

微极连续体力学比经典连续体力学 更深入一层次*

陆章基

(汕头大学数学系**, 1986年9月5日收到)

摘 要

本文通过刚删架(动静态响应与屈曲)的微极梁板模型、血液的牛顿-微极分层流模型以及人骨微极特性的实验论证等阐明微极连续体理论的本质特点, 从应用侧面阐述微极连续体力学比经典连续体力学更深一层次的观点, 并介绍该理论及其近期应用的部分进展情况。

一、微极连续体力学简介

微极连续体力学(又称微极理论)是 Eringen^{[1][2]}于六十年代中期首次提出的。该理论以颗粒介质、多孔材料、血液、润滑油、悬浮液与高分子溶液等为背景, 把物体视为连续分布的质点粒子的集合。然而, 比经典连续体力学更进一步, 假定每个粒子不仅能移动, 还能微转动; 不仅有质量, 还有微转动惯量; 不仅承受应力, 还承受偶应力; 几乎象个小刚体。这是对粒子内结构所设想的一种宏观模式。据此, 每个粒子的宏观状态须由以下物理量描述: 质量、位置向量、线速度向量 v_k 、应力张量 t_{kl} (以上皆为经典量) 以及微转动惯量张量 j_{kl} 、微转动向量 v_k 、偶应力张量 m_{kl} (这些量由内结构引起) 等。因粒子能独立微转动, 应力张量不再对称。微极理论属亚微观(细观)力学。利用理性力学或连续统物理学公理化方法、诸力学平衡规律和热力学基本定律, 并藉助于张量、不变量理论和泛函等数学工具, 已导出各类微极物质(弹性体、流体和粘弹体、各向同性和各向异性、线性和非线性、局部和非局部以及考虑热等物理效应)的本构方程和主导方程。例如线性各向同性、不可压缩微极流体的方程分别为:

$$\left. \begin{aligned} t_{kl} &= -p\delta_{kl} + (2\mu + \kappa)d_{kl} + \kappa e_{klm}(w_m - v_m) \\ m_{kl} &= \alpha v_{r,r}\delta_{kl} + \beta v_{k,l} + \gamma v_{l,k} \end{aligned} \right\} \text{(本构方程)} \quad (1.1a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mu + \kappa)v_{i,kk} + \kappa e_{ikl}v_{l,k} - p_{,i} + \rho f_i &= \rho \dot{v}_i \\ \gamma v_{i,kk} + \kappa e_{ikl}v_{l,k} - 2\kappa v_i + \rho l_i &= \rho j \dot{v}_i \end{aligned} \right\} \text{(主导方程)} \quad (1.2a, b)$$

其中 d_{kl} 是应变率张量, e_{klm} 是置换记号, f_i 和 l_i 是体力和体力偶密度, w_m 是宏转动向量, μ ,

郭仲衡推荐。

* 本文曾在“近代数学与力学(MMM)会议”(1986.6.北京)报告。

** 本文作者在复旦大学应用力学系兼职。

κ , α , β 和 γ 是微极流体的材料系数. 经典虎克弹性体和牛顿粘性流体分别是微弹体和微极流体的特例. 例如在(1.2a)中取 $\kappa=0$, 则退化为Navier-Stokes方程.

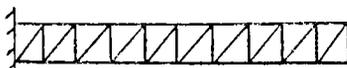
几乎在同时期, 出现形形色色的微结构理论. 例如偶应力理论^[3]、非对称力学、偶极理论、Cosserat理论、微态理论^[4]等. 这些理论均考虑粒子自旋和偶应力效应, 甚至粒子变形效应. 我们认为它们和微极理论同属亚微观层次. 然而, 微极理论由于简明、深刻、物理意义明确和完整(没有不确定成分)等优点, 最受重视. 目前几乎渗透到力学、物理学、工程学, 甚至化学和生物学等学科中.

微极理论正因为考虑粒子内结构效应, 显然比经典理论更深入一层次, 预期会揭示经典力学无法解释的许多新现象. 本文通过剖析八十年代微极理论在力学和工程应用方面最新进展的几个典型例子进一步阐述本文的基本观点.

