 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2004)08_0847_08

奇异扰动的 p_Laplace 方程非负非平凡解和正解的结构*

张正策, 李开泰

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 精确地刻画了某些奇异扰动的 p_Laplace 方程非负非平凡解和正解的结构. 利用上下解方法证明,方程存在很多非负非平凡的尖峰解和正的过渡尖峰解. 当参数充分小时还对每个尖峰解支集的上下界进行了估计.

关 键 词: p_Laplace 方程; 非负非平凡解; 正解; 尖峰解; 上下解
中图分类号: O175.25 文献标识码: A

引 言

我们研究下面奇异扰动的 p_Laplace 方程

$$\begin{cases} -\epsilon\Delta_p u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega, \\ u \geqslant 0, \quad x \in \Omega; \quad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$

其中 $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, $p > 1$, div 和 D 分别表示散度和梯度, $\Omega \subset R^N (N \geqslant 1)$ 是有界光滑区域, $\epsilon > 0$ 是小参数.

方程(S)是研究非牛顿流体的数学模型,参数 p 表示介质的特性. 当 $p > 2$ 时,表示扩张流;当 $p < 2$ 时,表示拟塑性流. 若 $p = 2$, 则表示牛顿流(见[1,2]及其文献索引). 另外,方程(S)在气体通过多孔媒质的扩散及化学活性混合气体的自燃理论等许多方面也有广泛的应用(见[3]及其文献索引).

令 $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega) \cap C_0^1(\Omega)$ 在弱意义下满足(S),若在 Ω 上, $u_\epsilon \geqslant 0$, $u_\epsilon \not\equiv 0$, 则称 u_ϵ 是一个非负非平凡解;若在 Ω 上, $u_\epsilon > 0$, 则称 u_ϵ 是一个正解.

方程(S)及其半线性问题($p = 2$)已经有很多学者在进行研究(见[4~8]及其文献索引). 在文[4]中, Guo 和 Webb 证明了(S)正尖峰解的存在性,此时, $f \in C^{1+\sigma}(R)$ $(0 < \sigma < 1)$ 满足以下条件:

(f_1) $f(0) = 0$, 和 $\lim_{s\to 0^+} f(s)/s^{p-1} = -m < 0$;

---

* 收稿日期: 2002_11_05; 修订日期: 2004_03_08
基金项目: 国家重点基础研究专项基金资助项目(1999032801); 国家自然科学基金资助项目(10371095)
作者简介: 张正策(1976—),男,河南邓州人,讲师,博士,主要从事偏微分方程理论研究(联系人. Tel: +86_29_82671775; E_mail: zhangzc@mail.xjtu.edu.cn).

(f_2) f 只有两个正零点z_1和 z_2, 满足: $z_1 < z_2$, 并且存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $s \in (z_2 - \delta, z_2)$ 时, $f'(s) < 0$; 当 $s \in (0, z_2)$ 时, 有$f(s) \leqslant M(z_2 - s)^{p-1}$;

(f_3) $\int_0^{z_2} f(s)\,ds > 0$•

在[6, 8]中, 当$f(s) = (s - z_1)(s - z_2)(z_3 - s)$, $0 < z_1 < z_2 < z_3$和$\int_{z_1}^{z_3} f(s)\,ds > 0$时, Dancer 和 Wei 证明了(S)半线性问题正的过渡尖峰解的存在性•

我们将着重讨论当$f \in C^1(0, \infty) \cap C([0, \infty))$满足条件($f_1'$)、($f_2$)和($f_3$)时, 方程(S)非负非平凡解的结构, 其中($f_1'$)如下:

(f_1') $f(0) = 0$, $\lim_{s \to 0^+} f(s)/s^{\omega} = -m_1$, $\lim_{s \to 0^+} f'(s)/s^{\omega - 1} = -m_2$, $m_1, m_2 > 0$是常数, $0 < \omega < p - 1$•

同时, 我们也考虑f 变号时(S)正解的结构, $f(0) = f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$, $0 < a_1 < a_2 < a_3$• 即$f \in C^1((0, \infty) \setminus \{a_1\}) \cap C([0, \infty))$满足以下条件:

(F_1) $\lim_{s \to 0^+} f(s)/s^{p-1} > 0$, $\lim_{s \to 0^+} f'(s) \geqslant 0$, 存在 $s_0 > 0$ 使得$f'(s) \geqslant 0$, $s \in (0, s_0]$; 并且$f(s) > 0$, $s \in (0, a_1) \cup (a_2, a_3)$; $f(s) < 0$, $s \in (a_1, a_2) \cup (a_3, \infty)$;

