度

在图3中，相对角速度和相对于牛顿坐标系的角速度的关系可表示如下：

$$\Omega_2 = \Omega_1 + \omega_2 \quad (2.1)$$

上式中 Ω_k ($k=1, 2$) 表示物体 B_k 相对于牛顿坐标系的角速度，也就是绝对角速度。 ω_2 表示物体 B_2 相对于 B_1 的相对角速度。物体 B_1 相对于牛顿坐标系的角速度即绝对角速度 Ω_1 可用矩阵表示为：

$$\Omega_1 = [SO1] \{\Omega_1\}^T \{n_0\} \quad (2.2a)$$

上式中

$$\{n_0\} = \begin{Bmatrix} n_{01} \\ n_{02} \\ n_{03} \end{Bmatrix}, \quad \{\Omega_1\} = \begin{Bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{12} \\ \Omega_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.2b)$$

类似地，我们有

$$\Omega_2 = [[SO2] \{\Omega_2\}]^T \{n_0\} \quad (2.3a)$$

$$\omega_2 = [[SO2] \{\omega_2\}]^T \{n_0\} \quad (2.3b)$$

将式(2.2a)，(2.3a)和(2.3b)代入到式(2.1)，我们便得到相对角速度和相对于牛顿坐标系的角速度之间的关系式如下：

$$\{\Omega_2\} = [SO2]^T [SO1] \{\Omega_1\} + \{\omega_2\} \quad (2.4)$$

如果将以上式中的1和2分别换为 J 和 K ，则以上的关系式可以推广到具有 N 个物体的开链系统。现在将这一般关系式写出如下：

$$\{\Omega_k\} = [SOK]^T [SOJ] \{\Omega_j\} + \{\omega_k\} \quad (2.5)$$

上式中 ω_k 是物体 B_k 相对于 B_j ($j=k-1$) 的相对角速度。式(2.5)给出了相对角速度和在牛顿坐标系中角速度的关系。将式(2.5)对时间求导便得到：

$$\{\dot{\Omega}_k\} = \frac{d}{dt} [[SOK]^T [SOJ] \{\Omega_j\}] + \{\dot{\omega}_k\} \quad (2.6)$$

上式给出了相对角加速度和在牛顿坐标系中角加速度的关系式。在式(2.5)和(2.6)中，对 j 不采用求和约定。

质心的速度和加速度。现在我们来考虑图3中所示一对典型的相互联接的物体。为简单起见，令 $j=1, k=2$ 。首先我们暂时不考虑变形效应。在图3中，令 $\overrightarrow{OG_1}$ 表示物体 B_1 的质心

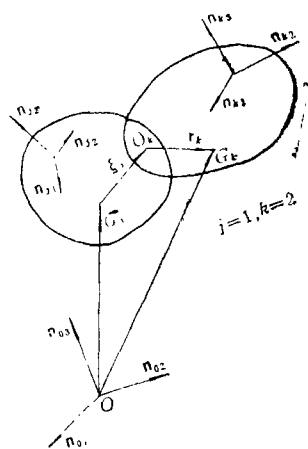


图 3

相对于牛顿坐标系的位置矢量, $\overrightarrow{OG_2}$ 表示物体 B_2 的质心相对于牛顿坐标系的位置矢量, 矢量 $\overrightarrow{OG_2}$ 可表示为:^[8]

$$\mathbf{P}_{G_2} = \mathbf{P}_{G_1} + \xi_1 + r_2 = q_i n_{0i} + \xi_{1m} n_{1m} + r_{2m} n_{2m} \quad (2.7)$$

将上式写成为矩阵形式如下:

$$\mathbf{P}_{G_2} = [\{q\}^T + \{\xi_1\}^T [SO1]^T + \{r_2\}^T [SO2]^T] \{n_0\} \quad (2.8)$$

有了基本关系式(2.8), 计算质心 G_2 的速度和加速度便没有什么困难. 注意 $\{\xi_1\}^T$ 和 $\{r_2\}^T$ 不是时间 t 的函数, 于是我们有

$$\dot{\mathbf{P}}_{G_2} = [\{\dot{q}\}^T + \{\xi_1\}^T [S\dot{O}1]^T + \{r_2\}^T [S\dot{O}2]^T] \{n_0\} \quad (2.9a)$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = [\{\ddot{q}\}^T + \{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2\}^T [S\ddot{O}2]^T] \{n_0\} \quad (2.9b)$$

以上两式也可以用另外一种方法来形成, 例如

$$\dot{\mathbf{P}}_{G_2} = \dot{\mathbf{P}}_{G_1} + \Omega_1 \times \xi_1 + \Omega_2 \times r_2 \quad (2.10a)$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} + \dot{\Omega}_1 \times \xi_1 + \Omega_1 \times (\Omega_1 \times \xi_1) + \dot{\Omega}_2 \times r_2 + \Omega_2 \times (\Omega_2 \times r_2) \quad (2.10b)$$

比较式(2.10)和(2.9)便得到以下的两个关系式

$$\Omega_1 \times \xi_1 = \{\xi_1\}^T [S\dot{O}1]^T \{n_0\} \quad (2.11)$$

$$\Omega_2 \times r_2 = \{r_2\}^T [S\dot{O}2]^T \{n_0\}$$

上式中

$$\Omega_2 = \Omega_1 + \omega_2$$

有了以上的基本关系式, 要得到考虑变形效应情况下的质心 G_2 的加速度并没有什么困难.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = & \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} + \dot{\Omega}_1 \times \xi_1 + \Omega_1 \times (\Omega_1 \times \xi_1) + \dot{\Omega}_2 \times r_2 + \Omega_2 \times (\Omega_2 \times r_2) \\ & + 2(\Omega_1 \times \dot{u}_{\xi_1}) + \ddot{u}_{\xi_1} + 2(\Omega_2 \times \dot{u}_{r_2}) + \ddot{u}_{r_2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