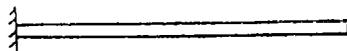
二、刚栅架的静态、动态和屈曲分析

与有限元思想(把连续体离散化)相反, 细长的栅架(离散结构)常用一维连续梁作近似模拟. 早期曾用剪切梁对桁架的静动态响应提供良好近似值. 但对刚栅架弯曲, 结果不太满意. 最近, 用微极梁模拟^[5]得到封闭解, 精度甚高. 微极梁模拟立足于“等效微极梁”基础上. 当等效微极梁与原栅架作相同变形时, 两者应有相同的应变能和动能. 以图1的平面刚栅架(类梁结构)为例. 先计算刚栅架典型单元的应变能和动能. 为此, 把节点位移 u^i ,

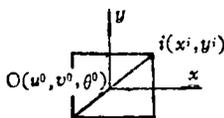
v^i 和转角 θ^i 展开成泰勒级数保留若干项, 得到



(a) Pratt刚栅架($n=10$)



(b) 等效微极梁



(c) 典型(重复)单元

图 1

$$\left. \begin{aligned} u^i &\approx u^0 + y^i \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy}^0 - r^0 - \theta^0 \right) + x^i (\varepsilon_x^0 + y^i \kappa_x^0) \\ v^i &\approx v^0 + y^i \varepsilon_y^0 + x^i \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{xy}^0 + r^0 + \theta^0 \right) + y^i \frac{d\varepsilon_y^0}{dx} \right] \\ \theta^i &\approx \theta^0 + y^i \mu_y^0 + x^i \left(\mu_x^0 + y^i \frac{d\mu_y^0}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{du^0}{dx}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{dv^0}{dx} + \phi^0, \quad \kappa_x^0 = \frac{d\phi^0}{dx} \\ r^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{dv^0}{dx} - \phi^0 \right) - \theta^0, \quad \mu_x^0 = \frac{d\theta^0}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这些量连同 ε_y^0 和 μ_y^0 是各应变分量. 由上式得到各杆件的应变能, 累加后得到典型单元的应变能 U . 又立足于一致质量方法, 得到其动能 T . 考虑到元件能自由发生局部变形, 相应的应力分量为零, 得到

$$\frac{\partial U}{\partial [d\varepsilon_x^0/dx]} = \frac{\partial U}{\partial [d\kappa_x^0/dx]} = \frac{\partial U}{\partial [d\gamma_{xy}^0/dx]} = 0$$

另外, 与应变分量 ε_y^0 和 μ_y^0 联系的力甚小, 故

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y^0} = \frac{\partial U}{\partial \mu_y^0} = 0$$

于是只剩五个独立应变分量

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x^0, \kappa_x^0, \gamma_{xy}^0, r^0, \mu_x^0]$$

其中前三者是经典剪切梁的，后两者是微极附加量。这样 $U = \bar{L} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} / 2$ ，其中 \bar{L} 是单元在 x 方向的长度， $\mathbf{C}_{5,5}$ 是微极梁的等效刚度矩阵。对于动能 T ，计算表明与 $\boldsymbol{\varepsilon}_0^0$ 和 $\boldsymbol{\mu}_0^0$ 联系的惯性项甚小，略去之。得到 $T = \bar{L} \omega^2 \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Theta} / 2$ ，其中 $\boldsymbol{\Theta}^T = [u^0, v^0, \theta^0, \phi^0]$ ， $\mathbf{M}_{4,4}$ 是质量阵。典型单元上外力功

$$W = \sum_i [p_i^i (u^0 + y^i \phi^0) + p_i^i (v^0 + y^i \varepsilon_i^0)] \bar{M}^i (\theta^0 + y^i \mu_i^0)$$

其中 p_i^i 、 p_i^i 和 \bar{M}^i 分别是节点 i 的外力和外力矩分量。由广义 Hamilton 原理与 (3.2) 式，得到算子形式的主导微分方程

$$\mathcal{L} \boldsymbol{\Theta} = -\omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\Theta} + [\tilde{N}, \tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{M}]^T$$

其中 \mathcal{L} 是 4×4 算子矩阵。若配上相应的边界条件就得到静动态响应的封闭解。表 1 给出图 1 的 Pratt 悬臂刚栅架 (跨数 $n=10$) 的五个基频，并与精确解作比较。误差不超过 3.3%。当

