应用数学和力学，第 8 卷第 8 期(1987年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

加劲空心圆柱的径向裂纹分析*

王晓春**　　汤任基

（兰州大学，1986年 3 月28日收到）

摘　　要

本文结合使用 Michell 环形域级数解及单裂纹解，导出了外边界被加劲的空心圆柱的径向裂纹积分方程，进而分析了加劲薄膜对裂纹应力强度因子的影响．文中给出了若干数值计算结果．

一、引　　言

内边界被加劲的空心圆柱的径向裂纹问题，已由文[1]作了研究．本文进一步研究外边界被加劲的情形．利用 Michell 解[2]及单裂纹基本解，在对加劲圈作了薄膜的假定后，导出了问题的积分方程．其中除柯西核外，还有一个以无穷级数表示的 Fredholm 核．在某些特殊情形，通过级数的极限运算，后者还可以有限的闭合形式给出．为了说明结果的应用，文中使用数值方法，计算了内裂纹的应力强度因子，在外边界无加劲的情形，得到的结果与文献[1, 3]相符较好．对于裂纹与加劲薄膜接触所引起的应力奇性，可与文[1]一样通过渐近分析求得，本文由于篇幅不再重覆．

二、单裂纹解与Michell解

为了后面使用，这里直接给出二组基本解答[1,2]．

1. 单裂纹解

在极坐标系(r,θ)中，若记无限域上（图1中$b\to\infty$而得的域）一径向裂纹(e,g)的周向位错密度函数为：

$$f(r)=\frac{\partial}{\partial r}[u_\theta(r,+0)-u_\theta(r,-0)]\qquad (e<r<g)\tag{2.1}$$

式中$u_\theta(r,\pm0)$为裂纹(e,g)上下岸上的周向位移．则此裂纹在无限域中产生的极坐标应力分量由以下公式给出[4]：

$$\sigma_{1rr}(r,\theta)=-\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\left[\frac{r\cos\theta-t-2t\sin^2\theta}{r^2+t^2-2rt\cos\theta}-\frac{2t^2\sin^2\theta(r\cos\theta-t)}{(r^2+t^2-2rt\cos\theta)^2}\right]f(t)dt\tag{2.2}$$

* 中国科学院科学基金资助的课题．
** 兰州大学86届硕士研究生（断裂力学方向）．

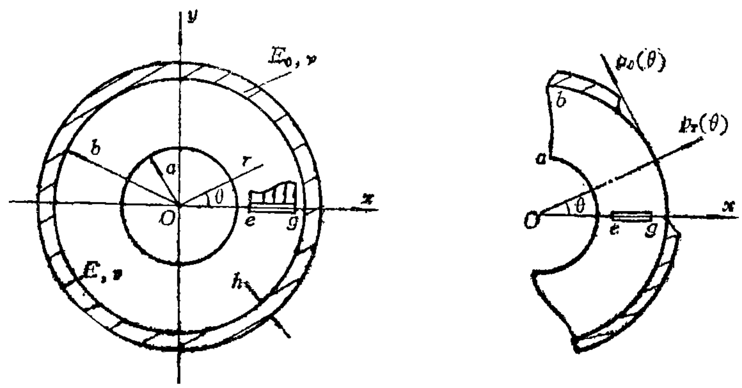

图 1

$$\sigma_{1r\theta}(r,\theta)=\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\left[\frac{\sin\theta(2t\cos\theta-r)}{r^2+t^2-2rt\cos\theta}-\frac{2t\sin\theta(r\cos\theta-t)(r-t\cos\theta)}{(r^2+t^2-2rt\cos\theta)^2}\right]f(t)dt \tag{2.3}$$

$$\sigma_{1\theta\theta}(r,\theta)=-\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\left[\frac{2\cos\theta(r-t\cos\theta)+r\cos\theta-t}{r^2+t^2-2rt\cos\theta}-\frac{2(r\cos\theta-t)(r-t\cos\theta)^2}{(r^2+t^2-2rt\cos\theta)^2}\right]f(t)dt \tag{2.4}$$