在建立表达式(2.12)时, 作为一级近似, 我们假定 $\xi_1 + u_{\xi_1} = \xi_1$, 以及 $r_2 + u_{r_2} = r_2$. 这是由于 u_{ξ_1} 与 ξ_1 相比, u_{ξ_1} 要比 ξ_1 小得多, 而 u_{r_2} 要比 r_2 小得多. 在表达式(2.12)中, $2(\Omega_1 \times \dot{u}_{\xi_1})$ 及 $2(\Omega_2 \times \dot{u}_{r_2})$ 表示哥氏加速度, \ddot{u}_{ξ_1} 和 \ddot{u}_{r_2} 表示相对加速度, 它们均是由于变形所引起的. 根据式(2.11)和式(1.4)不难求得

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = & [\{\ddot{q}\}^T + \{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2\}^T [S\ddot{O}2]^T + 2\{\dot{u}_{\xi_1}\}^T [S\dot{O}1]^T \\ & + 2\{\dot{u}_{r_2}\}^T [S\dot{O}2]^T + \{\ddot{u}_{\xi_1}\}^T [SO1]^T + \{\ddot{u}_{r_2}\}^T [SO2]^T] \{n_0\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式可以推广到系统由 N 个物体组成的情况. 当系统具有 N 个物体时, 上式便成为:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_{G_k} = & [\{\ddot{q}\}^T + \{\xi_j\}^T [S\ddot{O}J]^T + \{r_k\}^T [S\ddot{O}K]^T + 2\{\dot{u}_{\xi_j}\}^T [S\dot{O}J]^T \\ & + 2\{\dot{u}_{r_k}\}^T [S\dot{O}K]^T + \{\ddot{u}_{\xi_j}\}^T [SOJ]^T + \{\ddot{u}_{r_k}\}^T [SOK]^T] \{n_0\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

上式中, 我们已采用求和约定. 式中 $j = k-1, k=2, 3, \dots, N$. 根据链式规则, 我们有

$$[S\ddot{O}2] = [S\dot{O}1][S1\dot{2}] + 2[S\dot{O}1][S1\ddot{2}] + [SO1][S1\ddot{2}] \quad (2.15)$$

上式中 $[S\dot{O}1]$, $[S1\dot{2}]$ 和 $[S\dot{O}1][S1\dot{2}]$ 可用显式给出 (为节省篇幅将其省略). 只要将上式中的 1 和 2 换为 J 和 K , 我们便得到 $[S\dot{O}J]$, $[SJK]$ 以及 $[S\dot{O}J][SJK]$. 于是求得 $[S\ddot{O}K]$ 便没有什么困难.

三、动力方程

现在我们来考虑如何建立变形体系的动力方程. 我们将考虑一典型物体如图 4 所示^[11], 并讨论如何给出 Gibbs 函数. 为此, 我们选择 O 点为未变形体的质心而 C 点为变形体的质心 (如图 4 所示). 由图 4

$$\mathbf{R}_O = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_O \tag{a}$$

$$\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_{d_i} = \mathbf{r}_i + \mathbf{u} \tag{b}$$

$$\sum m_i \mathbf{r}_O + \sum m_i \mathbf{r}_{d_i} = \sum m_i \mathbf{r}_i + \sum m_i \mathbf{u} \tag{c}$$

$$\mathbf{r}_O = \frac{\sum m_i \mathbf{u}}{\sum m_i} \tag{d}$$

Gibbs 函数可以写成为如下的形式。

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \sum m_i \ddot{\mathbf{R}}_{d_i} \cdot \ddot{\mathbf{R}}_{d_i} = \frac{1}{2} \sum m_i [\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}}_{d_i}] \cdot [\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}}_{d_i}] \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \ddot{\mathbf{R}}_O \cdot \ddot{\mathbf{R}}_O + \frac{1}{2} \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_{d_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{d_i} \end{aligned} \tag{3.1}$$

将上式进行变分我们有

$$\delta G = \sum m_i \ddot{\mathbf{R}}_O \cdot \delta \ddot{\mathbf{R}}_O + \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_{d_i} \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_{d_i} \tag{e}$$

上式中

$$\delta \ddot{\mathbf{R}}_O = \delta \ddot{\mathbf{R}}_O + \frac{\sum m_i \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\sum m_i} \tag{f}$$

现在来考虑一对典型的变形体如图 5 所示。Gibbs 函数可表示为：

$$G = \frac{1}{2} M_k \ddot{\mathbf{P}}_{G_k} \cdot \ddot{\mathbf{P}}_{G_k} + \frac{1}{2} \sum_i m_{k_i} \ddot{\mathbf{p}}_{k_i} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k_i} \tag{3.1}'$$

在上式中，对于 k 采用求和约定，而 $k=1, 2$ 。上式中 M_k 表示物体 B_k 的总质量。 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_k}$ 为变形体 B_k 在牛顿坐标系的质心加速度。而 $\ddot{\mathbf{p}}_{k_i}$ 为变形体 B_k 中任一质点相对于质心 G_k 的相对加速度。在图 5 中， G_1' 和 G_2' 分别表示未变形体 B_1 和 B_2 的质心。令方程 (3.1) 由两部分所组成，即

$$G = G_1 + G_2$$

$$G_1 = \frac{1}{2} M_k \ddot{\mathbf{P}}_{G_k} \cdot \ddot{\mathbf{P}}_{G_k}, \quad G_2 = \frac{1}{2} \sum m_{k_i} \ddot{\mathbf{p}}_{k_i} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{k_i} \tag{3.1}''$$

