

# 陀螺经纬仪运动的分析\*

王 洪 兰

(山东矿业学院, 1986年6月5日收到)

## 摘 要

本文用分析力学的方法分别研究了在: 1. 只有重力矩, 2. 考虑悬带扭矩; 3. 同时考虑悬带扭矩和空气阻尼作用下陀螺经纬仪的运动, 建立其运动方程, 分别求出其解, 并分析了陀螺经纬仪的运动规律及定向原理。

陀螺经纬仪是矿山测量中定向的主要仪器。在苏联 И. А. 卡查柯夫斯基等人著的《矿山测量学》和国内一些资料中对陀螺经纬仪定向原理的分析是不够严密的, 有些甚至是错误的。本文用分析力学的方法分别建立了陀螺经纬仪在: 1. 只考虑重力矩; 2. 还考虑悬带扭矩; 3. 还考虑悬带扭矩和空气阻力矩作用三种情况下的运动方程, 并求出其解, 分析了陀螺经纬仪的运动规律和定向原理。本文的分析结果, 可以纠正目前部分资料中的一些错误, 可以作为改进陀螺经纬仪定向计算方法和提高计算精度的依据, 并对陀螺经纬仪的构造及质量分析具有一定的参考价值。

## 一、力学模型及运动学分析

陀螺经纬仪是由陀螺仪和经纬仪两部分组成的, 陀螺仪部分称为陀螺经纬仪的灵敏部。

陀螺经纬仪靠其灵敏部进行定向, 灵敏部可简化为如下力学模型: 陀螺仪转子安装在陀螺房壳内, 转子轴与陀螺房固结在一起, 陀螺房上固连有悬挂柱, 整个陀螺房用柔性金属带自由悬挂于仪器壳体内, 陀螺房重心 $G$ 至悬挂点 $O$ 距离为 $a$ , 仪器在地球上纬度为 $\varphi$ 处使用, 使用时仪器基座相对地面不动。

建立如下坐标系, 如图1、图2所示:

1. 以悬挂 $O$ 点为原点, 相对惯性系做平动的坐标系 $O\xi\eta\zeta$ ;
2. 以 $O$ 为原点, 固结于地球的定向坐标系 $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ , 定向坐标系以地球自转角速度 $\omega_0$ 相对平动系转动;
3. 以 $O$ 为原点, 固结于陀螺房壳的莱沙尔坐标系 $Oxyz$ ,  $Oy$ 轴与转子自转角动量 $H$ 指向相同。取莱沙尔系可以使陀螺转子绕自转轴的转动分离出去, 以便于研究我们所关心的转子

\* 朱照宣推荐。

轴对固连于地球的定向系的运动，这一运动情况可以反映在莱沙尔系对定向系转动的莱沙尔角 $\alpha$ 、 $\beta$ 的变化规律当中。我们认定定向系中真北方向 $O\eta_0$ 为陀螺仪轴应找的方向。

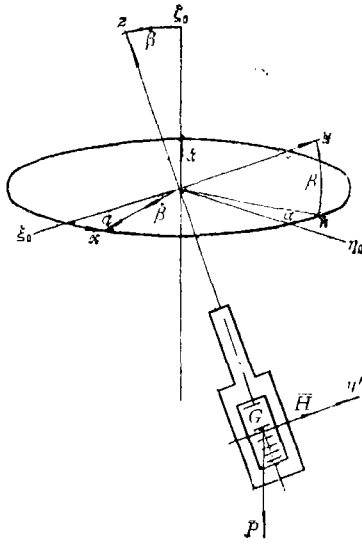


图 1

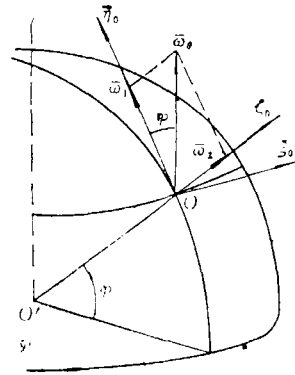


图 2

莱沙尔系 $Oxyz$ 的位置是由定向系 $O\xi_0\eta_0\xi_0$ 经过如下转动形成的：

$$(O\xi_0\eta_0\xi_0) \xrightarrow{\frac{\dot{\alpha}\xi_0}{\pi_\alpha}} (Oxn\xi_0)$$