式中μ是剪切弹性模量，$\kappa=3-4\nu$为平面应变，$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$为平面应力，ν为泊松比。

为了能与 Michell 级数解配合使用，解决本文提出的问题，这里给出圆周$r=a$及$r=b$上的应力级数展式：

$$\sigma_{1r\theta}(a,\theta)=\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin n\theta f(t)dt \tag{2.5}$$

$$\sigma_{1rr}(a,\theta)=-\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)\cos n\theta f(t)dt \tag{2.6}$$

及

$$\sigma_{1\theta\theta}(b,\theta)=-\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)\cos n\theta f(t)dt \tag{2.7}$$

$$\sigma_{1r\theta}(b,\theta)=\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\sum_{n=1}^{\infty}D_n(t)\sin n\theta f(t)dt \tag{2.8}$$

$$\sigma_{1rr}(b,\theta)=-\frac{\mu}{\pi(\kappa+1)}\int_e^g\sum_{n=0}^{\infty}E_n(t)\cos n\theta f(t)dt \tag{2.9}$$

其中系数 $A_n\sim E_n$ 由以下公式给出

$$B_0=-\frac{2}{t},\quad C_0=-E_0=\frac{2}{b}\left(\frac{t}{b}\right) \tag{2.10}$$

$$A_1=-B_1=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{t}\right)^2,\quad C_1=\frac{1}{b}\left[2+3\left(\frac{t}{b}\right)^2\right] \tag{2.11}$$

$$D_1=-E_1=\frac{1}{b}\left[3\left(\frac{t}{b}\right)^2-2\right] \tag{2.12}$$

当$n\geqslant 2$时

$$A_n=\frac{1}{a}\left[n\left(\frac{a}{t}\right)^{n+1}-(n-2)\left(\frac{a}{t}\right)^{n-1}\right],\quad B_n=\frac{n-2}{a}\left[\left(\frac{a}{t}\right)^{n+1}-\left(\frac{a}{t}\right)^{n-1}\right] \tag{2.13}$$

$$C_n=\frac{1}{b}\left[(n+2)\left(\frac{t}{b}\right)^{n+1}-(n-2)\left(\frac{t}{b}\right)^{n-1}\right],\quad D_n=\frac{1}{b}\left[(n+2)\left(\frac{t}{b}\right)^{n+1}-n\left(\frac{t}{b}\right)^{n-1}\right] \tag{2.14}$$

$$E_n=\frac{n+2}{b}\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^{n+1}+\left(\frac{t}{b}\right)^{n-1}\right] \tag{2.15}$$

2. **Michell 解**

若图1环形域内外周界($r=a$及$r=b$)上作用的外载与极轴Ox对称，且外载的主矢和主矩为零，则域中的应力由 Michell 解给出为：

$$\sigma_{2rr}(r,\theta)=\int_e^g\left\{\frac{b_0}{r^2}+2c_0+\left(-\frac{2c_1}{r^3}+2d_1r\right)\cos\theta\right.$$
$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}[a_nr^{n-2}+b_n(n-2)r^n+c_nr^{-n-2}+d_n(n+2)r^{-n}]\cos n\theta\right\}f(t)dt \tag{2.16}$$

$$\sigma_{2r\theta}(r,\theta)=\int_e^g\left\{\left(-\frac{2c_1}{r^3}+2d_1r\right)\sin\theta\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}[a_nr^{n-2}+b_nnr^n-c_nr^{-n-2}-d_nnr^{-n}]\sin n\theta\right\}f(t)dt \tag{2.17}$$

$$\sigma_{2\theta\theta}(r,\theta)=\int_e^g\left\{-\frac{b_0}{r^2}+2c_0+\left(\frac{2c_1}{r^3}+6d_1r\right)\cos\theta\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}[a_nr^{n-2}+b_n(n+2)r^n+c_nr^{-n-2}+d_n(n-2)r^{-n}]\cos\theta\right\}f(t)dt \tag{2.18}$$

