应用数学和力学，第8卷第8期(1987年8月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

关于集中载荷下圆板非线性弯曲问题的解析电算求解*

郑晓静　　周又和

（兰州大学数力系）（华中工学院力学系）

（叶开沅推荐，1986年7月23日收到）

摘　　要

本文获得了求解中心承受集中载荷的圆板大挠度问题迭代解析解的递推公式的计算程序，使之能便于计算执行。同时，通过对此方法收敛性的研究，得到了关于载荷值 p 收敛的一个上界值。这为解析电算法的应用提供了一个有用的判据。

一、引　　言

1981年，叶开沅，顾淑贤[1]在研究均布载荷作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性问题时，首次提出了解析电算法。这一方法是在给出迭代解的一般形式后，将逐次迭代求解与计算机相结合，从而解决了以前由于计算量太大以致难以进行求解的困难。从理论上讲，在收敛范围内，只要计算机的容量、速度许可，就可使计算达到任意精度。然而，要想准确地从数学上得到由此方法求得的解的收敛半径，还存在着许多困难。文［2］曾讨论过均布载荷作用下圆板大挠度问题的迭代算法的收敛性问题。文[3]通过证明迭代函数序列的一致收敛性，得到了圆薄板在中心承受集中载荷作用时的大挠度问题的精确解。但该文只是给出了收敛域的充分条件，即在此收敛域外的 p 值还可能存在着收敛情形（这可以从数值计算的结果上看出），因而判断其 p 的收敛域的上界值还是相当必要的。这样，可避免一些不必要的盲目计算。本文不仅得到了用解析电算法求解中心承受集中载荷圆板的大挠度问题的计算程序，而且也给出了关于 p 值收敛域的一个上界值。从而为应用解析电算法求解提供了一个有用的判据。

二、数　学　提　法

中心承受集中载荷的轴对称圆板的大挠度方程，即卡门方程为：

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\ r\ \frac{dw}{dr}\right)=N_r\ \frac{dw}{dr}+\frac{P}{2\pi r}$$

* 中国科学院科学基金资助的课题.

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2N_r)=-\frac{1}{2}Eh\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \tag{2.1}$$

$$N_\theta=\frac{d}{dr}(rN_r) \tag{2.1$'$}$$

经过无量纲化处理后，方程(1.1)变为下列独立形式的微分方程组：

$$y^2\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}=\varphi(y)s(y)+py,\quad y^2\frac{d^2s(y)}{dy^2}=-\frac{1}{2}\varphi^2(y) \tag{2.2}$$

边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&y=0:\ \varphi(y)=0,\ s(y)=0\\&y=1:\ \varphi(y)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{d\varphi(y)}{dy},\ s(y)=\frac{\mu}{\mu-1}\frac{ds(y)}{dy}\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

与(2.2)、(2.3)式对应的积分方程组为：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(y)=-\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi(\xi)s(\xi)d\xi-\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}p\xi d\xi\\&s(y)=\frac{1}{2}\int_0^1G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi^2(\xi)d\xi\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中核函数$K(y,\xi)$，$G(y,\xi)$分别为：

$$K(y,\xi)=\begin{cases}[(\lambda-1)y+1]\xi & \xi\leqslant y\\ [(\lambda-1)\xi+1]y & \xi>y\end{cases} \tag{2.5}$$

$$G(y,\xi)=\begin{cases}[(\mu-1)y+1]\xi & \xi\leqslant y\\ [(\mu-1)\xi+1]y & \xi>y\end{cases} \tag{2.6}$$

此处所用符号的意义和无量纲参数如下[4]：

D：板的抗弯刚度；W：板的挠度；p：作用在板中心处的载荷值；N_r：面内径向膜力；N_θ：面内周向膜力；a：圆板的半径；E：弹性模量；h：板厚；λ，μ是与边界有关的常数且

$$\lambda=\frac{2}{k_2a/D+(1+\nu)},\quad \mu=\frac{2}{(1-\nu)+Eh/k_1}$$

k_1，k_2是与边界固结情况有关的弹性系数：ν：泊松比；

$$\left.\begin{aligned}&y=\frac{r^2}{a^2};\ \varphi(y)=\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{y}{h}\frac{dw}{dy};\ W=\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{w}{h}\\&D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};\ s(y)=\frac{3(1-\nu^2)a^2N_r}{Eh^3}y;\ p=\frac{3}{4}(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2P}{\pi Eh^4}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

