

二维浅水波方程的间断周期解和 间断孤立波解讨论*

黄 思 训

(南京, 空军气象学院, 1986年7月26日收到)

摘 要

本文讨论地球流体运动浅水波模式中间断周期解与间断孤立波解。在系统的非平衡点即奇点附近考虑轨线性质时, 我们发现只要引入广义解的概念(分片光滑连续解), 就会产生间断周期解并得到了间断周期解的条件。当系统在退化的过程中, 发现系统此时会产生间断的孤立波解, 与此同时其它物理量也产生了间断。这里我们发现, 一般认为在超高速情况下解会产生间断, 然而非超高速时也会产生间断现象。本文讨论了上述一系列问题得到了间断解的解析解表达式, 并把这一事实与飚线的实例进行比较, 得到了不少类似之处。

一、数学模式与间断周期解存在可能性讨论

地球流体运动浅水波模式为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)u - fv &= -g\frac{\partial h}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)v + fu &= -g\frac{\partial h}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)h + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

以上模式中物理量一如常用, f 为科氏参数, 设 $f = \text{const}$. 文[1]讨论了快波型特解是存在的, 并且给出当广义能量有微小扰动时会产生非线性孤波解。本文讨论在非平衡点即奇点附近的解的性质。设

$$u = U(\theta), \quad v = V(\theta), \quad h = H(\theta), \quad \theta = kx + ly - vt \quad (1.2)$$

其中 k, l, v 表示 x, y 方向的波数和圆频率。用“'”表示物理量对 θ 的一次微商, 引进 $Z = kU + lV$, $\Omega = kV - lU$, 其中 Z' 和 Ω' 表示系统的散度和涡度, 把(1.2)代入(1.1)经整理可得

$$\begin{cases} (Z - v)Z' - f\Omega = -g(k^2 + l^2)H' & (1.3a) \\ (Z - v)\Omega' + fZ = 0 & (1.3b) \\ (Z - v)H' + HZ' = 0 & (1.3c) \end{cases}$$

* 郭仲衡推荐。

(1.3c)积分一次, 令 \tilde{H} 为积分常数, 于是

$$H = -\frac{\nu \tilde{H}}{Z - \nu} \quad (1.4)$$

把(1.4)代入(1.3)可得到

$$\left\{ \begin{aligned} Z' &= \frac{f\Omega(Z-\nu)^2}{(Z-\nu)^3 + (\sigma\nu)^3} \end{aligned} \right. \quad (1.5a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega' &= -\frac{fZ}{Z-\nu} \end{aligned} \right. \quad (1.5b)$$

其中 $c_0 = \sqrt{g\tilde{H}}$ 表示重力波或长重力波的波速, $c = \frac{\nu}{\sqrt{k^2 + l^2}}$ 表示相速, $\sigma = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2$ 为无量纲的量, 文[1]中讨论了 $\sigma < 1$ 的情况, 对应 $c > c_0$ 即为快波型解, 现在我们讨论慢波型解, 即 $\sigma > 1$ (或 $c < c_0 = \sqrt{g\tilde{H}}$ 情形)。

积分(1.5)可得

$$\Omega^2 = E^* - (Z-\nu)^2 + \frac{2(\sigma\nu)^3}{Z-\nu} - 2\nu(Z-\nu) + \frac{(\sigma\nu)^3\nu}{(Z-\nu)^2} \triangleq F(Z) \quad (1.6)$$

其中 E^* 为积分常数, 表示广义能量, 因为(1.6)可以转化为

$$\frac{\Omega^2 + Z^2}{2} + gH\left(1 - \frac{H}{2\tilde{H}}\right)(k^2 + l^2) = E \quad (1.7)$$

其中 $E = E^*/2 - \nu^2/2$, (1.7)表示 Ω , Z , H 之间的相互关系式, 这是广义动能与位能之间的一个转换关系。

我们考虑方程组(1.5)的平衡点 $Z=0$, $\Omega=0$, 其近似线性方程组为

$$\left. \begin{aligned} Z' &= \frac{f\Omega}{(\sigma^3 - 1)\nu} \\ \Omega' &= \frac{f}{\nu}Z \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

当 $\sigma > 1$ 时, 系统在 $(0, 0)$ 平衡点附近轨线是不可能闭合的, 即在平衡点附近不可能产生周期解^[2]。现在我们转到系统在 $Z=Z_0=(1-\sigma)\nu$, $\Omega=0$ 奇异点的轨线性质。