以上公式中系数$a_n\sim d_n$是变量t的待定函数，它们由具体问题的边界条件确定，下节讨论图1所示问题的边界条件。

三、边 界 条 件

现在考察图1所示空心圆柱，它的内外半径分别为a和b，裂纹(e,g)沿径向，圆柱外壁由薄膜加劲，其厚度为h。因为这里只考虑裂纹端点的应力奇性，故假定裂纹上下表面作用有对称的法向张开载荷$q(r)$，除此而外，圆柱不再承受其他外载。此时，圆柱中的应力可由上面给出的二种解组合得到，即总应力为：

$$\sigma_{ij}(r,\theta)=\sigma_{1ij}(r,\theta)+\sigma_{2ij}(r,\theta)\qquad(i,j=r,\theta) \tag{3.1}$$

于是，问题的边界条件为：

$$\sigma_{1rr}(a,\theta)+\sigma_{2rr}(a,\theta)=0 \tag{3.2}$$

$$\sigma_{1r\theta}(a,\theta)+\sigma_{2r\theta}(a,\theta)=0 \tag{3.3}$$

$$\sigma_{1rr}(b,\theta)+\sigma_{2rr}(b,\theta)=p_r(\theta) \tag{3.4}$$

$$\sigma_{1r\theta}(b,\theta)+\sigma_{2r\theta}(b,\theta)=p_\theta(\theta) \tag{3.5}$$

在裂纹(e,g)上应满足以下条件：

$$\sigma_{1\theta\theta}(r,\pm 0)+\sigma_{2\theta\theta}(r,\pm 0)=-q(r) \qquad (e<r<g) \tag{3.6}$$

以上公式中，$p_r(\theta)$和$p_\theta(\theta)$为圆柱外壁加劲薄膜对圆柱产生的径向和周向约束载荷，由薄壳理论求得为：

$$p_r(\theta)=-\lambda\sigma_{\theta\theta}(b,\theta),\quad p_\theta(\theta)=\lambda\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}(b,\theta)}{\partial\theta} \tag{3.7}$$

式中

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{hE_0}{Eb-E_0\nu h} & (\text{平面应力}) \quad (3.8)\\[2ex] \dfrac{E_0(1-\nu^2)h}{Eb(1-\nu^2)-E_0\nu h(1+\nu)} & (\text{平面应变}) \quad (3.9)\end{cases}$$

将上节给出的应力代入边界条件(3.2)～(3.5)，则得未知系数α_n～δ_n满足的代数方程组

$$\frac{\beta_0}{a^2}+2\gamma_0=-B_0,\quad \frac{\beta_0}{b^2}+2\gamma_0+\lambda\left(-\frac{\beta_0}{b^2}+2\gamma_0\right)=-E_0-\lambda C_0 \tag{3.10}$$

$$-\frac{2\gamma_1}{a^3}+2\delta_1 a=A_1,\quad -\frac{2\gamma_1}{a^3}+2\delta_1 a=-B_1 \tag{3.11}$$

$$-\frac{2\gamma_1}{b^3}+2\delta_1 b-\lambda\left(-\frac{2\gamma_1}{b^3}-6\delta_1 b\right)=D_1-\lambda C_1,\quad -\frac{2\gamma_1}{b^3}+2\delta_1 b+\lambda\left(\frac{2\gamma_1}{b^3}+6\delta_1 b\right)$$
$$=-E_1-\lambda C_1 \tag{3.12}$$