$$(Oxn\xi_0) \xrightarrow{\frac{\beta x}{\pi_\beta}} (Oxyz)$$

其变换矩阵为：

$$\pi'_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi'_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\pi'_\alpha \cdot \pi'_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \cos\beta & \sin\alpha \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha \cos\beta & -\cos\alpha \sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

莱沙尔系对定向系转动的角速度为：

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\alpha}\xi_0 + \beta x \\ &= \beta x + \dot{\alpha} \sin\beta y + \dot{\alpha} \cos\beta z \end{aligned} \tag{1.1}$$

定向系对平动系转动的角速度为：

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \omega_e \cos\varphi \eta_0 + \omega_e \sin\varphi \xi_0 \\ &= \omega_e \cos\varphi (\sin\alpha x + \cos\alpha \cos\beta y - \cos\alpha \sin\beta z) \\ &\quad + \omega_e \sin\varphi (\sin\beta y + \cos\beta z) \end{aligned} \tag{1.2}$$

莱沙尔系对平动系转动的角速度为：

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \Omega_0 + \omega \\
 &= \Omega_x \mathbf{x} + \Omega_y \mathbf{y} + \Omega_z \mathbf{z} \\
 &= (\omega_e \cos \varphi \sin \alpha + \dot{\beta}) \mathbf{x} \\
 &\quad + (\omega_e \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta + \omega_e \sin \varphi \sin \beta + \dot{\alpha} \sin \beta) \mathbf{y} \\
 &\quad + (-\omega_e \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta + \omega_e \sin \varphi \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \beta) \mathbf{z}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

设转子绕转子轴转动的角速度为 $\dot{\psi}$ ，转子相对平动系转动的角速度为：

$$\begin{aligned}
 \Omega' &= \Omega + \dot{\psi} \mathbf{y} \\
 &= \Omega_x \mathbf{x} + (\Omega_y + \dot{\psi}) \mathbf{y} + \Omega_z \mathbf{z}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

## 二、只考虑重力矩作用时的运动

取角 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\psi$ 为广义坐标，首先列写系统的动能。设陀螺房壳绕 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴的主转动惯量为 $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，陀螺转子绕 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴的主转动惯量为 $J_x$ 、 $J_y$ 、 $J_z$ 。系统的动能为：

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} A \Omega_x^2 + \frac{1}{2} B \Omega_y^2 + \frac{1}{2} C \Omega_z^2 + \frac{1}{2} J_x \Omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y (\Omega_y + \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} J_z \Omega_z^2 \\
 &= \frac{1}{2} (A + J_x) \Omega_x^2 + \frac{1}{2} (C + J_z) \Omega_z^2 + \frac{1}{2} B \Omega_y^2 + \frac{1}{2} J_y (\Omega_y + \dot{\psi})^2 \\
 &= \frac{1}{2} (A + J_x) (\omega_e \cos \varphi \sin \alpha + \dot{\beta})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} (C + J_z) (-\omega_e \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta + \omega_e \sin \varphi \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} B (\omega_e \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta + \omega_e \sin \varphi \sin \beta + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_y (\omega_e \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta + \omega_e \sin \varphi \sin \beta + \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\psi})^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