(F_2) $\int_{a_1}^{a_3} f(s)\,ds > 0$;

(F_3) 存在 $\delta > 0$ 和 $0 < \omega < p - 1$, 使得$f'(s) < 0$, $s \in (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \setminus \{a_1\}$, 并有

$$\lim_{s \to a_1} \frac{f(s)}{|s - a_1|^{\omega - 1}(s - a_1)} = -C_1, \quad \lim_{s \to a_1} \frac{f'(s)}{|s - a_1|^{\omega - 1}} = -C_2 •$$

$C_1, C_2 > 0$为常数, $f'(a_3)$存在且为负数•

显然, 由(F_1) ~ (F_3)定义的非线性项要比[6, 8]中复杂• 由[9, 定理5](或见[10])可知, 当且仅当f 满足

$$-f(s) \leqslant \beta(s), \qquad s \text{ 在 } 0 \text{ 点附近} \tag{T}$$

时, 强极大值原理成立, 其中 $\beta \in A_p$ 以及

$$A_p = \left\{ \beta \in C(R_0^+);\ \beta(0) = 0, \beta \text{ 单调非减, 并且对任意 } t > 0, \right.$$
$$\left. \text{有} \int_0^t (s\beta(s))^{-1/p}\,ds = +\infty \right\} •$$

换句话说, 若f 不满足(T), 则流体流动和化学反应中的“死核”现象就会发生, 即, $G_\epsilon = \{x \in \Omega: u_\epsilon(x) = 0\} \neq \varnothing$(见[9]), 其中 u_ϵ 是(S)的任意非负非平凡解• 当$f(s) = s^{p-1}|\lg s|^p(s - a)(1 - s)$(其中$0 < a < 1/4$)时, 我们不难验证$f$ 就满足(T)• 但当f 满足(f_1')时, 则f 不满足(T)• 由[11]可知, $p = 2$以及f 在$[0, \infty)$上是局部Lipschitz连续时, 方程(S)任意的非负非平凡解在 B 上都是径向对称的; 本文的结论表明, 如果$f(s)$仅在 $s = 0$ 是Hölder连续的, 则不会有上面的结果•

1 $N \geqslant 2$ 的情形

我们首先研究球$B(N \geqslant 2)$上方程(S)非负非平凡解的结构• 因为由高维很容易推出一维的情形, 故此处不再讨论$N = 1$• 为了证明我们的结论, 首先引入下面的引理 1.1• 通过被称作 Continuous Steiner Symmetrization (CStS)的新重排技巧, Brock 证明了这个引理(详见[12, 13])•

引理 1.1([13, 定理 1]) 若 $N \geqslant 1$, $f \in C([0,\infty))$, $u \in W_0^{1,p}(B) \cap C^1(B)$ 是方程(S)的非负非平凡解, $\Omega = B$ 是一个球, 假设存在一个 $S > 0$ 和一个函数 $\beta \in A_p$, 满足: $f(S) = 0$, 并且使得下式成立

$$f(s) \leqslant \beta(S - s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{1}$$

则

$$\operatorname{supp} u = \overline{\bigcup_{k=1}^{m} B_{R_k}(z_k)}, \tag{2}$$

其中 A_p 如上定义, $z_k \in R^N$, $R_k > 0$, u 在 $B_{R_k}(z_k)$ 上关于球心 z_k 径向对称, 即对任意 $x \in B_{R_k}(z_k) \setminus \{z_k\}$, 有

$$u = u(\rho), \ (\rho = |x - z_k|) \quad 和 \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \rho} < 0. \tag{3}$$

在(2)式中, $k = 1, 2, \cdots, m$, 并且 $m = \infty$ 是可能的.

注意到 f 满足(f_1')、(f_2)和(f_3), 我们可选取 $\beta = Ms^{p-1} \in A_p$ ($M > 0$ 充分大) 和 $S = z_2$ (或 z_1), 使得 $f(s) \leqslant \beta(z_2 - s)$ (或 $\beta(z_1 - s)$), $0 \leqslant s \leqslant z_2$ (或 $0 \leqslant s \leqslant z_1$); 而且存在 $M > 0$, 使得 $\forall s \geqslant 0$, 有 $f(s) + Ms^{\omega} \geqslant 0$. 但是当 $0 < \omega < p - 1$ 时, $Ms^{\omega} \notin A_p$, 此时不存在 $\beta \in A_p$, 使得 $\forall s \geqslant 0$, 有 $f(s) + \beta \geqslant 0$.