当$n\geqslant 2$时

$$a^{n-2}\alpha_n+na^n\beta_n-a^{-n-2}\gamma_n-na^{-n}\delta_n=A_n \tag{3.13}$$

$$a^{n-2}\alpha_n+(n-2)a^n\beta_n+a^{-n-2}\gamma_n+(n+2)a^{-n}\delta_n=B_n \tag{3.14}$$

$$b^{n-2}\alpha_n+nb^n\beta_n-b^{-n-2}\gamma_n-nb^{-n}\delta_n+n\lambda[b^{n-2}\alpha_n+(n+2)b^n\beta_n+b^{-n-2}\gamma_n$$
$$+(n-2)b^{-n}\delta_n]=D_n-n\lambda C_n \tag{3.15}$$

$$-[b^{n-2}\alpha_n+(n-2)b^n\beta_n+b^{-n-2}\gamma_n+(n+2)b^{-n}\delta_n]+\lambda[b^{n-2}\alpha_n+(n+2)b^n\beta_n$$
$$+b^{-n-2}\gamma_n+(n-2)b^{-n}\delta_n]=-E_n-\lambda C_n \tag{3.16}$$

式中

$$\alpha_n=-\frac{\pi(\kappa+1)}{\mu}a_n,\quad \beta_n=-\frac{\pi(\kappa+1)}{\mu}b_n \tag{3.17}$$

$$\gamma_n=-\frac{\pi(\kappa+1)}{\mu}c_n,\quad \delta_n=-\frac{\pi(\kappa+1)}{\mu}d_n \tag{3.18}$$

此外，由公式(2.11)和(2.12)知，方程(3.11)和(3.12)只给出二个有用的独立方程，因而上面的系数方程组(3.10)～(3.16)是可解的，其结果如下：

$$\beta_0=-\frac{2a^2}{(1+\lambda)b^2-(1-\lambda)a^2}\left[(1-\lambda)t-(1+\lambda)\frac{b^2}{t}\right] \tag{3.19}$$

$$\gamma_0=\frac{1-\lambda}{(1+\lambda)b^2-(1-\lambda)a^2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right) \tag{3.20}$$

$$\gamma_1=\frac{a^4}{(1+3\lambda)b^4-(1-\lambda)a^4}\left[\frac{3(1-\lambda)t^2}{2}-(1+\lambda)b^2-\frac{(1-3\lambda)b^4}{2t^2}\right] \tag{3.21}$$

$$\delta_1=\frac{1}{(1+3\lambda)b^4-(1-\lambda)a^4}\left[\frac{3(1-\lambda)t^2}{2}-(1+\lambda)b^2-\frac{(1-\lambda)a^4}{2t^2}\right] \tag{3.22}$$

以及($n\geqslant 2$)：

$$\alpha_n=-(n-2)t^{1-n}+(1-n)a^{-2n}\gamma_n-n^2a^{-2n+2}\delta_n \tag{3.23}$$

$$\beta_n=t^{-n-1}+a^{-2n-2}\gamma_n+(n+1)a^{-2n}\delta_n \tag{3.24}$$

$$\gamma_n=\Delta_1/\Delta,\quad \delta_n=\Delta_2/\Delta \tag{3.25}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_1=&2(n+2)t^{n+1}[-n^2(1-\lambda)a^{2-2n}b^{-4}+(n^2-1)(1+\lambda)a^{-2n}b^{-2}+(1+\lambda-2\lambda n)b^{-2n-2}]\\&+2n^2(n+1)t^{n-1}a^{-2n}[(1+\lambda)a^2b^{-2}-(1+3\lambda)]+2n^2t^{-n-1}[(1+\lambda+2\lambda n)a^{2-2n}b^{2n-2}\\&-(1+3\lambda)]+2(n-2)(n+1)t^{1-n}[(1+\lambda)b^{-2}-(1+\lambda+2\lambda n)a^{-2n}b^{2n-2}]\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2=&2(n-1)(n+2)t^{n+1}a^{-2n}[(1-\lambda)b^{-4}-(1+\lambda)a^{-2}b^{-2}]+2t^{n-1}a^{-2n}[(1-n^2)(1+\lambda)b^{-2}\\&+n^2(1+3\lambda)a^{-2}+(-1-\lambda+2\lambda n)a^{2n}b^{-2n-2}]+2(n-1)t^{-n-1}[(1+\lambda)b^{-2}\\&-(1+\lambda+2\lambda n)a^{-2n}b^{2n-2}]+2(n-2)t^{1-n}[(1+\lambda+2\lambda n)a^{-2n-2}b^{2n-2}-(1-\lambda)b^{-4}]\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\Delta=&-2(1+\lambda+2\lambda n)a^{-4n}b^{2n-2}-4(n^2-1)(1+\lambda)a^{-2n}b^{-2}+2n^2(1+3\lambda)a^{-2n-2}\\&+2n^2(1-\lambda)a^{2-2n}b^{-4}-2(1+\lambda-2\lambda n)b^{-2n-2}\end{aligned} \tag{3.28}$$