再求系统的广义力。在平动系里，设作用在陀螺仪上的总力矩为：

$$\mathbf{m} = m_x \mathbf{x} + m_y \mathbf{y} + m_z \mathbf{z}$$

各广义坐标作小的虚变更时的虚功为：

$$\begin{aligned}
 \delta A &= (m_x \mathbf{x} + m_y \mathbf{y} + m_z \mathbf{z}) \cdot [\delta \beta \mathbf{x} + (\sin \beta \delta \alpha + \delta \psi) \mathbf{y} + \cos \beta \delta \alpha \mathbf{z}] \\
 &= (m_y \sin \beta + m_z \cos \beta) \delta \alpha + m_x \delta \beta + m_y \delta \psi
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } Q_\alpha = m_y \sin \beta + m_z \cos \beta, \quad Q_\beta = m_x, \quad Q_\psi = m_y \tag{2.2}$$

将动能及广义力代入第二类拉格朗日方程即可得到陀螺仪的动力学方程。首先引进如下几个假定：

- 1° 陀螺仪转子轴相对定向系的两个偏角 $\alpha$ 、 $\beta$ 及 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 都是小量；
- 2° 转子自转角动量 $\mathbf{H}$ 足够大；
- 3° 在陀螺仪正常运转时，陀螺马达的驱动力矩与转子轴承处的摩擦阻力矩平衡，因此不加考虑。

首先研究作用于系统的外力矩只有重力矩，暂且不计悬带扭矩和空气阻力矩作用的情况。

重心在莱沙尔系内的坐标：

$$x_a=0, y_a=0, z_a=-a$$

$$\text{重力: } \mathbf{P} = -P\mathbf{l}_0 = -P(\sin\beta \mathbf{y} + \cos\beta \mathbf{z})$$

$$\text{外力矩: } \mathbf{M}_{\text{外}} = \mathbf{M}_p = \mathbf{OG} \times \mathbf{P} = -P a \sin\beta \mathbf{x} \quad (2.3)$$

$$\text{广义力: } Q_a=0, Q_\beta = -P a \sin\beta, Q_\psi = 0$$

注意到  $\partial T / \partial \psi = 0$ , 且  $Q_\psi = 0$ ,  $\psi$  是循环坐标, 可利用罗兹方程建立消去循环坐标的动力学方程, 为此求循环动量积分:

$$\begin{aligned} P_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_y (\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta \\ &\quad + \omega_e \sin\varphi \sin\beta + \dot{\alpha} \sin\beta + \dot{\psi}) = H \\ \dot{\psi} &= \frac{H}{J_y} - (\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta + \omega_e \sin\varphi \sin\beta + \dot{\alpha} \sin\beta) \end{aligned}$$

罗兹函数

$$\begin{aligned} R &= T - P_\psi \dot{\psi} \\ &= \frac{1}{2} (A + J_x) (\omega_e \cos\varphi \sin\alpha + \dot{\beta})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (C + J_z) (-\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta + \omega_e \sin\varphi \cos\beta + \dot{\alpha} \cos\beta)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} B (\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta + \omega_e \sin\varphi \sin\beta + \dot{\alpha} \sin\beta)^2 \\ &\quad + H (\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \cos\beta + \omega_e \sin\varphi \sin\beta + \dot{\alpha} \sin\beta) - \frac{1}{2} \frac{H^2}{J_y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

将罗兹函数和广义力代入罗兹方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= Q_\alpha \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \beta} &= Q_\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

即可得到消去循环坐标后的动力学方程。当  $H$  充分大时, 设想在方程左边式中, 不包含  $H$  因子的各项和包含  $H$  因子的各项相比可略去不计, 得到简化了的动力学方程:

$$\left. \begin{aligned} H(\omega_e \cos\varphi \sin\alpha + \dot{\beta}) &= 0 \\ -H(-\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta + \omega_e \sin\varphi \cos\beta + \dot{\alpha} \cos\beta) &= -P a \sin\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

这一组方程也可以由进动简化方程直接得到。进动简化方程:  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_{\text{外}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\Omega_z H \mathbf{x} + \Omega_x H \mathbf{z} \\ &= M_x \mathbf{x} + M_y \mathbf{y} + M_z \mathbf{z} \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \left. \begin{aligned} H\Omega_x &= M_x \\ -H\Omega_z &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