Gibbs-Appell 方程为，

$$\delta G = \frac{\partial G_1}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_s} \delta \ddot{\mathbf{q}}_s + \frac{\partial G_2}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_s} \delta \ddot{\mathbf{q}}_s = Q_s \delta \ddot{\mathbf{q}}_s \tag{3.2a}$$

或者

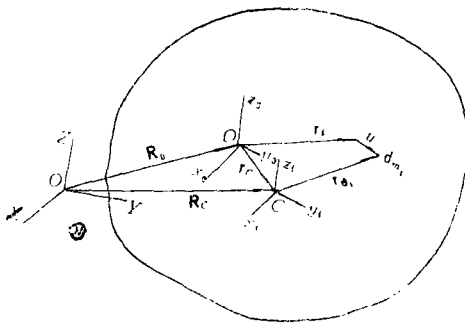


图 4

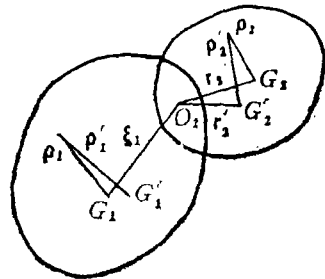


图 5

$$\left\{ \frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_s} \right\} + \left\{ \frac{\partial G_2}{\partial \dot{q}_s} \right\} = \{Q_s\} \quad (s=1, 2, 3, \dots, 15) \quad (3.2b)$$

在以下的分析中, 我们首先考虑 G_1 , 然后考虑 G_2 .

$$\delta G_1 = M_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} \cdot \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} + M_2 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \cdot \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \quad (3.3)$$

上式中仅考虑系统只有两物体 B_1 和 B_2 . 由方程(1)可见, $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 和 $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 由两部分组成, 将它们表示如下.

$$\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} = \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1'} + \frac{\sum m_1 \delta \ddot{u}_1}{\sum m_1}, \quad \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2'} + \frac{\sum m_2 \delta \ddot{u}_2}{\sum m_2} \quad (3.4)$$

上式中 $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1'}$ 和 $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2'}$ 表示物体 B_1 和 B_2 未变形时的质心加速度变分. $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 和 $\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 表示物体 B_1 和 B_2 变形时质心加速度变分. 现在我们分别将 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$, $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$, $\ddot{\mathbf{P}}_{G_1'}$ 和 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2'}$ 写出如下:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} &= \{\ddot{q}\}^T \{n_0\} = \{n_0\}^T \{\ddot{\mathbf{P}}_0\} & \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} &= \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1'} + \frac{\sum m_1 \delta \ddot{u}_1}{\sum m_1} \\ \ddot{\mathbf{P}}_{G_1'} &= \{\ddot{q}'\}^T \{n_0\} = \{n_0\}^T \{\ddot{\mathbf{P}}_{G_1'}\} & \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1'} &= \{\delta \ddot{q}'\}^T \{n_0\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} &= [\{\ddot{q}\}^T + \{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2\}^T [S\ddot{O}2]^T + 2\{\dot{u}_{\xi_1}\}^T [S\dot{O}1]^T \\ &\quad + 2\{\dot{u}_{r_2}\}^T [S\dot{O}2]^T + \{u_{\xi_1}\}^T [SO1]^T + \{u_{r_2}\}^T [SO2]^T] \{n_0\} \\ \ddot{\mathbf{P}}_{G_2'} &= [\{\ddot{q}'\}^T + \{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T + 2\{\dot{u}_{\xi_1}\}^T [S\dot{O}1]^T \\ &\quad + 2\{\dot{u}_{r_2'}\}^T [S\dot{O}2]^T + \{u_{\xi_1}\}^T [SO1]^T + \{u_{r_2'}\}^T [SO2]^T] \{n_0\} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

上式中 $\{r_2'\}$ 表示 G_2' (物体 B_2 未变形时的质心)相对于 O_2 的位置矢量, 而 $\{\dot{u}_{r_2'}\}$ 和 $\{u_{r_2'}\}$ 表示其相对速度和相对加速度. 现在仅考虑与刚体平动所相应的前三个广义坐标进行加速度变分. 于是

$$\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} = \{\delta \ddot{q}'\}^T \{n_0\} + \frac{\sum m_1 \delta \ddot{u}_1}{\sum m_1} \quad (g)$$

$$\delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \delta \ddot{\mathbf{P}}_{G_2'} + \frac{\sum m_2 \delta \ddot{u}_2}{\sum m_2} = \{\delta \ddot{q}'\}^T \{n_0\} + \frac{\sum m_1 \delta \ddot{u}_1}{\sum m_1} + \frac{\sum m_2 \delta \ddot{u}_2}{\sum m_2} \quad (h)$$

我们只考虑以上两式右端的第一项(刚体运动), 代入到(3.3)得:

$$M_1 \{\ddot{\mathbf{P}}_{G_1}\} + M_2 \{\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}\} = \{Q_s\} \quad (s=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

方程(3.7)中的广义力是这样形成的使得 $Q_s \delta q'_s$ 是给定力在虚位移上所作的功. 方程(3.7)是体系第一组动力方程.