表 1 Pratt 悬臂刚栅架 ($n=10$) 等效微极梁的基频与精确解之比较

	基 频 (单位: 赫兹)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
等效微极梁	9.231	46.139	87.951	105.067	168.100
精 确 解	9.245	46.654	87.179	106.471	167.716

n 增加到 30，误差小于 2%，结果是满意的。该方法也用于空间 (类梁) 刚栅架的静动态响应和屈曲分析^[6]。例如对 $n=10$ 的三角形截面 Vierendeel 悬臂架，位移和转角的最大误差 $< 2\%$ ，最低两个屈曲载荷的误差 $< 1\%$ ，前六个基频的最大误差 $< 1.2\%$ 。微极梁的优点是：合理地吧节点和元件的转动分别比拟为粒子的宏转动和微转动，经典梁无法做到这点。其实，栅架的微极模拟方法很多。例如写出节点的有限差分方程直接求解，或者通过泰勒展开转化为微分方程再求解^[7]；用与平均能有关的变分原理构造复微极连续体模型^[8]等。已用于类梁和类板栅架的初应力、整体屈曲和波传播等问题。这类方法能明显地节省计算时间和存储单元。又由于归为微极梁和板的求解，可直接借助于微极理论现有的丰富理论成果，反过来又促进它们的发展。当然，这方面工作尚属开始不够完善，例如，对构架的规则性要求很高；各类方法缺乏普适性，不便于计算机统一处理；简化假定不最合理往往引起遗漏个别高频；有待进一步探索。在大型结构中也可尝试与有限元法结合。

三、血液和高分子溶液在细管或狭道中的流动

血液是血球飘浮在血浆中的悬浮液。实验发现在细管 (直径 $20 \sim 200 \mu$) 内流动时，呈现多种异常流变现象：速度剖面变钝、表观粘度随管径减少而减少、壁面速度滑移和趋轴效应 (血球背离壁面向轴迁移) 等；无法用经典牛顿流体作解释，须考虑血球独立自旋效应，宜把血液视为微极流体。由于趋轴效应，在管壁附近形成无血球的血浆层 (牛顿流体)，因此可进一步把血液视为牛顿-微极分层两相流^[9]——外围层是牛顿流体，核心层是微极流体，参见图 2。其中 v_i 和 ω_i 分别是粒子的线速度和微转动速度 ($i=1$ 表示核心层， $i=2$ 表示外围层)； μ_2 是外围层牛顿粘度； μ ， κ 和 γ 是微极流体三个材料系数。在方程 (1.2) 中取

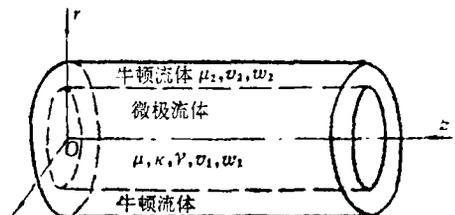


图 2 血液的牛顿-微极分层流模型

柱坐标, 则在压力梯度 $-p_{,z}$ 下该分层流的主导方程为

$$\left. \begin{aligned} (\mu + \kappa) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1) - p_{,z} = 0 \\ \gamma \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) - \kappa \frac{\partial v_1}{\partial r} - 2\kappa v = 0 \end{aligned} \right\} \text{(核心层)} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) - p_{,z} = 0 \\ w_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial r} \end{aligned} \right\} \text{(外围层)} \quad (3.2)$$

利用外围层粒子壁面无滑移边界条件, 交界液面处速度与剪应力连续以及无偶应力等条件, 求解(3.1)和(3.2), 得到

$$v_1(\bar{r}) = -\frac{a^2 p_{,z}}{4\mu_2} \left\{ 1 - d^2 + \frac{2\mu_2}{2\mu + \kappa} \left[d^2 - \bar{r}^2 + \frac{2\kappa}{\mu + \kappa} \frac{I_0(\lambda\bar{r}) - I_0(\lambda d)}{\lambda^2 I_0(\lambda d)} \right] \right\}$$

$$v_2(\bar{r}) = -\frac{a^2 p_{,z}}{4\mu_2} (1 - \bar{r}^2)$$

其中 $\bar{r} = r/a$, $d = b/a$, $\lambda = a \sqrt{\frac{2\mu + \kappa}{\mu + \kappa} \frac{\kappa}{\gamma}}$

I_0 和 I_1 分别是零阶和一阶修正贝塞尔函数。通过计算流量, 不难得到表观粘度

$$\mu_e = 1 - d^4 + \frac{2\mu_2}{2\mu + \kappa} \left[d^4 + \frac{4\kappa d}{\mu + \kappa} \frac{2I_1(\lambda d) - \lambda I_0(\lambda d)}{\lambda^2 I_0(\lambda d)} \right]$$