将(1.3)式中的角速度和(2.3)式中的外力矩代入此方程, 也可得到动力学方程组(2.6)。这组方程描述了陀螺仪轴运动的主要规律, 即进动运动, 而略去了章动。

由于 $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 0$ , 方程组(2.6)可以简化为

$$\begin{cases} \dot{\beta} + \omega_e \cos \varphi \cdot \alpha = 0 \\ \dot{\alpha} - \frac{k^2(\beta - \beta^*)}{\omega_e \cos \varphi} = 0 \end{cases}$$

其中:  $k^2 = \left( \omega_e \cos \varphi + \frac{aP}{H} \right) \omega_e \cos \varphi$

$$\beta^* = \frac{\omega_e \sin \varphi}{\omega_e \cos \varphi + aP/H}$$

分别消去 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ , 得到:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + k^2 \alpha &= 0 \\ \ddot{\beta} + k^2 \beta &= k^2 \beta^* \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\text{解出} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= c \cos(kt + \varepsilon) \\ \beta &= \beta^* - b \sin(kt + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中  $b = \frac{c \omega_e \cos \varphi}{k}$

这个解用图形来描述, 从正南向北看, 陀螺轴的陀尖绕着 $(0, \beta^*)$ 为中心画一个椭圆轨迹, 如图3所示。此解表达陀螺仪轴的无阻尼振荡。 $\alpha$ 角是陀螺仪轴对子午面的偏角, 只要记录下 $\alpha = c$ ,  $\alpha = -c$ 两个逆转点的位置, 即可确定子午面的位置。

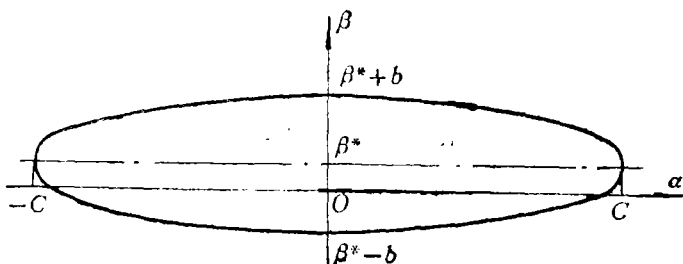


图 3

将式(2.9)代回式(2.7), 得到

$$\frac{b}{c} = \frac{\omega_e \cos \varphi}{k} = j$$

通常这个 $j$ 很小, 也就是说上述椭圆拉扁得很厉害, 一般观察不到 $\beta$ 角的变化。

这一振荡的圆频率为

$$k = \sqrt{\left( \omega_e \cos \varphi + \frac{aP}{H} \right) \omega_e \cos \varphi} \approx \sqrt{\frac{\omega_e \cos \varphi Pa}{H}}$$

$$\text{周期为} \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{\omega_e \cos \varphi Pa}} \quad (2.10)$$

以上我们在惯性系内研究了陀螺仪轴的运动, 我们也可以在以地球为参考体的非惯性系内研究陀螺仪轴的运动。牵连运动的角速度就是地球自转的角速度 $\omega_e$ 。引入惯性陀螺力矩 $M_g$ 。为便于讨论, 将 $\omega_e$ 分解为三个分量:

$$\omega_e = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$$

$$\omega_2 = \omega_e \sin \varphi \zeta_0$$

$$\omega_3 = \omega_e \cos\varphi \sin\alpha \quad x$$

$$\omega_4 = \omega_e \cos\varphi \cos\alpha \quad on$$

将惯性陀螺力矩  $\mathbf{M}_g$  相应也分解为三个分量:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_{g2} + \mathbf{M}_{g3} + \mathbf{M}_{g4}$$

$$\mathbf{M}_{g2} = \mathbf{H} \times \omega_2 = H\omega_e \sin\varphi \cos\beta \quad x$$