现在来考虑下面有关广义坐标 q_{3+l} 和 q_{6+l} 的加速度变分

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{3+l} &= \dot{\omega}_{1l}, & \delta \ddot{q}_{3+l} &= \delta \dot{\omega}_{1l} \\ \ddot{q}_{6+l} &= \dot{\omega}_{2l}, & \delta \ddot{q}_{6+l} &= \delta \dot{\omega}_{2l} \end{aligned} \quad (l=1, 2, 3)$$

注意到 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 与 \ddot{q}_{3+l} 和 \ddot{q}_{6+l} 无关, 因此我们有:

$$\begin{aligned} \delta G_1 &= M_2 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{1l}} [\{\xi_1\}^T [S\dot{O}1]^T + \{r_2'\}^T [S\dot{O}2]^T] \delta \dot{\omega}_{1l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{2l}} [\{r_2'\}^T [S\dot{O}2]^T] \delta \dot{\omega}_{2l} \right] \{n_0\} \end{aligned} \quad (3.8a)$$

在 (3.8a) 中对 l 采用求和约定 ($l=1, 2, 3$)。当体系有 N 个物体, 我们有

$$\delta G_1 = M_k \ddot{\mathbf{P}}_{G_k} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{st}} [\{\xi_j\}^T [S\ddot{O}J]^T + \{r'_k\}^T [S\ddot{O}K]^T] \delta \dot{\omega}_{st} \{n_k\} \right] \quad (3.8b)$$

(3.8b) 中对 k, j, s, l 采用求和约定, $j=k-1$; $k=2, 3, \dots, N$; $s=1, 2, \dots, N$; $l=1, 2, 3$, 现在来考虑式(3.1)"中Gibbs函数的第二部分即 G_2 。

$$G_2 = \frac{1}{2} \sum_i m_{ki} \ddot{\mathbf{p}}_{ki} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i m_{1i} \ddot{\mathbf{p}}_{1i} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{1i} + \frac{1}{2} \sum_i m_{2i} \ddot{\mathbf{p}}_{2i} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{2i} \quad (3.9a)$$

根据方程(b), 我们有

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_{c1}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{c2}$$

上式 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 就是 (3.9a) 中的 \mathbf{p}_{1i} 和 \mathbf{p}_{2i} 。为书写方便, 从现在以及以后的讨论中均将 i 省略。 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 表示任一点相对于 G_1 和 G_2 (物体变形时质量中心) 的位置矢量。 \mathbf{p}'_1 和 \mathbf{p}'_2 表示同样质点相对于 G'_1 和 G'_2 (物体未变形时的质量中心) 的位置矢量。 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 表示由于变形效应所引起的位移。矢量 \mathbf{r}_{c1} 和 \mathbf{r}_{c2} 的模分别为 $|G'_1 G_1|$ 和 $|G'_2 G_2|$ 。

$$\delta G_2 = \sum m_1 \ddot{\mathbf{p}}_1 \cdot \delta \ddot{\mathbf{p}}_1 + \sum m_2 \ddot{\mathbf{p}}_2 \cdot \delta \ddot{\mathbf{p}}_2 \quad (3.9b)$$

注意到我们仅采用加速度变分, 于是

$$\delta \ddot{\mathbf{p}}_1 = \delta \dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \delta \ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (3.10a)$$

$$\delta \ddot{\mathbf{p}}_2 = \delta \dot{\dot{\Omega}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \delta \ddot{\mathbf{u}}_2 = (\delta \dot{\dot{\omega}}_2 + \delta \dot{\dot{\Omega}}_1) \times \mathbf{p}_2 + \delta \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad (3.10b)$$

以上的变分代入到式 (3.9b) 中可得:

$$\begin{aligned} \delta G_2 = & \sum m_1 [\dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \dot{\Omega}_1 \times (\dot{\Omega}_1 \times \mathbf{p}_1) + 2(\dot{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1) + \ddot{\mathbf{u}}_1] \cdot [\delta \dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \delta \ddot{\mathbf{u}}_1] \\ & + \sum m_2 [\dot{\dot{\Omega}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \dot{\Omega}_2 \times (\dot{\Omega}_2 \times \mathbf{p}_2) + 2(\dot{\Omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_2) + \ddot{\mathbf{u}}_2] \\ & \cdot [\delta \dot{\dot{\omega}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \delta \dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_2 + \delta \ddot{\mathbf{u}}_2] \end{aligned} \quad (3.11)$$

将 (3.11) 展开, 首先计算与变分 $(\delta \dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1)$ 相对应的项, 即

$$\begin{aligned} & \sum m_1 [\dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \dot{\Omega}_1 \times (\dot{\Omega}_1 \times \mathbf{p}_1) + 2(\dot{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1) + \ddot{\mathbf{u}}_1] \cdot (\delta \dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1) \\ & = \{\delta \dot{\dot{\Omega}}_1\}^T \{n_1\} \cdot \sum m_1 \mathbf{p}_1 \times [\dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \dot{\Omega}_1 \times (\dot{\Omega}_1 \times \mathbf{p}_1) + 2(\dot{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1) + \ddot{\mathbf{u}}_1] \end{aligned} \quad (3.12)$$

通过计算不难证明以下的关系式

$$\begin{aligned} & \sum m_1 \mathbf{p}_1 \times [\dot{\dot{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \dot{\Omega}_1 \times (\dot{\Omega}_1 \times \mathbf{p}_1) + 2(\dot{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1) + \ddot{\mathbf{u}}_1] = \{n_1\}^T \left[[I_1] \{ \dot{\dot{\Omega}}_1 \} \right. \\ & \quad \left. + [\tilde{\Omega}_1] [I_1] \{ \dot{\Omega}_1 \} + 2 \sum m_1 (\mathbf{p}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) [E] \{ \dot{\Omega}_1 \} \right. \\ & \quad \left. - \left(2 \sum m_1 \mathbf{p}_1 \cdot \dot{\Omega}_1 \right) [E] \{ \dot{\mathbf{u}}_1 \} + \sum m_1 [[\tilde{\rho}'_1] + [\tilde{\mathbf{u}}_1] - [\tilde{\mathbf{r}}_{c1}]] \{ \dot{\mathbf{u}}_1 \} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