在以上各系数得到以后，原级数中的系数$a_n\sim d_n$便可由公式(3.17)～(3.18)求出，然而要求出域中的应力，还必需求出位错密度函数$f(t)$，这可使用裂纹面的载荷条件(3.6)确定.

四、积 分 方 程

让总的周向应力$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)$满足裂纹面上给定的载荷条件(3.6)，便得到未知函数$f(t)$满足的积分方程为：

$$\int_e^g\frac{f(t)}{t-r}dt+\int_e^gK(r,t)f(t)dt=-\frac{\pi(\kappa+1)}{2\mu}q(r) \tag{4.1}$$

$$\int_e^g f(t)dt=K_0\qquad (e<r<g) \tag{4.2}$$

式中K_0为一常数，对于内裂纹，由位移单值性条件知$K_0=0$，积分核$K(r,t)$由下式给出：

$$K(r,t)=\frac{\beta_0}{2r^2}-\gamma_0-\frac{\gamma_1}{r^3}-3\delta_1 r$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}[\alpha_n r^{n-2}+\beta_n(n+2)r^n+\gamma_n r^{-n-2}+\delta_n(n-2)r^{-n}] \tag{4.3}$$

对于内裂纹而言，核$K(r,t)$是连续的，因而积分方程(4.1)是一柯西型奇异积分方程，可使用数值法[5]求解. 在求得未知函数$f(t)$后，回代，即可求出区域中的应力，于是裂纹端点的应力强度因子按下式确定：

$$k(e)=\lim_{r\to e^-}\sqrt{2(e-r)}\,\sigma_{\theta\theta}(r,0),\quad k(g)=\lim_{r\to g^+}\sqrt{2(r-g)}\,\sigma_{\theta\theta}(r,0) \tag{4.4}$$

五、特 殊 情 形

对于图1所示的空心圆柱，若令外半径趋于无限大，则问题退化为无限平面上具有一个中心孔的问题，此时积分核由(4.3)作极限运算得到：

$$K_1(r,t)=\frac{a^2}{tr^2}+\frac{a^4}{2r^3t^2}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-2)(n+1)\left(\frac{a^2}{rt}\right)^n\frac{t}{r^2}\right.$$

$$\left.-n^2\left(\frac{a^2}{rt}\right)^n\frac{a^2}{r^2t}+(n-2)(n-1)\left(\frac{a^2}{rt}\right)^n\frac{1}{t}-(n-2)^2\left(\frac{a^2}{rt}\right)^n\frac{t}{a^2}\right] \tag{5.1}$$

利用以下关系：

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}-x \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)(n+1)x^n=\frac{2x^3(2-x)}{(1-x)^3} \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)(n-1)x^n=\frac{2x^3}{(1-x)^3} \tag{5.4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)^2x^n=\frac{2x^4}{(1-x)^3}+\frac{x^3}{(1-x)^2} \tag{5.5}$$

以上公式中$|x|<1$，在注意到$a^2/rt<1$后，积分核(5.1)便有以下有限闭合形式：

$$K_1(r,t)=-\frac{(t^2-a^2)a^2}{t(rt-a^2)^3}+\frac{t(t^2-a^2)}{(rt-a^2)^2}+\frac{t}{rt-a^2}+\frac{a^2-t^2}{r^2t}-\frac{a^2}{r^3}-\frac{1}{r} \tag{5.6}$$