数值计算证实速度剖面变钝和 μ_e 随管径减少而减少, 与实验相符。这表明牛顿-微极分层流模型已能解释多种血液流变现象。此外, 微极模型也可尝试用于高分子溶液、润滑油^[11]、胶体溶液和泥浆等非牛顿流体。而且, 除稳定层流外, 还有脉动流^[12]、溶质在这类流体中的分散^[13]、狭窄流动^[14]和蠕动^[15]等。从模型类型讲, 还有Brunn^[10]的边界速度滑移的(单层)微极流体模型、Kang和Eringen^[4]的微态模型等, 皆能解释多种流变现象。微态模型还突破刚粒子的假定, 考虑粒子变形效应。目前还有各向异性、非线性和热效应等微结构模型, 但很复杂, 尚未引起普遍重视, 但也不容忽视。

四、骨头的微极弹性描述——实验论证

人骨是一种天然纤维复合物, 它的行为与经典弹性或粘弹理论不符, 有明显的偶应力效应。Yang和Lakes^[16]的准静态扭转试验和动力试验中揭示出密质骨的偶应力论据。最近又在弯曲试验中找到微极理论的论据。他们把人骨加工为各种直径 $d = 2a$ 的圆柱体, 在端矩 M 下纯弯曲, 测得挠度 $1/k$, 然后由 $J = M/(1/k)$ 算得弯曲刚度 J , 得到 J/d^2 依赖于 d^2 的离散实验点。另外, 根据微极圆柱体精确解

$$J = \frac{\pi d^4 E}{64} \left\{ 1 + \frac{8N^2}{\nu + 1} \left[\frac{1 - (\beta/\gamma)^2}{\lambda^2} + \frac{(\beta/\gamma + \nu)^2}{\xi(\lambda) + 8N^2(1 - \nu)} \right] \right\}$$

其中

$$\xi(\lambda) = \frac{\lambda^2[\lambda I_0(\lambda) - I_1(\lambda)]}{\lambda I_0(\lambda) - 2I_1(\lambda)}, \quad N = \frac{\kappa}{2(\mu + \kappa)}$$

E 是杨氏模量, ν 是泊松比. 通过理论曲线与离散实验点以最小方差啮合 (可利用优化计算程序) 得到微极材料系数 E , N , β/γ , λ 和 ν . 试验表明微极啮合结果比不确定的偶应力理论的上限解更精确, 而且所得的杨氏模量与其它试验也基本相符. 最近, 广义连续体的波传播问题也由理论研究跨入实验^[17]. 实验数据表明骨头超声速的增加比简单粘弹固体和复合物更甚, 这可用带微结构的 Cosserat 连续体理论 (与微极理论很相仿) 解释. 而且对于各向同性介质, 偶应力理论只有旋转波是弥散的, 膨胀波不受偶应力影响. 与此相反, Cosserat 结构理论表明纵波速和横波速 (声波分支) 皆随波数增加而增加, 这与骨头的初步研究相符, 故比偶应力理论满意.

微极理论以及其它微结构理论, 目前阶段的发展把实验提到更迫切的日程上来. 除了从实验中找到这些理论的论据外, 如何通过实验确定真实物体的微极材料常数^[18] 等方向也越来越突出. 这些工作的突破会使微结构理论的应用跨出关键一步, 也给理论发展提供新的动力.

五、结 论

微极理论 (以及同一层次的其他微结构理论) 发展已达二十年, 在粒子特征尺寸属亚微观那个尺度范围内越来越显示出它的优越性, 表明它比经典连续体理论更深一层次. 本文侧重于应用角度作了部分阐述. 通过栅架的微极梁板模型、血液的牛顿-微极分层流模型以及密质骨微极特性的实验论证等更深入体会微极理论的本质特点, 并介绍近期应用方面的部分进展. 读者欲进一步了解可参阅 [1], [19]~[23] 和 *Int. J. Engng Sci* 等杂志. 此外, 在微极理论这个层次内, 各种模型日益丰富. 例如微极粘弹、热弹、各向异性、非线性微极、非局部微极^[23] 和可变形粒子的微结构理论等. 这些理论的进一步完善和应用将给力学和应用数学工作者提出更多新课题.