$$\mathbf{M}_{g3} = \mathbf{H} \times \omega_3 = -H\omega_e \cos\varphi \sin\alpha \quad z$$

$$\mathbf{M}_{g4} = \mathbf{H} \times \omega_4 = -H\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta \quad x$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g &= \mathbf{H} \times \omega_e = \mathbf{M}_{g2} + \mathbf{M}_{g3} + \mathbf{M}_{g4} \\ &= (H\omega_e \sin\varphi \cos\beta - H\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta) x \\ &\quad - H\omega_e \cos\varphi \sin\alpha \quad z \end{aligned} \quad (2.11)$$

此惯性陀螺力矩应看作实在作用在陀螺仪轴上. 此时, 总外力矩为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{外} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_P \\ &= (H\omega_e \sin\varphi \cos\beta - H\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta - P \sin\beta) x \\ &\quad - H\omega_e \cos\varphi \sin\alpha \quad z \end{aligned} \quad (2.12)$$

将此外力矩和莱沙尔系相对定向系的角速度  $\omega$  代入进动方程

$$\begin{cases} H\omega_x = M'_x \\ -H\omega_z = M'_z \end{cases}$$

也同样可得到陀螺仪轴的动力学方程组(2.6).

惯性力矩  $\mathbf{M}_{g3} = -H\omega_e \cos\varphi \sin\alpha z$  使陀螺轴产生铅垂面内的摆动, 即产生  $\beta$  角的变化, 使重心  $G$  偏离过  $O$  点的铅垂线而产生重力矩  $\mathbf{M}_P$ , 重力矩使陀螺轴在水平面内向子午面方向进动. 文献[5]、[6]、[10]等把惯性力矩  $\mathbf{M}_{g3}$  称为“指向力矩”, 认为“是这个力矩使陀螺轴向子午面方向移动”, 这是不确切的, 因而引起了一些误解和混乱.

### 三、考虑重力矩、悬带扭矩作用时陀螺轴的运动

设悬挂带刚性扭转系数为  $D_B$ , 悬带扭矩与转角成正比:  $\mathbf{M}_D = -D_B \alpha z$

外力矩  $\mathbf{M}_{外1} = \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_D = -P \sin\beta x - D_B \alpha z$

代入进动方程, 得到

$$\left. \begin{aligned} H(\omega_e \cos\varphi \sin\alpha + \dot{\beta}) &= -D_B \alpha \\ -H(-\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta + \omega_e \sin\varphi \cos\beta + \dot{\alpha} \cos\beta) &= -P \sin\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

化简为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta} + \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{H} \alpha &= 0 \\ \dot{\alpha} - \frac{k^2(B - \beta^*)}{\omega_e \cos\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中  $k$ 、 $\beta^*$  同前,

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\beta} + \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{H} \dot{\alpha} &= 0 \\ \ddot{\alpha} - \frac{k^2}{\omega_e \cos\varphi} \dot{\beta} &= 0 \end{aligned} \right.$$

消去 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 得到:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{\omega_e \cos\varphi} k^2 \beta = \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{H\omega_e \cos\varphi} k^2 \beta^* \\ \ddot{\alpha} + \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{H\omega_e \cos\varphi} k^2 \beta = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } k_1^2 = \frac{H\omega_e \cos\varphi + D_B}{H\omega_e \cos\varphi} k^2 = \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{D_B}{H}\right) \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{aP}{H}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\beta} + k_1^2 \beta &= k_1^2 \beta^* \\ \ddot{\alpha} + k_1^2 \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

解出

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= c_1 \cos(k_1 t + \varepsilon_1) \\ \beta &= \beta^* - b_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中

$$b_1 = \frac{c_1 \omega_e \cos\varphi}{k_1}$$

陀螺轴仍做椭圆周期摆动, 只是椭圆的参数和摆动的周期发生了一些变化.