定理 1.2 若 f 满足(f_1')、(f_2)和(f_3), 则对充分小的 $\epsilon > 0$, (S)在 B 上的任意非负非平凡解 u_ϵ 满足:

$$\mu < \max_B u_\epsilon < z_2, \tag{4}$$

和

$$\operatorname{supp} u_\epsilon = \overline{\bigcup_{k=1}^{m(\epsilon)} B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})}, \tag{5}$$

其中 $\int_0^{\mu} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$, $m(\epsilon) < \infty$, $\lim_{\epsilon \to 0} m(\epsilon) = \infty$, $B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})$ 是中心在 $z_{\epsilon,k}$, 半径为 $R_{\epsilon,k}$ 的球. $\forall k = 1, 2, \cdots, m(\epsilon)$, 有

$$C_1 \leqslant \epsilon^{-1/p} R_{\epsilon,k} \leqslant C_2, \tag{6}$$

其中 $0 < C_1 \leqslant C_2 < \infty$ 是与 ϵ 和 k 无关的常数. 而且 $\forall x \in B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k}) \setminus \{z_{\epsilon,k}\}$, 有 $\mu < \max_{B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})} u_\epsilon < z_2$, $k = 1, 2, \cdots, m(\epsilon)$,

$$u_\epsilon = u_\epsilon(\rho), \ (\rho = |x - z_{\epsilon,k}|) \quad 和 \quad \frac{\partial u_\epsilon(x)}{\partial \rho} < 0. \tag{7}$$

证明 通过求方程(S)相应泛函的极小值问题可知, (S)至少存在一个非负非平凡解 $u_\epsilon \in W^{1,p}(B) \cap C_0^1(B)$, 且 $\max u_\epsilon < z_2$ ([4, 定理 B]或[14]).

由引理 1.1 和[9, 定理 5]知, u_ϵ 满足(2)式. 而且, 有

$$在\ \partial B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})\ 上, \quad u_\epsilon = 0 \ 并且\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \rho} = 0.$$

令

$$I_\epsilon(u_\epsilon(r)) = \frac{\epsilon}{p}|u_\epsilon'(r)|^p + F(u_\epsilon(r)),$$

易知在 $r \in (0, R_{\epsilon,k})$ 上, $\forall k = 1, 2, \cdots, m(\epsilon)$ (若 $m(\epsilon) = \infty$, $k = 1, 2, \cdots$), 有 $[I_\epsilon(u_\epsilon(r))]' < 0$. 由此可得

$$I_\epsilon(u_\epsilon(r)) > 0, \quad r \in (0, R_{\epsilon,k}) \ 并且\ F(u_\epsilon(0)) > 0,$$

因此, $\mu < \max_{B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})} u_\epsilon < z_2$•

我们证明(6)式• 反证• 假设存在序列$\left\{(\epsilon_n, k_n)\right\}$, 当 $n \to \infty$时, $\epsilon_n \to 0$, 使得对所有充分大的n, (6) 式不成立, 则对每个ϵ_n我们可以把(2) 式中的紧集重新排列, 使得对所有n, 都有$k_n = 1$• 令$R_{\epsilon_n,1} \equiv R_n$, $u_{\epsilon_n} \equiv u_n$• 则与[15, 定理3.1] 中的讨论类似, 我们可以证明以下两种情况都不会出现: (必要时可选取子序列) (i) $\epsilon_n^{1/p} R_n \to 0$, $n \to \infty$; (ii) $\epsilon_n^{1/p} R_n \to \infty$, $n \to \infty$• 从而(6) 成立且蕴涵着$\forall \epsilon > 0$, 有$m(\epsilon) < \infty$, 并且$\lim_{\epsilon \to 0} m(\epsilon) = \infty$• 因此, ϵ充分小时, 方程(S) 有很多非负非平凡的解•

注1.1 如果我们称

$$u_\epsilon^k(x) = \begin{cases} u_\epsilon(x), & x \in B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k}), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