参 考 文 献

- [1] Eringen, A.C., Theory of micropolar elasticity, Chap.7 of *Fracture* (ed. Liebowitz, H.), V.2 (1968), 621—729.
- [2] Eringen, A.C., Theory of micropolar fluids, *J. Math. Mech.*, 16 (1966), 1—18.
- [3] Stokes, V.K., Couple stresses in fluids, *Phy. Fluids*, 19 (1966), 1709—1716.
- [4] Kang, C.K. and A.C. Eringen, The effect of microstructure on the rheological properties of blood, *Bull. Math. Biol.*, 38 (1976), 135—159.
- [5] Noor, A.K. and M.P. Nemeth, Micropolar beam models for lattice grids with rigid joints, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 21 (1980), 249—263.
- [6] Noor, A.K. and M.P. Nemeth, Analysis of spatial beamlike lattices with rigid joints, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 24 (1980), 35—59.
- [7] Bazant, Z.P. and M. Christensen, Analogy between micropolar continuum and grid frameworks under initial stress, *Int. J. Solids Stru.*, 8 (1972), 327—346.
- [8] Kanatani, K.I., A micropolar continuum model for vibrating grid frameworks,

- Int. J. Engng Sci.*, 17 (1979), 409—418.
- [9] Chaturani, P. and V. S. Upadhyaya, On micropolar fluid model for blood flow through narrow tubes, *Biorheology*, 16 (1979), 419—428.
- [10] Brunn, P., The velocity slip of polar fluids, *Rheol. Acta*, 14 (1975), 1039—1045.
- [11] 裘祖干, 陆章基, 微极流体润滑在径向轴承中的应用, 应用数学和力学, 8, 7 (1987), 623—632.
- [12] Lu Zhang-ji (陆章基), The micropolar two-fluid model and pulsatile blood flow through fine tube, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai (1985), 757—761.
- [13] 陆章基, 微极流体通过带有狭窄的圆管的流动分析及外围层效应, 《第一届全国流变学会议论文集》(1985).
- [14] 陆章基, 溶质在作圆管层流的微极流体中的分散, 大自然探索, 5, 2 (1986), 43—48.
- [15] Tandon, P.N., J.K. Misra and K. K. Srivastava, Microstructural and peripheral-layer viscosity effects on peristaltic transport of seminal fluid, *Biorheology*, 19 (1982), 707—715.
- [16] Yang, J.F.C. and R.S. Lakes, Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending, *J. Biomech.*, 15 (1982), 91—98.
- [17] Yoon, H.S. and J.L. Katz, Is bone a Cosserat solid? *J. Mater. Sci.*, 18 (1983), 1297—1305.
- [18] Kolpashchikov, V.L., N.P. Migun and P.P. Prokhorenko, Experiment determination of material micropolar fluid constants, *Int. J. Engng Sci.*, 21 (1983), 405—411.
- [19] Ariman, T., M. A. Turk and N. D. Sylvester, Microcontinuum fluid mechanics—a review, *Int. J. Engng Sci.*, 11 (1973), 905—930.
- [20] Ariman, T., M.A. Turk and N.D. Sylvester, Applications of microcontinuum fluid mechanics, *Int. J. Engng. Sci.*, 12 (1974), 273—294.
- [21] 爱林根等, 《极性场论》(连续统物理学丛书), 戴天民译, 江苏科学技术出版社 (1981).
- [22] 陆章基, 微极流体理论应用的近期进展——生物力学和液体润滑方面, 《第一届全国流变学会议论文集》(1985).
- [23] 爱林根, 《非局部极性场论》(连续统物理学丛书), 戴天民译, 江苏科学技术出版社 (1981).

Micropolar Continuum Mechanics Is More Profound than Classical Continuum Mechanics

Lu Zhang-ji

(Shantou University, Guangdong; Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper expounds the characteristic features of the micropolar continuum theory by developing micropolar continuum models for the static, dynamic and buckling analysis of beam-like or plate-like lattices with rigid joints, by analysing the Newton-micropolar stratified fluid model for blood and by producing experimental proofs demonstrating the micropolar property for human compact bone. In particular, it explains from the point of view of application that the micropolar continuum mechanics is a theory more profound than classical continuum mechanics. Presented in this paper is also a description of some recent advances in applications.