我们考察 $dF(Z)/dZ=0$ 的点, 从 $dF(Z)/dZ=0$ 得到 $Z=0$, $Z=Z_0=(1-\sigma)\nu$, 于是 $F(Z)$

的图形见图1所示。我们设 $F(Z_0) > 0$, $F(0) < 0$, 则这意味着广义能量积分常数 E^* 满足如下的关系式

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= E^* + \nu(1-\sigma^3) < 0 \\ F(Z_0) &= E^* + 3\sigma\nu^2(1-\sigma) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

或者表示成

$$\left. \begin{aligned} d_2 \triangleq -3\sigma\nu^2(1-\sigma) < E^* \\ < -\nu(1-\sigma^3) \triangleq d_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

在此种情况下, $F(Z)=0$ 有四个实根, $Z_1 < Z_0 < Z_2 < 0 < \nu < Z_4$, 下面来讨论当 $Z_1 \leq Z \leq Z_2$ 时轨线的性质。

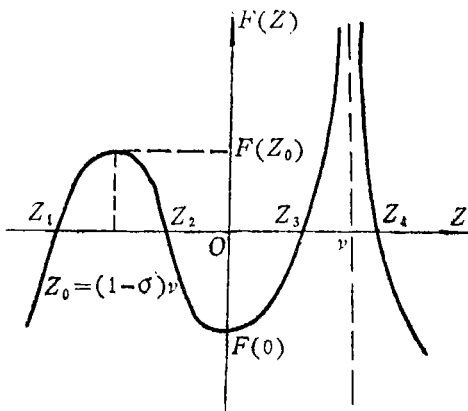


图 1

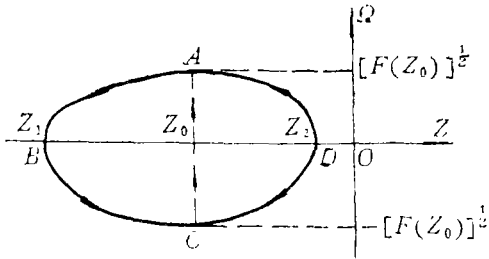


图 2

利用条件(1.10), 易知系统(1.5)在奇异点 $(Z_0, 0)$ 附近的轨线如图2所示. 由 $(Z_0, 0)$ 为(1.5)的奇异点, 在A, C点对应着 $Z' = \infty$, 即散度为无穷大, 另外此时轨线虽然封闭, 但走向相反, 因为 $\Omega' < 0$ 故 Ω 始终是递减的. 轨线的方向为 $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow D \rightarrow C$. 再考虑相点沿左右半支从A移至C点时相角的值 $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$,

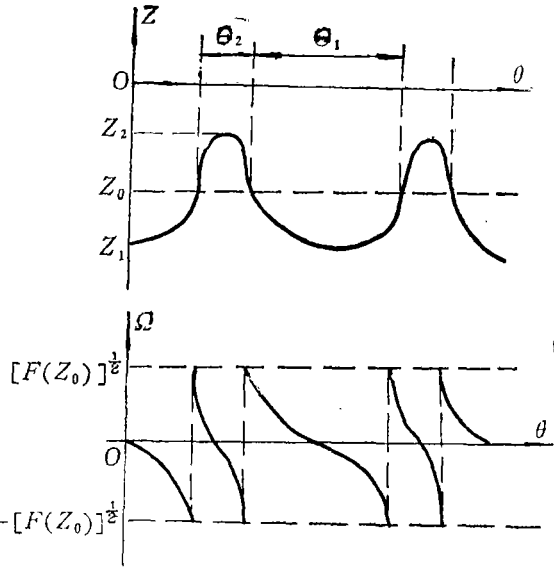


图 3

$$\Theta_1 = 2 \int_A^B d\theta = 2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{(Z-\nu)^3 + (\sigma\nu)^3}{f \sqrt{F(Z)} (Z-\nu)^2} dZ \quad (1.11)$$

$$\Theta_2 = 2 \int_A^D d\theta = 2 \int_{z_0}^{z_2} \frac{(Z-\nu)^3 + (\sigma\nu)^3}{f \sqrt{F(Z)} (Z-\nu)^2} dZ \quad (1.12)$$