是u_ϵ的一个尖峰, 易知$\forall k \in \left\{1, 2, \dots, m(\epsilon)\right\}$, u_ϵ^k是方程(S) 的一个非负非平凡解, $\forall j, k \in \left\{1, 2, \dots, m(\epsilon)\right\}$, $j \neq k$, 则$u_\epsilon^k + u_\epsilon^j$也是方程(S) 的一个非负非平凡解• 由此可得, 方程(S) 至少有$2^{m(\epsilon)} - 1$个非负非平凡解•

2 非负非平凡解的结构

我们考虑Ω是有界光滑区域的情形• 首先, 我们引入一个上下解的比较定理•

引理2.1 令$N \geqslant 1$, $\Omega \subset R^N$是有界光滑区域(当$N = 1$时, Ω是R中的开区间), f 满足(f_1') 和(f_2)• 如果$u_i \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ ($i = 1, 2$), 在Ω上$u_i \geqslant 0$, 以及u_1(或u_2) 分别是方程(S) 的一个下解(或上解), 并且在Ω上, $u_1 \leqslant u_2$• 则方程(S) 在"区间"

$$[u_1, u_2] = \left\{ u \in C(\Omega): \text{在 } \Omega \text{ 上}, u_1(x) \leqslant u(x) \leqslant u_2(x) \right\}$$

上存在一个极小(和一个极大) 的解$\underline{u}$ (和$\overline{u}$), 并且方程(S) 的任意解$u \in [u_1, u_2]$满足: 在Ω上, $\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(x)$•

证明 由于f 满足(f_1'), 则存在充分大的$M > 0$, 使得$f(s) + Ms^\omega$在$(0, z_2)$上是单调非减的• 于是, 与[16, 定理2.4] 的证明类似, 可以证明引理2.1, 此处不再叙述•

定理2.2 若f 满足(f_1')、(f_2)和(f_3), 则对充分小的$\epsilon > 0$, 方程(S) 的任意非负非平凡解u_ϵ满足:

$$\operatorname{supp} u_\epsilon = \overline{\bigcup_{k=1}^{q(\epsilon)} F_{\epsilon,k}},$$

其中$q(\epsilon) < \infty$, $\lim_{\epsilon \to 0^+} q(\epsilon) = \infty$, $F_{\epsilon,k} \subset \Omega$• 并且存在与$\epsilon$和$k$无关的常数$0 < C_3 \leqslant C_4 < \infty$, 使得$\forall k = 1, 2, \dots, q(\epsilon)$, 有

$$C_3 \leqslant \epsilon^{-1/p} d_{F_{\epsilon,k}} \leqslant C_4, \tag{8}$$

其中$d_{F_{\epsilon,k}} = \operatorname{diam} F_{\epsilon,k}$, 而且,

$$\mu < \max_{F_{\epsilon,k}} u_\epsilon < z_2• \tag{9}$$

证明 与定理1.2类似, 令u_ϵ是(S) 的一个非负非平凡解• 选取一个大球$B \subset R^N$, 使得$\Omega \subset B$• 我们定义在$B \setminus \Omega$上, $u_\epsilon \equiv 0$, 则有$u_\epsilon \in W^{1,p}(B) \cap C_0^1(\overline{B})$• 另一方面, 由引理2.1知, 方程(S) 在$B$上存在一个非负非平凡解$v_\epsilon$满足: 在$B$上, $v_\epsilon \geqslant u_\epsilon$, 并且$\max_B v_\epsilon < z_2$• 注意到$u_\epsilon$和$z_2$分别是方程(S) 在$B$上的一个下解和上解• 由定理1.2, 得

$$\operatorname{supp} v_\epsilon = \overline{\bigcup_{k=1}^{m(\epsilon)} B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k})}, \tag{10}$$

其中 $m(\epsilon) < \infty$, $\lim_{\epsilon\to 0^+} m(\epsilon) = \infty$, $B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k}) \subset B$ 中心在$z_{\epsilon,k}$, 半径为 $R_{\epsilon,k}$ 的球. 而且对充分小的 ϵ和所有$k = 1, 2, \cdots, m(\epsilon)$, 有

$$C_1 \leqslant \epsilon^{-1/p} R_{\epsilon,k} \leqslant C_2, \tag{11}$$

这里 $0 < C_1 \leqslant C_2 < \infty$ 是与 ϵ 和 k 无关的常数. 由于在 Ω 上 $0 \leqslant u_\epsilon \leqslant v_\epsilon$, 则有

$$\operatorname{supp} u_\epsilon \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{m(\epsilon)} (B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k}) \cap \Omega)}, \tag{12}$$