$$\text{椭圆长短轴之比 } j_1 = \frac{b_1}{c_1} = \frac{\omega_e \cos\varphi}{k_1}$$

$$\text{圆频率 } k_1 = \sqrt{\left(\omega_e \cos\varphi + \frac{D_B}{H}\right) \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{aP}{H}\right)} \approx \sqrt{\frac{\omega_e \cos\varphi (aP + D_B)}{H}}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{\omega_e \cos\varphi (aP + D_B)}} \quad (3.5)$$

#### 四、考虑重力矩、悬带扭矩和空气阻力矩作用时陀螺仪轴的运动

设空气阻力系数为 $n$ , 阻力矩与摆动角速度成正比, 空气阻力矩为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_N &= -n\dot{\alpha}\mathbf{z}_0 - n\dot{\beta}\mathbf{x} \\ &= -n\dot{\beta}\mathbf{x} - n\dot{\alpha}\sin\beta\mathbf{y} - n\dot{\alpha}\cos\beta\mathbf{z} \end{aligned}$$

略去二阶微量, 化简为

$$\mathbf{M}_N = -n\dot{\alpha}\mathbf{z} - n\dot{\beta}\mathbf{x} \quad (4.1)$$

外力矩

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{外}2} &= \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_N \\ &= (-P\sin\beta - n\dot{\beta})\mathbf{x} + (-D_B\alpha - n\dot{\alpha})\mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

代入进动方程, 得到

$$\left. \begin{aligned} H(\omega_e \cos\varphi \sin\alpha + \dot{\beta}) &= -D_B\alpha - n\dot{\alpha} \\ -H(-\omega_e \cos\varphi \cos\alpha \sin\beta + \omega_e \sin\varphi \cos\beta + \dot{\alpha} \cos\beta) &= -P\sin\beta - n\dot{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} H\dot{\beta} + n\dot{\alpha} + (H\omega_e \cos\varphi + D_B)\alpha &= 0 \\ H\dot{\alpha} - n\dot{\beta} - (H\omega_e \cos\varphi + Pa)\beta + H\omega_e \sin\varphi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} \dot{\beta} + \frac{n}{H} \dot{\alpha} + \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{D_B}{H}\right)\alpha = 0 \\ \dot{\alpha} - \frac{n}{H} \dot{\beta} - \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{Pa}{H}\right)\beta + \omega_e \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta} + \frac{n}{H} \dot{\alpha} + \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{D_B}{H}\right)\alpha = 0 \\ \dot{\alpha} - \frac{n}{H} \dot{\beta} - \left(\omega_e \cos\varphi + \frac{Pa}{H}\right)\beta + \omega_e \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + \frac{n}{H} \ddot{\alpha} + \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{D_B}{H} \right) \dot{\alpha} = 0 & (4.6) \\ \ddot{\alpha} - \frac{n}{H} \ddot{\beta} - \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{P_a}{H} \right) \dot{\beta} = 0 & (4.7) \end{cases}$$

从(4.4)解出

$$\dot{\beta} = -\frac{n}{H} \dot{\alpha} - \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{D_B}{H} \right) \alpha \quad (4.8)$$

从(4.6)解出

$$\ddot{\beta} = -\frac{n}{H} \ddot{\alpha} - \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{D_B}{H} \right) \dot{\alpha}$$

代入(4.7)

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{n^2}{H^2} \right) \ddot{\alpha} + \frac{n}{H} \left( 2\omega_s \cos \varphi + \frac{D_B}{H} + \frac{P_a}{H} \right) \dot{\alpha} \\ + \left[ \omega_s^2 \cos^2 \varphi + \omega_s \cos \varphi \left( \frac{P_a}{H} + \frac{D_B}{H} \right) + \frac{P_a D_B}{H^2} \right] \alpha = 0 \end{aligned}$$