上式中

$$[I_1] = [I_{10}] + [I_{11}] + [I_{12a}] + [I_{12b}]; \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_{c1} \text{ 以及} \\ \rho_{1l} n_{1l} = (\rho'_{1l} - u_{1l} - r_{c1l}) n_{1l} \quad (l=1, 2, 3)$$

$$I_{10} = \left[\begin{array}{ccc} \int (\rho'^2_{12} + \rho'^2_{13}) dm_1 & - \int \rho'_{11} \rho'_{12} dm_1 & - \int \rho'_{11} \rho'_{13} dm_1 \\ - \int \rho'_{11} \rho'_{12} dm_1 & \int (\rho'^2_{13} + \rho'^2_{11}) dm_1 & - \int \rho'_{12} \rho'_{13} dm_1 \\ - \int \rho'_{11} \rho'_{13} dm_1 & - \int \rho'_{12} \rho'_{13} dm_1 & \int (\rho'^2_{11} + \rho'^2_{12}) dm_1 \end{array} \right] \quad (i)$$

$$[I_{11}] = \begin{bmatrix} 2 \int (\rho'_{12} u_{12} + \rho'_{13} u_{13}) dm_1 & - \int (\rho'_{11} u_{12} + \rho'_{12} u_{11}) dm_1 & - \int (\rho'_{11} u_{13} + \rho'_{13} u_{11}) dm_1 \\ - \int (\rho'_{11} u_{12} + \rho'_{12} u_{11}) dm_1 & 2 \int (\rho'_{13} u_{13} + \rho'_{11} u_{11}) dm_1 & - \int (\rho'_{12} u_{13} + \rho'_{13} u_{12}) dm_1 \\ - \int (\rho'_{11} u_{13} + \rho'_{13} u_{11}) dm_1 & - \int (\rho'_{12} u_{13} + \rho'_{13} u_{12}) dm_1 & 2 \int (\rho'_{11} u_{11} + \rho'_{12} u_{12}) dm_1 \end{bmatrix} \quad (j)$$

$$[I_{12a}] = \begin{bmatrix} \int (u_{12}^2 + u_{13}^2) dm_1 & - \int u_{11} u_{12} dm_1 & - \int u_{11} u_{13} dm_1 \\ - \int u_{11} u_{12} dm_1 & \int (u_{13}^2 + u_{11}^2) dm_1 & - \int u_{12} u_{13} dm_1 \\ - \int u_{11} u_{13} dm_1 & - \int u_{12} u_{13} dm_1 & \int (u_{11}^2 + u_{12}^2) dm_1 \end{bmatrix} \quad (k)$$

$$[I_{12b}] = \begin{bmatrix} -M_1(r_{c12}^2 + r_{c13}^2) & M_1 r_{c11} r_{c12} & M_1 r_{c11} r_{c13} \\ M_1 r_{c11} r_{c12} & -M_1(r_{c13}^2 + r_{c11}^2) & M_1 r_{c12} r_{c13} \\ M_1 r_{c13} r_{c11} & M_1 r_{c13} r_{c12} & -M_1(r_{c11}^2 + r_{c12}^2) \end{bmatrix} \quad (l)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\Omega}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{13} & \Omega_{12} \\ \Omega_{13} & 0 & -\Omega_{11} \\ -\Omega_{12} & \Omega_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{u}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -u_{13} & u_{12} \\ u_{13} & 0 & -u_{11} \\ -u_{12} & u_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (m)$$

$$[\tilde{\rho}'_1] = \begin{bmatrix} 0 & -\rho'_{13} & \rho'_{12} \\ \rho'_{13} & 0 & -\rho'_{11} \\ -\rho'_{12} & \rho'_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{r}_{c1}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_{c13} & r_{c12} \\ r_{c13} & 0 & -r_{c11} \\ -r_{c12} & r_{c11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\Omega_1\} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{12} \\ \Omega_{13} \end{bmatrix}, \quad \{\dot{u}_1\} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{11} \\ \dot{u}_{12} \\ \dot{u}_{13} \end{bmatrix} \quad (n)$$

作为一级近似可以将二阶小量略去，于是 $[I_{12a}]$, $[I_{12b}]$ 以及其它二阶小量项均可略去，方程 (3.12) 便简化为：

$$\begin{aligned} & \sum m_1 [\dot{\Omega}_1 \times \rho + \Omega_1 \times (\Omega_1 \times \rho_1) + 2(\Omega_1 \times \dot{u}_1) + \dot{u}_1] \cdot (\delta \dot{\Omega}_1 \times \rho_1) \\ & = \{\delta \dot{\Omega}_1\}^T \left\{ [[I_{10}] + [I_{11}]] \{\dot{\Omega}_1\} + [\tilde{\Omega}_1] [[I_{10}] + [I_{11}]] \{\Omega_1\} \right. \\ & \quad \left. + 2 \int (\rho'_1 \dot{u}_1) dm_1 [E] \{\Omega_1\} - 2 \int (\rho'_1 \cdot \Omega_1) [E] \{\dot{u}_1\} dm_1 + \int [\tilde{\rho}'_1] \{\dot{u}_1\} dm_1 \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} & \sum m_2 [\dot{\Omega}_2 \times \rho_2 + \Omega_2 \times (\Omega_2 \times \rho_2) + 2(\Omega_2 \times \dot{u}_2) + \dot{u}_2] \cdot (\delta \dot{\Omega}_2 \times \rho_2) \\ & = \{\delta \dot{\Omega}_2\}^T \left\{ [[I_{20}] + [I_{21}]] \{\dot{\Omega}_2\} + [\tilde{\Omega}_2] [[I_{20}] + [I_{21}]] \{\Omega_2\} \right. \\ & \quad \left. + 2 \int (\rho'_2 \dot{u}_2) dm_2 [E] \{\Omega_2\} - 2 \int (\rho'_2 \cdot \Omega_2) [E] \{\dot{u}_2\} dm_2 + \int [\tilde{\rho}'_2] \{\dot{u}_2\} dm_2 \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