从而存在 $1 \leqslant q(\epsilon) \leqslant m(\epsilon)$ 和 $F_{\epsilon,k} \subset B_{R_{\epsilon,k}}(z_{\epsilon,k}) \cap \Omega$, 使得

$$\operatorname{supp} u_\epsilon = \overline{\bigcup_{k=1}^{q(\epsilon)} F_{\epsilon,k}}. \tag{13}$$

由(11)式, 易得对充分小的 ϵ 和 $\forall k = 1, 2, \cdots, q(\epsilon)$, 有

$$\epsilon^{1/p} \mathrm{d}_{F_{\epsilon,k}} \leqslant C_2.$$

现在我们假设(8)左边的不等式不成立, 则可选取最大的球 $B^*_{\epsilon,k} \subset F_{\epsilon,k}$, 使得至少存在一个点 $x_{\epsilon,k} \in \partial B^*_{\epsilon,k}$ 满足 $u_\epsilon(x_{\epsilon,k}) = 0$, 并且存在一个序列$\left\{(\epsilon_n, k_n)\right\}$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $\epsilon_n \to 0$ 和 $\epsilon_n^{-1/p} \mathrm{d}_{B^*_{\epsilon_n,k_n}} \to 0$. 我们可以对(13)式中的集合 $F_{\epsilon,k}$ 重新排列, 使得对所有 n, 有 $k_n = 1$. 我们考虑下面方程

$$-\epsilon_n \operatorname{div}(|Dw_n|^{p-2} Dw_n) = f(w_n), \quad 在\ B^*_{\epsilon_n,1}\ 上; \quad w_n = 0, \quad 在\ \partial B^*_{\epsilon_n,1}\ 上. \tag{14}$$

由定理1.2及注1.1知, 方程(14)存在一个非负非平凡解 w_n, 使得 $\forall x \in B_{R_{n,k}}(z_{n,k}) \setminus \left\{z_{n,k}\right\}$和所有$k = 1, 2, \cdots, m_n$, 都有

$$\operatorname{supp} w_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{m_n} B_{R_{n,k}}(z_{n,k})} \subset \overline{B^*_{\epsilon_n,1}}$$

和

$$w_n = w_n(\rho), \ (\rho = |x - z_{n,k}|) \quad 和 \quad \frac{\partial w_n}{\partial \rho} < 0 \tag{15}$$

成立.

由于当 $n \to \infty$时, $\epsilon_n^{1/p} \mathrm{d}_{B^*_{\epsilon_n,1}} \to 0$, 对所有的 k 我们得

$$\epsilon_n^{1/p} R_{n,k} \to 0, \qquad 当\ n \to \infty. \tag{16}$$

与定理1.2的证明相同, $\forall k$, 有

$$\max_{B_{R_{n,k}}(z_{n,k})} w_n > \mu, \tag{17}$$

于是, 通过类似于定理1.2中情况(i)的证明很容易导出矛盾, (8)式得证.

下面证明(9), 为此考虑方程

$$-\epsilon \operatorname{div}(|Dw|^{p-2} Dw) = f(w), \quad 在\ B^*_{\epsilon,k}\ 上; \quad w = 0, \quad 在\ \partial B^*_{\epsilon,k}\ 上. \tag{18}$$

显然 u_ϵ 和0分别是(18)的一个上解和一个下解. 由引理2.1, 方程(18)至少存在一个非负非平凡解 $w_{\epsilon,k}$, 并在 $B^*_{\epsilon,k}$ 上满足: $0 \leqslant w_{\epsilon,k} \leqslant u_\epsilon$. 由定理1.2, $\mu < \max w_{\epsilon,k} < z_2$; 因此, $\mu < \max_{F_{\epsilon,k}} u_\epsilon < z_2$. 定理2.2证毕.

注2.1 与注1.1类似, 当 ϵ 充分小时, 方程(S)在有界光滑区域 Ω 上有很多非负非平凡解.