由于 $F(Z)$ 在 $Z=Z_0$ 点有奇点, 且为一阶零点, 显然 Θ_1 和 Θ_2 是可积的, 那么轨线从A点移到C点在有限范围成完成的, 我们问至C点以后运动怎么样呢? 我们设想轨线从 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 以后从C点跳跃至A点再由 $A \rightarrow D \rightarrow C$, 再由C点跳跃至A点, 完成一个循环. 此时Z是连续的, 但一阶导数在 $Z=Z_0$ 点为无穷大, 而 Ω 在 $Z=Z_0$ 点有一跳跃, 这样我们得到的解并非为古典意义下的解, 而是分片光滑连续解, 或者说为广义解. 利用轨线性质, 我们可以画出 Z, Ω 的图形(见图3), 从而我们得到了间断周期解, 其周期为 Θ

下面我们来求间断周期解的解析解表达式.

由(1.6)可知

$$\Omega = \pm \sqrt{F(Z)} \quad (1.13)$$

士号对应于图2中上、下半平面部分轨线.

二、间断周期解解析解表达式

在第一节中我们得到了间断周期解存在的条件(1.10), 由(1.13)可得

$$\Omega = -\varepsilon \sqrt{-\prod_{i=1}^4 (Z-Z_i)} / (Z-\nu) \quad (2.1)$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, 分别对应于图2中上、下半平面的半支. 把(2.1)代入(1.5a)式, 可以得到

$$\frac{dZ}{d\theta} = Z' = \frac{-f\varepsilon \left[-\prod_{i=1}^4 (Z-Z_i) \right]^{\frac{1}{2}} (Z-v)}{(Z-v)^3 + (\sigma v)^3} \quad (2.2)$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int [(Z-v)^3 + (\sigma v)^3] \left[-\prod_{i=1}^4 (Z-Z_i) \right]^{-\frac{1}{2}} (Z-v)^{-1} dZ \\ &= -f\varepsilon(kx + ly - vt) + \alpha_{1,2}^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\alpha_{1,2}^*$ 表示四个积分常数, 分别对应于相图上 AB 段, BC 段, AD 段, DC 段, 这四个积分常数的选择使 Z 成为连续函数. 可见 I 是一个椭圆积分, 下面对(2.3)进行积分, 令

$$\left. \begin{aligned} z &= Z-v, \quad z_i = Z_i-v, \quad A = (\sigma v)^3 \\ \alpha &= \frac{z_2-z_1}{z_4-z_2} > 0, \quad \gamma = \frac{z_4-z_3}{z_3-z_1} > 0 \\ \beta &= a \frac{z_4}{z_1}, \quad a = -\frac{1}{\alpha}, \\ m^2 &= \alpha\gamma, \quad \delta = 2[(z_4-z_2)(z_3-z_1)]^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{z-z_1}{z-z_4} &= -a\xi^2, \quad L(\xi) = (1-\xi^2)(1-m^2\xi^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

于是通过一系列计算可得

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (2.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= P_1 F(\sin^{-1}\xi, m) \\ I_2 &= -P_2 \Pi(\sin^{-1}\xi, a, m) \\ I_3 &= \frac{P_3}{a^2} H_2(a) = \frac{P_3}{a^2} \int \frac{d\xi}{(\xi^2-a)^2 \sqrt{L(\xi)}} \\ I_4 &= P_4 \Pi(\sin^{-1}\xi, a, m) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中 $F(\cdot, \cdot)$, $E(\cdot, \cdot)$, $\Pi(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为第一、二、三类椭圆积分, 利用递推公式可得

$$\begin{aligned} &2[-a + (m^2+1)a^2 - m^2a^3]H_2(a) \\ &\quad - [1 - 2a(m^2+1) + 3m^2a^2]H_1(a) \\ &\quad + m^2H_{-1}(a) = \frac{\xi}{\xi^2-a} \sqrt{L(\xi)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} H_{-1}(a) &= \int \frac{(\xi^2-a)d\xi}{\sqrt{L(\xi)}} \\ P_1 &= \delta \left(z_4 + \frac{A}{z_4} \right) \\ P_2 &= 2\delta(z_4 - z_1) \\ P_3 &= \delta(z_4 - z_1)^2 \\ P_4 &= \delta \frac{A(z_4 - z_1)}{z_1 z_4} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