三、迭代解的递推公式

依(2.4)式，取其迭代算法为：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{n+1}(y)=-\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_n(\xi)s_n(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\\&s_n(y)=\frac{1}{2}\int_0^1G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_n^2(\xi)d\xi\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$n=1,2,\cdots$，其中

$$\varphi_1(y)=-\int_0^1 K(y,\ \xi)\frac{1}{\xi^2}p\xi d\xi=py\ln y-\lambda py \tag{3.2}$$

于是，有

$$s_1(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\ \xi)\frac{1}{\xi^2}(p\xi\ln\xi-\lambda p\xi)^2 d\xi$$

$$=\frac{p^2}{2}(a_1y^2\ln^2y+a_2y^2\ln y+a_3y^2+a_4y) \tag{3.3}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} &a_1=-\frac{1}{2}\ ;\ a_2=\frac{3}{2}+\lambda;\ a_3=-\frac{1}{4}(7+6\lambda+2\lambda^2)\\ &a_4=\frac{\mu}{4}(1+2\lambda+2\lambda^2)+\frac{1}{4}(7+6\lambda+2\lambda^2)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

文[3]中已证明了这种迭代算法的第n次迭代函数结构的一般形式为：

$$\varphi_n(y)=\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(n)}y^i\ln^j y,\ s_n(y)\doteq\sum_{i=1}^{2\times3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}^{(n)}y^i\ln^j y \tag{3.5}$$

设通过迭代求解已得到第n次迭代近似解(3.5)式中的第一式($\varphi_n(y)$)，则由(3.1)式中的第二式得：

$$s_n(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi_n^2(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{3^{n-1}}\sum_{s=0}^{r}A_{ij}A_{rs}(j+s)!\Big\{(-1)^{j+s}\Big[\frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}}$$

$$+\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\Big]y+\sum_{t=0}^{j+s}\frac{(-1)^t}{(j+s-t)!}\Big[\frac{1}{(i+r)^{t+1}}$$

$$-\frac{1}{(i+r-1)^{t+1}}\Big]y^{i+r}\ln^{j+s-t}y\Big\} \tag{3.6}$$

即：

$$B_{10}^{(n)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{3^{n-1}}\sum_{s=0}^{r}A_{ij}^{(n)}A_{rs}^{(n)}(j+s)!(-1)^{j+s}\Big[\frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}}$$

$$+\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\Big] \tag{3.7}$$

$$B_{11}^{(n)}=0 \tag{3.8}$$

$$B_{ij}^{(n)}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(n)}A_{rs}^{(n)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\Big[\frac{1}{(i+1)^{t+1-j}}-\frac{1}{i^{t+1-j}}\Big] \tag{3.9}$$

$$(i=2,3,\cdots,2\times3^{n-1};\ j=0,1,\cdots,i)$$

从而可以求出

$$s_n(y)=\sum_{i=0}^{2\times3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}^{(n)}y^i\ln^j y$$

再由(3.1)式中第一式得到$\varphi_{n+1}(y)$的递推关系：

$$\varphi_{n+1}(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_n(\xi)s_n(\xi)d\xi+\varphi_1(y)$$

$$=-\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{2\times 3^{n-1}}\sum_{s=0}^{r}A_{ij}^{(n)}B_{rs}^{(n)}(j+s)!\left\{\left[\frac{\lambda-1}{(i+r)^{j+s+1}}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\right](-1)^{j+s}y+\sum_{t=0}^{j+s}\frac{(-1)^t}{(j+s-t)!}\left[\frac{1}{(i+r)^{t+1}}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(i+r-1)^{t+1}}\right]y^{i+r}\ln^{j+s-t}y\right\}+\varphi_1(y)=\sum_{i=1}^{3^n}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(n+1)}y^i\ln^j y \tag{3.10}$$