上式中

$$[I_{20}] = \begin{bmatrix} \int (\rho_{22}^2 + \rho_{23}^2) dm_2 & - \int \rho'_{22} \rho'_{21} dm_2 & - \int \rho'_{21} \rho'_{23} dm_2 \\ - \int \rho'_{22} \rho'_{21} dm_2 & \int (\rho_{23}^2 + \rho_{21}^2) dm_2 & - \int \rho'_{22} \rho'_{23} dm_2 \\ - \int \rho'_{23} \rho'_{21} dm_2 & - \int \rho'_{23} \rho'_{22} dm_2 & \int (\rho_{21}^2 + \rho_{22}^2) dm_2 \end{bmatrix}$$

上式表明以上所列的表达式(i)~(n)均可用于方程(3.15), 只要将第一个下脚标1换为2即可。下面我们来考虑方程(3.11)中与 $(\delta\dot{\Omega}_1 \times \rho_2)$ 相对应的项。为此需要再一次使用变换矩阵。经计算后得到:

$$\begin{aligned} & \sum m_2 [\dot{\Omega}_2 \times \rho_2 + \Omega_2 \times (\Omega_2 \times \rho_2) + 2(\Omega_2 \times \dot{u}_2) + u_2] \cdot (\delta\dot{\Omega}_1 \times \rho_2) \\ &= \{\delta\dot{\Omega}_1\}^T [S12] \left[\left[[I_{20}] + [I_{21}] \right] \{\dot{\Omega}_2\} + [\tilde{D}_2] \left[[I_{20}] + [I_{21}] \right] \{\Omega_2\} \right. \\ & \quad \left. + 2 \int (\rho_2' \cdot u_2) dm_2 [E] \{\Omega_2\} - 2 \int (\rho_2' \cdot \Omega_2) [E] \{\dot{u}_2\} dm_2 + \int [\tilde{\rho}_2'] \{\dot{u}_2\} dm_2 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

为了避免冗长的表达式, 引入以下的记号。

$$\begin{aligned} \text{令 } \{U_k\} &= \begin{Bmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \\ U_{k3} \end{Bmatrix} = \left[[I_{k0}] + [I_{k1}] \right] \{\dot{\Omega}_k\} + [\tilde{D}_k] \left[[I_{k0}] + [I_{k1}] \right] \{\Omega_k\} \\ & \quad + \int 2(\rho_k' \cdot \dot{u}_k) dm_k [E] \{\Omega_k\} - 2 \int (\rho_k' \cdot \Omega_k) [E] \{\dot{u}_k\} dm_k + \int [\tilde{\rho}_k'] \{\dot{u}_k\} dm_k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

将(3.14), (3.15)和(3.16)代入到式(3.11)并注意到式(3.17), δG_2 可表示为:

$$\begin{aligned} \delta G_2 &= \{\delta\dot{\omega}_1\}^T \{U_1\} + [S12] \{U_2\} + \{\delta\dot{\omega}_2\}^T \{U_2\} \\ & \quad + \sum m_1 \ddot{\rho}_1 \cdot \delta \dot{u}_1 + \sum m_2 \ddot{\rho}_2 \cdot \delta \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

应注意上式中 $\{\delta\dot{\omega}_1\}^T$ 和 $\{\delta\dot{\Omega}_1\}^T$ 是一样的, 它们都是物体 B_1 相对于牛顿坐标系的角速度。上式可推广到系统由 N 个物体组成的情况。

$$\delta G_2 = \{\delta\dot{\omega}_j\}^T \{[SJK]\{U_k\}\} + \sum m_n \ddot{\rho}_n \cdot \delta \dot{u}_n \quad (3.19)$$

上式中, 对于 j, k 和 n 采用求和约定。 $j=1, 2, \dots, N$, $k=1, 2, \dots, N$; 而且 $k \geq j$, $n=1, 2, \dots, N$ 。迄今, 我们已给出关于 δG 的一般表达式。请参阅方程(3.8b)和(3.18), 因此不难求得由 N 个物体所组成的体系的动力方程。为简单起见仅考虑体系由两个物体所组成的情况。其动力方程可用显式表示如下:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{11}} \left[\{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \\ M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{12}} \left[\{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \\ M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{13}} \left[\{\xi_1\}^T [S\ddot{O}1]^T + \{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \end{array} \right\} \\ & \quad + [S12] \left\{ \begin{array}{l} U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{21}} \left[\{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \\ M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{22}} \left[\{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \\ M_2 \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{23}} \left[\{r_2'\}^T [S\ddot{O}2]^T \right] \{\ddot{P}_{G_2}\} \right. \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{array} \right\} \quad (3.20b)$$

上式中 $\{U_k\}$ 的定义参见式(3.17)

方程组(3.20)表示相应于变分 $\delta\dot{\omega}_{1l}$ 和 $\delta\dot{\omega}_{2l}$ ($l=1,2,3$)的体系的动力方程。以上方程中的广义力 Q_{3+l} 和 Q_{6+l} ($l=1,2,3$)是这样形成的使得 $Q_{3+l}\delta q_{3+l}+Q_{6+l}\delta q_{6+l}$ 是给定力在虚位移上所作的功而且有 $\dot{q}_{3+l}=\dot{\omega}_{1l}$ 和 $\dot{q}_{6+l}=\dot{\omega}_{2l}$