把(2.7)代入(2.5), 经整理可得:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^{-1}(\xi, m) = & \frac{1}{D_1} \left\{ -f\varepsilon(kx + ly - vt) \right. \\ & - D_2 E(\sin^{-1}\xi, m) - D_3 \Pi(\sin^{-1}\xi, \alpha, m) \\ & \left. - D_4 \Pi(\sin^{-1}\xi, \beta, m) - D_5 \frac{\xi}{1 + \alpha\xi^2} \sqrt{L(\xi) + \alpha\xi^2} \right\} \triangleq X \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D_1 = & \delta \left[z_4^2 + \frac{(\sigma\nu)^3}{z_4} - \frac{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)}{2} \right] \\ & = \frac{\delta}{2z_4} \left[z_4(z_4^2 + (z_1 + z_2)z_4 - z_1z_2) + 2(\sigma\nu)^3 \right] \\ D_2 = & \frac{2}{\delta}, \quad D_3 = -\frac{\delta}{2}(z_4 - z_1)(z_1 + z_2 + z_3 - z_4) \\ D_4 = & (\sigma\nu)^3 \delta \frac{z_4 - z_1}{z_1 z_4}, \quad D_5 = \frac{2\alpha}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由于 $D_1 > 0$, 故(2.9)式有意义, 于是(2.a)转化为

$$\xi^2 = \operatorname{sn}^2 X = 1 - \operatorname{cn}^2 X \quad (2.11)$$

通过计算可得:

$$Z = \frac{Z_1 + \alpha Z_4(1 - \operatorname{cn}^2 X)}{1 + \alpha(1 - \operatorname{cn}^2 X)} \quad (2.12)$$

其中 X 由(2.9)式表示, Z 的振幅 \hat{Z} 为:

$$\hat{Z} = Z_2 - Z_1$$

下面来求波动周期 Θ :

$$\begin{aligned} \Theta = & -\frac{2}{\nu} \left[\int_{Z_0}^{Z_1} + \int_{Z_0}^{Z_1} \right] \frac{[(Z - \nu)^3 + (\sigma\nu)^3] dZ}{f(Z - \nu) \left(-\prod_{i=1}^4 (Z - Z_i) \right)^{\frac{1}{2}}} \\ = & -\frac{2\delta}{f} \left[\int_{\xi_0}^0 + \int_{\xi_0}^1 \right] \frac{\left(\frac{z_1 + \alpha\xi^2 z_4}{1 + \alpha\xi^2} \right)^2 + \frac{A(1 + \alpha\xi^2)}{z_1 + \alpha\xi^2 z_4}}{\sqrt{L(\xi)}} d\xi \\ = & \frac{2}{\nu f} \left\{ D_1 \left[2F(\sin^{-1}\xi_0, m) - F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) \right] + D_2 \left[2E(\sin^{-1}\xi_0, m) \right. \right. \\ & \left. \left. - E\left(\frac{\pi}{2}, m\right) \right] + D_3 \left[2\Pi(\sin^{-1}\xi_0, \alpha, m) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha, m\right) \right] \right. \\ & \left. + D_4 \left[2\Pi(\sin^{-1}\xi_0, \beta, m) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \beta, m\right) \right] \right. \\ & \left. + 2 \frac{\xi_0}{1 + \alpha\xi_0} \sqrt{(1 - \xi_0^2)(1 - m^2 \xi_0^2)} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$, $E\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$, $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$ 为第一、二、三类完全椭圆积分。而 $\zeta_0 =$

$\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Z_0 - Z_1}{Z_4 - Z_0}}$ 。此时波动在 x, y 方向上的波长为 L_x, L_y

$$L_x = \frac{v}{k} \Theta, \quad L_y = \frac{v}{l} \Theta \tag{2.14}$$

由(1.4)可知 H 的解析表达式为

$$H = \frac{-v\tilde{H}}{Z-v} = -v\tilde{H} \frac{1 + \alpha(1 - \text{cn}^2 X)}{(Z_1 - v) + \alpha(Z_4 - v)(1 - \text{cn}^2 X)} \tag{2.15}$$

由(2.15)可得到 H 的振幅 \hat{H} 为

$$\hat{H} = \frac{Z}{(Z_2 - v)(Z_1 - v)} v\tilde{H} \tag{2.16}$$

而 Ω 是由 Z 及 Z' 来表出

$$\Omega = \frac{Z'[(Z-v)^3 + (\sigma v)^3]}{f(Z-v)^2} \tag{2.17}$$

利用 Z 与 Ω 之间关系(2.17)可见, 当 $Z' = 0$ 时即 Z 达到极大、小值时; $\Omega = 0$; 另外当 $Z = Z_0$ 时, Ω 在此点间断, 以及 Ω 的单调减少的性质, 我们可以得到 Z, Ω, H 之间关系图(图4)。图中实线表示 Z , 虚线表示 Ω , 点划线表示 H 。