3　正解的结构

我们证明当 f 变号时, (S) 有很多正的过渡尖峰解. 主要结果如下:

定理 3.1　若 f 满足 $(F_1) \sim (F_3)$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, (S) 存在正解 $\underline{u}_\epsilon$ 和 u_ϵ, 满足

$$u_\epsilon = \begin{cases} \underline{u}_\epsilon, & x \in \Omega \setminus O_\epsilon, \\ a_1 + v_\epsilon, & x \in O_\epsilon, \end{cases} \tag{19}$$

$0 < \max_{\Omega} u_\epsilon < a_3$, 其中 $\underline{u}_\epsilon$ 是(S) 在区间 $[0, a_1]$ 上唯一的正解, 且在 $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上, $\epsilon \to 0$ 时, $\underline{u}_\epsilon \to a_1$, $\max_{\Omega} \underline{u}_\epsilon = a_1$, $O_\epsilon = \left\{ x \in \Omega: \underline{u}_\epsilon(x) = a_1 \right\} \neq \emptyset$, 还满足极限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1/p} \operatorname{dist}(O_\epsilon, \partial \Omega) = \left(\frac{p-1}{p} \right)^{1/p} \int_0^{a_1} \frac{\mathrm{d}s}{(F(a_1) - F(s))^{1/p}}, \tag{20}$$

其中 $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s$, v_ϵ 是方程

$$-\epsilon \Delta_p v = f(a_1 + v), \quad \text{在 } O_\epsilon \text{ 上}; \ v = 0, \quad \text{在 } \partial O_\epsilon \text{ 上} \tag{21}$$

的一个非负非平凡解, 与定理 2.2 中的非负非平凡解具有同样结构.

证明　若 f 满足 (F_1) 和 (F_3), 由[17, 定理 B]知, (S) 在区间 $[0, a_1]$ 上有唯一的正解 $\underline{u}_\epsilon$, 且在 $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上, $\epsilon \to 0$ 时, $\underline{u}_\epsilon \to a_1$, $\max_{\Omega} \underline{u}_\epsilon = a_1$, $O_\epsilon = \left\{ x \in \Omega: \underline{u}_\epsilon(x) = a_1 \right\} \neq \emptyset$, 还满足(20)式. 考虑方程

$$-\epsilon \Delta_p v = g(v), \quad \text{在 } O_\epsilon \text{ 上}; \ v = 0, \quad \text{在 } \partial O_\epsilon \text{ 上}, \tag{22}$$

其中 $g(s) = f(a_1 + s)$. 不失一般性, 可假设对充分小的 ϵ, ∂O_ϵ 光滑. 我们在更小的区域 $Q_\epsilon \subset O_\epsilon$ 上考虑, 把(22) 的解 v_ϵ 延拓到 O_ϵ, 在 Q_ϵ 之外定义为 0, 这里

$$Q_\epsilon = \Omega \setminus \left\{ x \in \Omega: 0 < \operatorname{dist}(x, \partial \Omega) \leqslant \max_{y \in \partial O_\epsilon} \operatorname{dist}(y, \partial \Omega) \right\}.$$

由于 $\epsilon \to 0$ 时, $\max_{y \in \partial O_\epsilon} \operatorname{dist}(y, \partial \Omega) \to 0$, 此时 ∂Q_ϵ 光滑. 令 $z_1 = a_2 - a_1$, $z_2 = a_3 - a_1$, 由 (F_3) 易知, g 满足 (f_1')、(f_2)、(f_3). 因此, 由定理 2.2 知, v_ϵ 满足

$$\operatorname{supp} v_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{q(\epsilon)} F_{\epsilon, k}, \tag{23}$$

$q(\epsilon) < \infty$, $\lim_{\epsilon \to 0} q(\epsilon) = \infty$ (由于 $\epsilon \to 0$ 时, $\operatorname{meas}(O_\epsilon) \to \operatorname{meas}(\Omega)$). 而且,

$$a_2 - a_1 < \mu < \max_{F_{\epsilon, k}} v_\epsilon < a_3 - a_1, \tag{24}$$

其中 $\int_0^{\mu} g(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

令

$$u_\epsilon = \begin{cases} \underline{u}_\epsilon, & x \in \Omega \setminus O_\epsilon; \\ a_1 + v_\epsilon, & x \in O_\epsilon. \end{cases}$$

显然, u_ϵ 是(S) 的一个正解. 由定理 2.2, (22) 至少有 $2^{q(\epsilon)} - 1$ 个非负非平凡解. 令 v_ϵ^k 是其中之一, 则

$$u_\epsilon^k = \begin{cases} \underline{u}_\epsilon, & x \in \Omega \setminus O_\epsilon; \\ a_1 + v_\epsilon^k, & x \in O_\epsilon \end{cases}$$

是(S) 的一个正的过渡尖峰解. 从而(S) 至少有 $2^{q(\epsilon)} - 1$ 个正的过渡尖峰解. 在这些过渡尖峰解中, 有 $C_{q(\epsilon)}^1$ 个 1_尖点解; $C_{q(\epsilon)}^2$ 个 2_尖点解; …; 一个 $q(\epsilon)$_尖点解.