即：
$$A_{10}^{(n+1)}=-\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{2\times 3^{n-1}}\sum_{s=0}^{r}A_{ij}^{(n)}B_{rs}^{(n)}(j+s)!(-1)^{j+s}\left[\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(i+r)^{j+s+1}}\right] \tag{3.11}$$

$$A_{11}^{(n+1)}=p \tag{3.12}$$

$$A_{ij}^{(n+1)}=-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(n)}B_{rs}^{(n)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{(i-1)^{t-j+1}}-\frac{1}{i^{t-j+1}}\right] \tag{3.13}$$

$$(i=2,3,\cdots,3^n;j=0,1,\cdots,i)$$

注意：这里用到下面的二个关系式：

$$\int_{a(y)}^{b(y)}\xi^m\ln^n\xi d\xi=\sum_{t=0}^{n}\frac{(-1)^t n!}{(n-t)!(m+1)^{t+1}}\xi^{m+1}\ln^{n-t}\xi\Big|_{a(y)}^{b(y)} \tag{3.14}$$

$$\sum_{j=0}^{i}A_{ij}\sum_{t=0}^{j}\frac{(-1)^t\cdot j!}{(j-t)!i^{t+1}}\ln^{j-t}y=\sum_{j=0}^{i}\sum_{t=j}^{i}A_{it}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!i^{t-j+1}}\ln^j y \tag{3.15}$$

其中i,j,m,n均为正整数。

这样就得到第$(n+1)$次的迭代解。重复上述过程，由(3.6)～(3.13)即可得到任意阶的迭代近似解.

在求得了第n次近似解$\varphi_n(y)$，$s_n(y)$后，挠度、板内径向应力和弯曲应力的计算公式推导如下：

由文[4]和(2.7)式知：中面径向拉伸应力的无量纲形式为：

$$s_R=\frac{3(1-\nu^2)a^2\sigma_r'}{Eh^2}=\frac{3(1-\nu^2)a^2N_r}{Eh^3}=\frac{s}{y} \tag{3.16}$$

平板凸面的径向弯曲应力的无量纲形式为：

$$s_W=(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2\sigma_r''}{Eh^2}=2yW_{,yy}-(1+\nu)W_{,y} \tag{3.17}$$

当$y=1$时，由(3.5)和(3.16)式知：中面边缘径向拉伸应力的无量纲值为：

$$s_R^{(n)}(1)=\sum_{j=1}^{2\times 3^{n-1}}B_{j0}^{(n)} \tag{3.18a}$$

由$y=0$时，中面中心径向拉伸应力的无量纲值为：

$$s_R^{(n)}(0)=B_{10}^{(n)} \tag{3.18b}$$

由 $W_{,y}=\dfrac{\varphi(y)}{y}$, $W_{,yy}=\dfrac{\varphi(y)_{,y}}{y}-\dfrac{\varphi(y)}{y^2}$

(3.17)式为：

$$s_W=(1-\nu)\frac{\varphi(y)}{y}-2\varphi(y)_{,y} \tag{3.19}$$

当$y=1$时，则有平板凸面边缘径向弯曲应力的无量纲值为：

$$s_W^{(n)}=\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\left[(1-2i-\nu)A_{i0}-2A_{i1}\right] \tag{3.20}$$

由 $\varphi(y)=yW_{,y}$ 和$W(1)=0$，得：

$$W^{(n)}(y)=\int_y^1\frac{\varphi(\eta)}{\eta}d\eta$$

$$=\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(n)}\sum_{t=0}^{j}\frac{(-1)^t\cdot j!}{i^{t+1}(j-t)!}y^i\ln^{j-t}y+\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}\frac{(-1)^{j+1}j!}{i^{j+1}} \tag{3.21}$$

当$y=0$时，平板中心无量纲形式的挠度值W_m为：

$$W_m^{(n)}=\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}\frac{(-1)^{j+1}\cdot j!}{i^{j+1}} \tag{3.22}$$