以上的讨论中仅涉及到相应于刚体运动的加速度变分,关于变形效应尚未考虑。现在来考虑变形效应。今将该效应用以下的广义力及其相应的加速度变分来表示。

$$\delta G_{S'} - Q_{S'} \delta q_{S'} = 0 \quad (3.21)$$

在Gibbs方程(3.21)中,下脚标 S' 表示由于变形效应而引起的Gibbs函数和广义力。今将 $Q_{S'} \delta q_{S'}$ 表示如下:

$$Q_{S'} \delta q_{S'} = \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} dS - \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (3.22)$$

上式中 \mathbf{T} 为单位面积的表面力, σ_{ij} 和 e_{ij} 是应力张量和应变张量。在考虑变形效应时,我们采用了小变形的假设并假定材料服从虎克定律。经计算得:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV &= \int_S [-n_j \sigma_{ij} + T_i] \delta u_i dS \\ &+ \int_V [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u}] \cdot (\delta \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (3.23)$$

上式中,对 i 和 j 采用求和约定($i, j=1, 2, 3$)。应该指出,上式对于体系中任何物体均适用。如果体系由两物体 B_1 和 B_2 所组成,由式(g), (h)和(3.18)可见,在 δG_1 和 δG_2 中均包含有相应于变形效应的加速度变分 $\delta \ddot{\mathbf{u}}_1$ 和 $\delta \ddot{\mathbf{u}}_2$ 。今将它们写出如下,为避免混淆用下脚标 S' 来表示。

$$\delta G_{S'} = \delta G_{1S'} + \delta G_{2S'}$$

由式(g)和(h)我们有

$$\delta G_{1S'} = \int_{V_1} \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_1 dV_1 + \int_{V_1} \frac{M_2}{M_1} \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_1 dV_1 + \int_{V_2} \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_2 dV_2$$

由式(3.18),我们有:

$$\delta G_{2S'} = \int_{V_1} \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{p}}_1 \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_1 dV_1 + \int_{V_2} \bar{\rho}_2 \ddot{\mathbf{p}}_2 \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_2 dV_2$$

上式中, $\bar{\rho}_1$ 和 $\bar{\rho}_2$ 分别为物体 B_1 和 B_2 的密度。综合以上结果可得:

$$\int_{V_1} \left[\bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{p}}_1 + \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_1} + \frac{M_2}{M_1} \bar{\rho}_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} - [\mu \nabla^2 \mathbf{u}_1 + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u}_1] \right] \cdot \delta \ddot{\mathbf{u}}_1 dV_1 = 0 \quad (3.24a)$$

$$\int_{S_1} [(n_{1j} \sigma_{1ij} - T_{1i}) \delta u_{1i}] dS_1 = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.24b)$$

上式中 λ 和 μ 是拉梅常数。应注意上式中 \mathbf{p}_1 , $\ddot{\mathbf{p}}_1$, \mathbf{u}_1 和 $\ddot{\mathbf{u}}_1$ 是用转动坐标系(\mathbf{n}_{11} , \mathbf{n}_{12} , \mathbf{n}_{13})来描述的,而 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 和 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 是用牛顿坐标系(\mathbf{n}_{01} , \mathbf{n}_{02} , \mathbf{n}_{03})来描述的。在(3.24a)中, $\ddot{\mathbf{p}}_1$ 是由以下公式表示

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{p}_1) + 2(\boldsymbol{\Omega}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1) + \ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (3.25)$$

我们应该指出,在(3.24a)中, $\ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 和 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 应该变换到转动坐标系,

$$\ddot{\mathbf{P}}_{G_1} = \frac{d^2}{dt^2} [\{\mathbf{n}_1\}^T [SO1]^T \{P_{G_1}\}], \quad \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \frac{d^2}{dt^2} [\{\mathbf{n}_1\}^T [SO1]^T \{P_{G_2}\}]$$

类似地,物体 B_2 的动力方程可写为

$$\int_{V_2} [\bar{\rho}_2 \ddot{\mathbf{p}}_2 + \bar{\rho}_2 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} - [\mu \nabla^2 \mathbf{u}_2 + (\mu + \lambda) \text{grad div} \mathbf{u}_2]] \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}_2 dV_2 = 0 \quad (3.26a)$$

$$\int_{S_2} [(n_{2j} \sigma_{2ij} - T_{2ij}) \delta u_{2i}] dS_2 = 0 \quad (3.26b)$$

$$\text{上式中 } \ddot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{p}_2) + 2(\boldsymbol{\Omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_2) + \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad (3.26c)$$

在(3.26a)中, $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 也应该转换到转动坐标系(\mathbf{n}_{21} , \mathbf{n}_{22} , \mathbf{n}_{23})。这就是说:

$$\ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \{\mathbf{n}_2\}^T [SO_2]^T \{P_{G_2}\}$$

以及

$$\ddot{\mathbf{P}}_{G_2} = \frac{d^2}{dt^2} [\{\mathbf{n}_2\}^T [SO_2]^T \{P_{G_2}\}]$$

方程组(3.24)和(3.26)是体系的第三组动力方程。其中 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_{c1}$ 和 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_{c2}$ 。作为一级近似可将 \mathbf{r}_{c1} 和 \mathbf{r}_{c2} 略去不计。

现在我们来考虑体系的最后一组动力方程。在 $\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}$ 的变分中还包含有 $\delta \dot{\mathbf{u}}_{\xi_1}$ 和 $\delta \dot{\mathbf{u}}_{r_2'}$, 而这些尚未讨论过。现在将它们写出如下:

$$\delta G_F = M_2 \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} \cdot [\{\delta \dot{\mathbf{u}}_{\xi_1}\}^T [SO_1]^T + \{\delta \dot{\mathbf{u}}_{r_2'}\}^T [SO_2]^T] \{\mathbf{n}_0\}$$