式中 $H$ 很大,  $n$ 、 $D_B$ 很小, 化简为:

$$\ddot{\alpha} + \frac{2n}{H} \omega_s \cos \varphi \dot{\alpha} + \omega_s \cos \varphi \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{P_a}{H} + \frac{D_B}{H} \right) \alpha = 0$$

$$\text{令} \quad \mu = \frac{n}{H} \omega_s \cos \varphi, \quad k_1^2 = \omega_s \cos \varphi \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{P_a}{H} + \frac{D_B}{H} \right)$$

则有

$$\ddot{\alpha} + 2\mu \dot{\alpha} + k_1^2 \alpha = 0 \quad (4.9)$$

我们只考虑空气阻尼即小阻尼情况,  $\mu \ll k_1$ , 方程的解为

$$\alpha = c_2 \exp[-\mu t] \sin(\sqrt{k_1^2 - \mu^2} t + \varepsilon_2) \quad (4.10)$$

此解表达陀螺轴的阻尼振荡, 随着时间的增加, 振幅按几何级数衰减, 其运动如图4所示. 振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1^2 - \mu^2}} \quad (4.11)$$

由于阻尼的作用, 振动的周期相应增大了, 但因为 $\mu \ll k_1$ , 周期变化不大.

从(4.10)式得

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = c_2 \exp[-\mu t] \left[ \sqrt{k_1^2 - \mu^2} \cos(\sqrt{k_1^2 - \mu^2} t + \varepsilon_2) \right. \\ \left. - \mu \sin(\sqrt{k_1^2 - \mu^2} t + \varepsilon_2) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

将(4.8)式代入(4.5)式, 得到

$$\left( 1 + \frac{n^2}{H^2} \right) \dot{\alpha} + \frac{n}{H} \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{D_B}{H} \right) \alpha - \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{P_a}{H} \right) \dot{\beta} + \omega_s \sin \varphi = 0$$

$$\text{化简为} \quad \dot{\alpha} + \frac{n}{H} \omega_s \cos \varphi \cdot \alpha - \left( \omega_s \cos \varphi + \frac{P_a}{H} \right) \dot{\beta} + \omega_s \sin \varphi = 0$$

将(4.10)、(4.12)代入此式, 得到

$$c_2 \exp[-\mu t] \left[ \sqrt{k_1^2 - \mu^2} \cos(\sqrt{k_1^2 - \mu^2} t + \varepsilon_2) + \omega_s \sin \varphi \right]$$



$$= \left( \omega_e \cos \varphi + \frac{Pa}{H} \right) \beta \quad (4.13)$$

解出

$$\beta = \beta^* + b_2 \exp[-\mu t] \cos(\sqrt{k_2^2 - \mu^2} t + \varepsilon_2) \quad (4.14)$$

其中

$$\beta^* = \frac{\omega_e \sin \varphi}{\omega_e \cos \varphi + Pa/H} \quad b_2 = \frac{c_2 \sqrt{k_2^2 - \mu^2}}{\omega_e \cos \varphi + Pa/H}$$

解得的 $\alpha$ 、 $\beta$ 表示在有阻尼情况下，陀螺轴的运动规律。用图形来描述，从正南向北看，陀螺轴的陀尖绕着 $(0, \beta^*)$ 为中心作螺旋线运动，如图5所示。