依(3.6)～(3.13)式，可编制出中心承受集中载荷的圆板大挠度问题在各种边界条件下的计算各次迭代解析解的通用程序。

可以证明：应用积分方程导出的关系式(3.6)～(3.13)较之于通过边值问题形式导出的关系式简单，且少一层嵌套的求和号，这样可以大大节省计算机的运行时间。

四、关于收敛域的上界

结论 当$p>p_{\max}=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\left|\dfrac{y\ln y-\lambda y}{E(y)}\right|^{-\frac{1}{2}}$

时，依积分方程(3.1)式确定的迭代函数序列$\{\varphi_n(y)\}$，满足以下关系：

$$\varphi_{2k+1}(y)\leqslant\varphi_{2k-1}(y)\leqslant 0 \tag{4.1}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

$$\varphi_{2k+2}(y)\geqslant\varphi_{2k}(y)\geqslant 0 \tag{4.2}$$

其中$\varphi_1(y)$由(3.2)给出；

$$E(y)=\frac{1}{p^3}\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)s_1(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}(b_1y+b_2y^2+b_3y^2\ln y+b_4y^3+b_5y^3\ln y+b_6y^3\ln^2y+b_7y^3\ln^3y) \tag{4.3}$$

这里： $b_1=(\lambda-1)\left[\dfrac{1}{27}(2a_2-2\lambda a_1-2a_1-3a_3+3\lambda a_2-9\lambda a_3)-\dfrac{1}{4}(1+2\lambda)a_4\right]$

$$+\frac{1}{8}(2a_2-2\lambda a_1-3a_1-2a_3+2\lambda a_2-4\lambda a_3)-(1+\lambda)a_4$$

$$b_2=-\frac{5+6\lambda}{4}a_4;\ b_3=-\frac{1}{2}a_4$$

$$b_4=\frac{1}{27}(2a_2-2\lambda a_1-2a_1-3a_3+3\lambda a_2-9\lambda a_3)-\frac{1}{8}(2a_2-2\lambda a_1-3a_1-2a_3+2\lambda a_2-4\lambda a_3)$$

$$b_5=\frac{1}{9}(2a_1+2\lambda a_1-2a_2+3a_3-3\lambda a_2)-\frac{1}{4}(3a_1-2a_2+2\lambda a_1+2a_3-2\lambda a_2)$$

$$b_6=-\frac{a_2}{6}+\frac{2\lambda-1}{12}a_1,\quad b_7=-\frac{1}{6}a_1$$

而a_1,a_2,a_3,a_4已由(3.4)式给出。

证明　当$k=1$时，有

$$\varphi_1(y)=py\ln y-\lambda py\leqslant 0;\quad s_1(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1^2(\xi)d\xi\geqslant 0$$

依条件有：

$$p>\max_{0<y<1}\left|\frac{y\ln y-\lambda y}{E(y)}\right|^{\frac{1}{2}}\geqslant\left|\frac{y\ln y-\lambda y}{E(y)}\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad \left|\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)s_1(\xi)d\xi\right|\geqslant|\varphi_1(y)| \tag{4.4}$$

于是：
$$\varphi_2(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)s_1(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\geqslant 0 \tag{4.5}$$

$$s_2(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_2^2(\xi)d\xi\geqslant 0 \tag{4.6}$$

则得：
$$\varphi_3(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_2(\xi)s_2(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\leqslant\varphi_1(y)\leqslant 0 \tag{4.7}$$

$$s_3(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_3^2(\xi)d\xi\geqslant s_1(y)\geqslant 0 \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4(y)&=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_3(\xi)s_3(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\\&\geqslant-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)s_1(\xi)d\xi+\varphi_1(y)=\varphi_2(y)\geqslant 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

依(4.5)、(4.9)式得到：$k=1$时，结论

$$\varphi_{2k+1}(y)\leqslant\varphi_{2k-1}(y)\leqslant 0;\quad \varphi_{2k+2}(y)\geqslant\varphi_{2k}(y)\geqslant 0$$

成立。

假定$k=n$时，结论成立。即有

$$\varphi_{2n+1}(y)\leqslant\varphi_{2n-1}(y)\leqslant 0;\quad \varphi_{2n+2}(y)\geqslant\varphi_{2n}(y)\geqslant 0$$