上式中 F 表示相应于 $\delta \dot{\mathbf{u}}_{\xi_1}$ 和 $\delta \dot{\mathbf{u}}_{r_2'}$ 的 Gibbs 函数的变分。根据 Gibbs-Appell 方程, 我们有:

$$M_2 [SO_1]^T \{\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}\} = \{Q_{0+i}\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.27a)$$

$$M_2 [SO_2]^T \{\ddot{\mathbf{P}}_{G_2}\} = \{Q_{12+i}\} \quad (3.27b)$$

上式中的广义力 Q_{0+i} 和 Q_{12+i} 是这样形成的使得 $Q_{0+i} \delta q_{0+i} + Q_{12+i} \delta q_{12+i}$ 是给定力在虚位移上所作的功, 而且有 $\dot{q}_{0+i} = \dot{u}_{\xi_1 i}$ 和 $\dot{q}_{12+i} = \dot{u}_{r_2' i}$ 。最后, 我们必须指出, 在以上所有式中 $\boldsymbol{\Omega}_{2i}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{2i}$ 应该用 $\boldsymbol{\Omega}_{1i}$, $\boldsymbol{\omega}_{2i}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{1i}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{2i}$ 来代替, 而这种关系式已在式(2.5)和(2.6)中给出。

四、讨 论

(1) 运用 Gibbs-Appell 方程, 我们建立了四组动力方程。第一和第二两组相应于刚体运动(参见方程(3.7)和(3.20))。第三和第四两组是相应于由变形效应所引起的运动(参见方程(3.25), (3.26)和(3.27))。这些方程具有显式表达式且物理意义清楚。此外, 采用 Gibbs-Appell 方程可以直接建立多变形体体系考虑变形效应时的动力方程。由此可见, 采用 Gibbs-Appell 方程对于多变形体体系也具有明显的优越性。

(2) 由以上分析可见, 物体 B_1 除了承受 $M_1 \ddot{\mathbf{P}}_{G_1}$ 以外, 还承受更多的惯性效应, 例如 $(\frac{M_2}{M_1} \ddot{\mathbf{P}}_{G_2} + \dots + \frac{M_k}{M_1} \ddot{\mathbf{P}}_{G_k})$, 这是由于耦连所引起的。这已为采用 Gibbs-Appell 方程所建立的动力方程所证实。其次根据方程(3.19)可见, 第一个物体的转动亦受其它物体的耦连影响。也就是 $\{\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_1\} [[S11]\{U_1\} + [S12]\{U_2\} + \dots + [S1K]\{U_k\}]$ 。这两个现象不仅在理论上而且在实用上均有意义。

(3) 当考虑到变形效应时, 原始方程是非线性的。但是我们略去二阶项时便将问题线性化。除了上述假定以外, 我们还采用了小变形假设。此外还略去 \mathbf{p}_k 中的 \mathbf{r}_{ck} , 以及与 \mathbf{r}_{ck} 有关的其它方面的贡献。这样一来便使得问题基本上是线性的。不过由于转动效应, 在基本方程中仍存在耦连现象。

(4) 如果不是小变形则上述假定便不能采用。在演引第二组动力方程时, 非线性项应加以保留。当建立与变形有关的动力方程时, 应采用另外的方法^[19]。该方法是将 Gibbs-Appell 方程应用到有限变形的情况。

本文是在美国 Notre Dame 大学访问期间(1984—1985)完成的。曾得到 L.H.N. Lee

教授的指导、各方面的关心和帮助，作者在这里谨致以深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] Kane, T. R., Dynamics of nonholonomic systems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **28** (1961), 574—578.
- [2] Kane, T. R., *Dynamics*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1968).
- [3] Huston, R. L. and C. E. Passerello, On Lagrange's form of d'Alembert's principle, *The Matrix and Tensor Quarterly*, **23** (1973), 109—112.
- [4] Egarmin, N. A., Effect of elastic deformation of the inertia tensor of a rigid body, *Mekhanika Tverdogo Tela*, **15**, 6 (1980), 43—48.
- [5] Denisov, G. G. and V. V. Novikov, Free motions of a quasi-spherical deformable rigid body, *Mekhanika Tverdogo Tela*, **18**, 3 (1983), 43—50.
- [6] Kane, T. R., et al., *Spacecraft Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, New York (1983).
- [7] Huston, R. L., Multi-body dynamics including the effects of flexibility and compliance, *Computers and Structures*, **14**, 5—6 (1981), 443—451.
- [8] Huston, R. L., et al., Dynamics of multirigid-body systems, *Journal of Applied Mechanics*, **45** (1978), 889—894.
- [9] Kane, T. R. and C. F. Wang, On the derivation of equations of motion, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **13** (1965), 487—492.
- [10] Beggs, J. S., *Kinematics*, Hemisphere Publishing Corporation (1983).
- [11] Lips, K. W. and V. J. Modi, Transient attitude dynamics of satellites with deploying flexible appendages, *Acta Astronautica*, **5**, 10 (1978), 797—817.
- [12] Lee, L. H. N. and Ni, Chi-Mou, A minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation, *Archives of Mechanics*, **25**, 3 (1973), 457—468.

Dynamics of Multi-Deformable Bodies

Hong Shan-tao

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The Gibbs-Appell equations provide what is the powerful tool to formulate equations of motion not only for rigidbody, but also for deformable body. The application of the Gibbs-Appell equations in formulating equations of motion of multi-deformable bodies is developed and exploited in this paper. The advantages of using Gibbs-Appell equation are shown herein. Equations of motion of multi-deformable bodies with explicit form have been obtained and their physical meaning is apparent. In addition, recently developed new ideas are also employed. These ideas include the use of Euler parameters, quasi-coordinates, and relative coordinates.