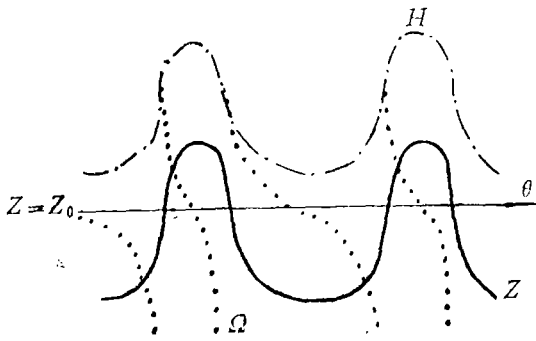


图4

我们用间断周期解的性质可以很好地解释天气过程中出现飚群的现象。

三、间断孤立波解存在性讨论

前面我们讨论了 $F(Z_0) > 0$, $F(0) < 0$ 时情形, 此时会产生间断周期解。下面我们来讨论退化的情形, 即研究 $F(0) = 0$ 时情形, 对应的广义能量积分常数 E^* 满足

$$E^* = d_1 = -v(1 - \sigma^3) \tag{3.1}$$

此时 $F(Z) = 0$ 有三个根, $Z_1 < Z_2 = Z_3 = 0 < v < Z_4$, 于是

$$\Omega = -\epsilon \frac{\sqrt{-(Z-Z_1)Z^2(Z-Z_4)}}{(Z-v)} \tag{3.2}$$

把(3.2)代入(1.5)可得

$$\frac{dZ}{d\theta} = Z' = \frac{-\epsilon f \sqrt{-(Z-Z_1)Z^2(Z-Z_4)}}{(Z-v)^3 + (\sigma v)^3} (Z-v) \tag{3.3}$$

$\epsilon = \pm 1$ 其选取方法同于第二节, 于是

$$J = \int \sqrt{\frac{[(Z-v)^3 + (\sigma v)^3] dZ}{-(Z-Z_1)Z^2(Z-Z_4)(Z-v)}} = -\epsilon f(kx + ly - vt) + \beta_{1,2}^{\pm} \tag{3.4}$$

其中 $\beta_{1,2}^{\pm}$ 是四个积分常数, 分别对应于相图上 AB 段, BC 段, AD 段, DC 段, 这四个积分常数的选择使 Z 成为连续函数。我们设

$$\left. \begin{aligned} z &= Z - \nu, \quad A = (\sigma\nu)^3, \quad z_3 = Z - \nu, \quad z_0 = z_2 = z_3 = -\nu \\ \alpha &= \frac{z_0 - z_1}{z_4 - z_0}, \quad \gamma = \frac{z_4 - z_0}{z_0 - z_1}, \quad m^2 = \alpha\gamma = 1, \quad \beta = \alpha \frac{z_4}{z_1} \\ \delta &= \frac{2}{\sqrt{(z_4 - z_0)(z_0 - z_1)}}, \quad \frac{z - z_1}{z - z_4} = -\alpha\xi^2, \quad L(\xi) = (1 - \xi^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

通过变量代换可知:

$$J = \int \left(R_1 - \frac{R_2}{1 + \alpha\xi^2} + \frac{R_3}{(1 + \alpha\xi^2)^2} + \frac{R_4}{1 + \beta\xi^2} \right) \frac{d\xi}{1 - \xi^2} \quad (3.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \delta \left(z_1^2 + \frac{A}{z_1} \right) \\ R_2 &= 2\delta z_4 (z_4 - z_1) \\ R_3 &= \delta (z_4 - z_1)^2 \\ R_4 &= \delta \frac{(z_4 - z_1)}{z_1 z_4} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}\xi &= \frac{1}{A} [-f\varepsilon(kx + ly - \nu t) - \hat{B} \arctg \sqrt{x}\xi - \hat{C} \arctg \sqrt{\beta}\xi \\ &\quad - \frac{\hat{D}\xi}{1 + \alpha\xi^2 + \beta_{1,2}^2}] \triangleq \hat{X} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= R_1 - \frac{R_2}{1 + \alpha} + \frac{R_3}{(1 + \alpha)^2} + \frac{R_4}{1 + \beta} \\ \hat{B} &= -\frac{R_2\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha} + \frac{R_3\sqrt{\alpha}}{(1 + \alpha)^2} + \frac{R_4\sqrt{\alpha}}{2(1 + \alpha)} \\ \hat{C} &= \frac{R_4\sqrt{\beta}}{1 + \beta}, \quad \hat{D} = \frac{R_3\alpha}{2(1 + \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