注 3.1　事实上, 若 f 满足 $(F_1) \sim (F_3)$, 利用[18] 中类似的技巧可以证明, (S) 在区间 $[0, a_3]$ 上存在唯一的

正解 $u_\epsilon \geqslant u_\epsilon$ 且 $\inf_{\Omega_0} u_\epsilon > a_2$, 其中 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, 且 N 维测度为正•

[参 考 文 献]

[1] Diaz J I. Nonlinear Partial Differential Equation and Free Boundaries —Ⅰ: Elliptic Equations [M]. London: Pitman, 1985.

[2] 杨作东, 陆启韶. 一类非牛顿渗流系统爆破界的估计[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(3): 287—294.

[3] 白占兵. 一类四阶 p_Laplace 方程正解的存在性及多解性[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(12): 1324—1328.

[4] Guo Z M, Webb J R L, Large and small solutions of a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems[J]. J Differential Equations, 2002, **180**(1): 1—50.

[5] ZHANG Zheng_ce, LI Kai_tai. Spike_layered solutions of singularly perturbed quasilinear Dirichlet problems[J]. J Math Anal Appl, 2003, **283**(2): 667—680.

[6] Dancer E N, Wei J C. On the profile of solutions with two sharp layers to a singularly perturbed semilinear Dirichlet problem[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1997, **127**(4): 691—701.

[7] Ni W M, Takagi I, Wei J C. On the location and profile of spike_layer solutions to a singularly perturbed semilinear Dirichlet problems: Intermediate solutions[J]. Duke Math J, 1998, **94**(3): 597—618.

[8] Dancer E N, Wei J C. On the location of spikes of solutions with two sharp layers for a singularly perturbed semilinear Dirichlet problem[J]. J Differential Equations, 1999, **157**(1): 82—101.

[9] Vûzquez J L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations[J]. Appl Math Optim, 1984, **12**(3): 191—202.

[10] Diaz J I, Herrero M A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1981, **89**(2): 249—258.

[11] Gidas B, Ni W M, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle[J]. Comm Math Phys, 1979, **68**(3): 209—243.

[12] Brock F. Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems[J]. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 2000, **110**(2): 157—204.

[13] Brock F. Radial symmetry for nonnegative solutions of semilinear elliptic equations involving the p_Laplacian[A, J]. In: Amann H, Bandle C, Chipot M, et al Eds. Progress in Partial Differential Equations[C]. Vol **1**. Pont_û_Mousson 1997, 1—12; Pitman Res Notes Math Ser, Harlow_New York: Longman, 1998, **383**: 46—58.

[14] Ôtani M, Teshima T. On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations[J]. Proc Japan Acad Ser A, 1988, **64**(1): 8—10.

[15] Guo Z M. Structure of nontravial nonnegative solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2003, **133**(2): 363—392.

[16] Canada A, Drûbek P, Gamez J L. Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion[J]. Trans Amer Math Soc, 1997, **349**(10): 4231—4249.

[17] Guo Z M. Uniqueness and flat core of positive solutions for quasilinear elliptic eigenvalue problems in general smooth domains[J]. Math Nachr, 2002, **243**(1): 43—74.

[18] Guo Z M. Structure of large positive solutions of some semilinear elliptic problems where the nonlinearity changes sign[J]. Top Methods Nonlinear Anal, 2001, **18**(1): 107—128.

Structure of Nonnegative Nontrivial and Positive Solutions of Singularly Perturbed *p*_Laplace Equations

ZHANG Zheng_ce, LI Kai_tai
(College of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract: Structure of nonnegative nontrivial and positive solutions was precisely studied for some singularly perturbed p_Laplace equations. By virtue of sub_ and supersolution method, it is shown that there are many nonnegative nontrivial spike_layer solutions and positive intermediate spike_layer solutions. Moreover, the upper and lower bound on the measure of each spike_layer were estimated when the parameter is sufficiently small.

Key words: p_Laplace equation; nonnegative nontrivial solution; positive solution; spike_layer solution; sub_ and supersolution