上式与文[6]用不同方法得到的完全一致。

若作以下变量代换：

$$t=a+\zeta,\quad r=a+y \tag{5.7}$$

再令a趋于无限，则对核(5.1)求极限后，便得以实轴Ox为半平面边界，裂纹在Oy轴上时的积分核：

$$K_2(y,\zeta)=-\frac{4y^2}{(\zeta+y)^3}+\frac{6y}{(\zeta+y)^2}-\frac{1}{\zeta+y} \tag{5.8}$$

这与文[1]的结果完全一致。

六、数值结果

为了考察加劲薄膜对裂纹应力强度因子的影响，这里作了若干数值计算，结果列于表1，2：

表1　$\lambda=0$时的应力强度因子$k^*(e)$，$k^*(g)$比较($a/b=0.5$，$(g-e)/(b-a)=0.5$)

$\frac{e-a}{b-a}$	本文 $k^*(e)$	本文 $k^*(g)$	文[3] $k^*(e)$	文[3] $k^*(g)$	文[1] $k^*(e)$	文[1] $k^*(g)$
0.15	1.2435	1.2104	1.2414	1.1755	1.1968	1.1754
0.20	1.1905	1.1663	1.1929	1.1777	1.1517	1.1769
0.25	1.1759	1.2175	1.1736	1.1980	1.1331	1.1951
0.30	1.1766	1.2594	1.1744	1.2391	1.1727	1.2303
0.35	1.1888	1.2896	1.1936	1.3118	1.1893	1.2912
0.40	1.2261	1.4029	/	/	1.2263	1.4033

[注] $k^*(e)=k(e)/(p_0\sqrt{(g-e)/2})$，$k^*(g)=k(g)/(p_0\sqrt{(g-e)/2})$

表 2 应力强度因子 $k^*(e)$，$k^*(g)$ 随 λ 的变化 $(a/b=0.5,\ (g-e)/(b-a)=0.5)$

$\frac{c-a}{b-a}$	$\lambda=0$		$\lambda=0.2$		$\lambda=0.5$	
	$k^*(e)$	$k^*(g)$	$k^*(e)$	$k^*(g)$	$k^*(e)$	$k^*(g)$
0.15	1.2435	1.2104	1.4532	1.3168	1.3449	1.2165
0.20	1.1905	1.1663	1.3636	1.2202	1.2459	1.1082
0.25	1.1759	1.2175	1.2975	1.1786	1.1811	1.0695
0.30	1.1766	1.2594	1.2219	1.0566	1.1265	1.0179
0.35	1.1888	1.2896	1.1472	0.9316	1.0758	0.9460
0.40	1.2261	1.4029	1.0666	0.7713	1.0244	0.8447

［注］ $k^*(e)=k(e)/(p_0\sqrt{(g-e)/2})$; $k^*(g)=k(g)/(p_0\sqrt{(g-e)/2})$

参 考 文 献

[1] Tang Ren-ji (汤任基) and F. Erdogan, Stress intensity factors in a reinforced thick-walled cylinder, *Int. J. Engng. Sci.*, **22**, 7 (1984).

[2] Little, R. W., *Elasticity*, Prentice-Hall, New York (1973).

[3] Delale, F. and F. Erdogan, Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack, *Int. J. Frac.*, **20**, 251 (1982).

[4] Tang Ren-ji and Wang Kai, On the Griffith crack whose surfaces are loaded asymmetrically, *Engng. Frac. Mech.*, **16**, 1 (1982).

[5] Erdogan, F., Mixed boundary-value problems in mechanics, *Mechanics Today* (Edited by S. Nemat-Nasser), 4 (1978) and 6 (1981).

[6] 汤任基、蒋柱中，中心圆孔径向裂纹系分析，兰州大学学报，力学专号，1 (1979).

An Analysis of a Radial Crack in a Reinforced Hollow Cylinder

Wang Xiao-chun Tang Ren-ji

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

Using the Michell solution and the crack solution, the integral equation of a radial crack in a hollow cylinder reinforced on its outer boundary is derived. The effects of the reinforced membrane on the crack are analysed and several numerical results are presented herein.