显然

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \delta \left[\left(\frac{z_1 + \alpha z_4}{1 + \alpha} \right)^2 + \frac{A(1 + \alpha)}{z_1 + \alpha z_4} \right] = \delta \left(z_0^2 + \frac{A}{z_0} \right) \\ &= \delta \left(\nu^2 - \frac{(\sigma\nu)^3}{\nu} \right) = \delta \nu^2 (1 - \sigma^3) \neq 0 \end{aligned}$$

于是(3.8)可以转化为

$$\xi = \tanh \hat{X} \quad (3.10)$$

解(3.10)可得:

$$Z = \frac{Z_1 + \alpha Z_4 (1 - \operatorname{sech}^2 \hat{X})}{1 + \alpha (1 - \operatorname{sech}^2 \hat{X})} \quad (3.11)$$

这是一支导数在 $Z = Z_0$ 点间断的孤波解, 当 $\theta \rightarrow 0$ 时 $Z \rightarrow Z_1$; 当 $\theta \rightarrow \pm\infty$ 时, $Z \rightarrow 0$, 孤立波的振幅 $\dot{Z} = -Z_1$, H 的解析解表达式为

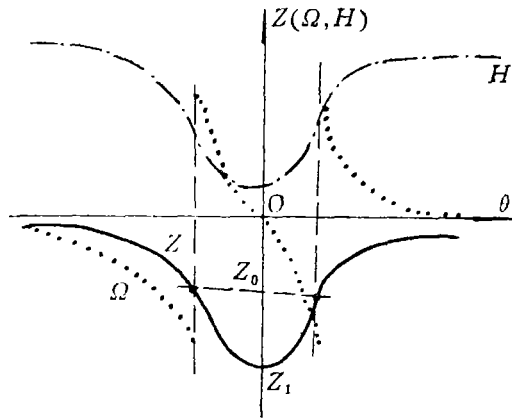


图 5

$$H = -v\tilde{H} \frac{1 + \alpha(1 - \operatorname{sech}^2 \hat{X})}{(Z_1 - v) + \alpha(Z_4 - v)(1 - \operatorname{sech}^2 \hat{X})} \quad (3.12)$$

这也是一支间断孤立波解, H 的振幅 \hat{H} 为

$$\hat{H} = \frac{v\tilde{H}\alpha(Z_4 - Z_1)}{(Z_1 - v)[(Z_1 - v) + \alpha(Z_4 - v)]} \quad (3.13)$$

有了 Z 的表达式, 可利用 (1.5) 式可得到 Ω 的解析解表达式. Z 、 H 、 Ω 的图形见图 5 所示, 图中实线表示曲线 Z , 虚线表示曲线 Ω , 点划线表示曲线 H .

我们用间断孤波解的性质可以解释天气过程中出现飑线的现象.

参 考 文 献

- [1] 黄思训, 二维非线性重力惯性波和孤立波存在可能性讨论, 中国科学 (待发表).
 [2] Sansone, G. and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*, Pergamon Press (1964).

On Discontinuous Period Solution and Discontinuous Solitary Wave of Two-Dimension Shallow Water Equation

Huang Si-xun

(*Meteorological Institute of Air Force, Nanjing*)

Abstract

In this paper we discuss discontinuous period solution and discontinuous solitary wave of the shallow water model of geophysical fluid dynamics. When we consider the properties of trajectory near non-equilibrium point, i. e. singular point, we find that if we introduce the concept of generalized solution (piecewise-smooth continuous solution), then the system may produce discontinuous period solution and the condition of discontinuous period solution can be obtained. When the system is degenerated, we find that the discontinuous solitary wave is existent in the system. In this paper we consider a series of problems and obtain analytic expression of discontinuous solution. This result is compared with squall line in the atmosphere, and both of them are similar.