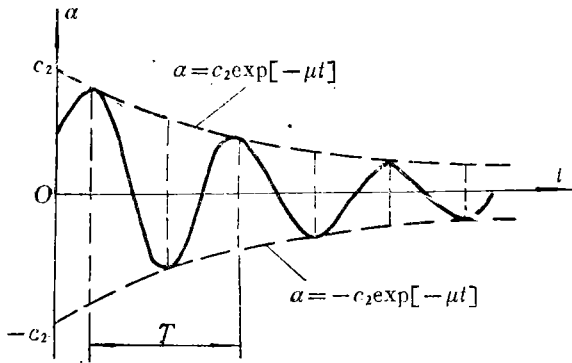


图 4

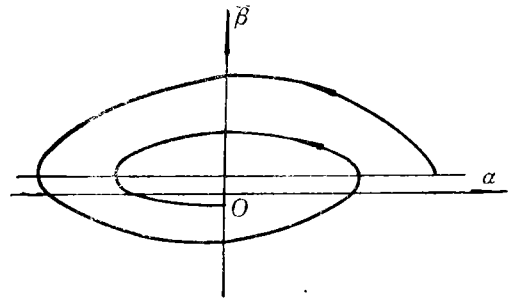


图 5

文献[6]、[10]认为“因灵敏部轴承里有摩擦，使摆幅在方位上和高度上逐渐衰减。衰减程度决定于摩擦力矩的大小。摆动的性质决定于摩擦力矩是否保持一定。当摩擦力矩的大小和方向都不变时，陀螺仪轴衰减微弱的摆动具有以下规律性：前后摆幅的比值（衰减系数 $f$ ）保持常数。即 $f = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \text{const}$ ”。

根据陀螺经纬仪灵敏部的结构，只有在陀螺转子和转子轴之间有轴承，可能产生摩擦。在仪器正常工作时，陀螺转子平稳运转，自转角速度保持常量，转子轴承处的摩擦阻力矩与陀螺马达的驱动力矩相平衡，并且这一摩擦阻力矩的力矩矢总是沿着陀螺仪轴方向的，对陀螺仪轴的摆动不会产生影响。另外还存在悬带扭矩的作用，根据前面的推导，在陀螺仪轴做椭圆周期摆动时，悬带扭矩只会使椭圆的参数和摆动的周期发生变化，而不会使摆幅衰减。摆幅衰减主要是由空气阻尼造成的，摆幅是按指数规律衰减的，如图4所示。前后两摆幅的比值为：

$$f = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \exp[\mu T]$$

我们对用 $J_0-T_{00}$ 型陀螺经纬仪测定的30组数据进行分析，基本符合这一规律。

### 参 考 文 献

- [1] 陈滨，《分析动力学》，北京大学出版社（待出版）。
- [2] 朱照宣、周起钊、殷金生，《理论力学》，北京大学出版社（1982），217—255。
- [3] E. И. 尼古莱，《迴转仪的理论》，张燮译，科学出版社（1956），84—93。

- [ 4 ] 肖尚彬、董秋泉, 《陀螺力学》, 人民教育出版社 (1980), 59—61.
- [ 5 ] 煤炭科学院唐山分院陀螺经纬仪组, 《陀螺经纬仪基本原理、结构与定向》, 煤炭工业出版社 (1982), 77—84.
- [ 6 ] 中国矿业学院测量教研室, 《矿山测量学》, 煤炭工业出版社 (1979), 159—180.
- [ 7 ] 李青岳, 《工程测量学》, 测绘出版社 (1984), 245—272.
- [ 8 ] 刘延伯, 《工程测量》, 冶金工业出版社 (1984), 248—272.
- [ 9 ] 王洪兰, 陀螺经纬仪定向的力学原理, 矿山测量, 3 (1985), 43—46.
- [10] Казаковские Д. А. и т. д., *Маркшейдерское Дело*, Углетехиздат Москва (1959), 461—470.
- [11] Arnold, R. N. and L. Maunder, *Gyrodynamics*, Academic Press, New York and London (1961).

## Analysis of the Motion of a Gyro-theodolite

Wang Hong-lan

(*Shandong Mining Institute, Tai'an, Shandong*)

### Abstract

With the method of analytical mechanics, this paper studies the motions of a gyro-theodolite under the action of (1) the torque of gravity only, (2) the torque applied by the band suspension, (3) the torque of the band suspension with air damping considered, the equations of motion are then established and their solutions are found. Furthermore, analysis of the law of motion and the behaviour of gyro-theodolite during the orientation is made.