则对　$k=n+1$，有：

$\varphi_{2n+1}(y)\leqslant 0$　　（依归纳法假定）

$$s_{2n+1}(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n+1}^2(\xi)d\xi\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n-1}^2(\xi)d\xi=s_{2n-1}(y) \tag{4.10}$$

$$\varphi_{2n+2}(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n+1}(\xi)s_{2n+1}(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\geqslant 0$$

（依归纳法假定）

$$s_{2n+2}(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi^2_{2n+2}(\xi)d\xi$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi^2_{2n}(\xi)d\xi=s_{2n}(y) \tag{4.11}$$

$$\varphi_{2n+3}(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n+2}(\xi)s_{2n+2}(\xi)d\xi+\varphi_1(y)$$

$$\leqslant-\int_0^1 K(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n}(\xi)s_{2n}(\xi)d\xi+\varphi_1(y)=\varphi_{2n+1}(y)\leqslant 0 \tag{4.12}$$

$$s_{2n+3}(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi^2_{2n+3}(\xi)d\xi\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi^2_{2n+1}(\xi)d\xi=s_{2n+1}(y) \tag{4.13}$$

$$\varphi_{2n+4}(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n+3}(\xi)s_{2n+3}(\xi)d\xi+\varphi_1(y)$$

$$\geqslant-\int_0^1 K(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\varphi_{2n+1}(\xi)s_{2n+1}(\xi)d\xi+\varphi_1(y)$$

$$=\varphi_{2n+2}(y)\geqslant 0 \tag{4.14}$$

从(4.12)～(4.14)式得到：当$k=n+1$时，结论

$$\varphi_{2k+1}(y)\leqslant\varphi_{2k-1}(y)\leqslant 0,\ \varphi_{2k+2}(y)\geqslant\varphi_{2k}(y)\geqslant 0$$

成立。从而依数学归纳法原理，证明了当$p>p_{\max}$时，结论对任意的正整数k均成立。　证毕

推论　从(4.1)，(4.2)不等式可见，当

$$p>p_{\max}=\max_{0<y\leqslant 1}\left|\frac{y\ln y-\lambda y}{E(y)}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

时，迭代函数序列$\{\varphi_n(y)\}$以两个单调子序列分别朝正、负方向增加。因而迭代函数序列$\{\varphi_n(y)\}$不收敛。

依圆板的大挠度情形，在弹性范围内，根据其受载情况，在此物理背景下是不可能产生挠度在正、负值间跳跃取值的失稳现象的。这样，就意味着在给定的载荷情况下，变形是朝一个方向进行的。此外，由于$\varphi(y)$函数是挠度的导数dw/dy与y的乘积。于是，当$\varphi(y)\geqslant 0$时，其挠度均为负或零值。各种情形对于受铅直方向载荷作用的板，不是沿力的作用方向发生挠度，而是相反方向的变形，这显然是不合乎问题的要求的。当$\varphi(y)\leqslant 0$时，挠度的导数小于零或等于零，于是挠度值在[0,1]内大于零或等于零，这样的解才合乎物理背景。在上述迭代序列中，分别出现上述两种情形，显然是算法失效。这样，我们就得到了卡门方程应用解析电算法求解时，其解的收敛的一个上界值。这对于依此方法来求解大挠度问题，无疑是给出了一个有用的判据。

五、结　　论

本文得到了中心承受集中载荷的圆板大挠度问题的迭代解的解析式的计算程序以及其最大收敛半径$p_{\max}$。即：收敛域可能是$0\leqslant p\leqslant p_{\max}$。这样，对于在应用计算机来确定迭代解级数的系数并求解此类问题时，就只需在此范围内进行，而无须计算$p>p_{\max}$。从而，可以

避免计算上的盲目性。尽管此处的研究还未能给出一精确的收敛半径值，但这一收敛上界值为解析电算法的应用范围提供了一个非常有用的理论判据。

表 1 各种泊松比情况下的p_{max} （固定夹紧边界）

ν	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
p_{max}	3.062	3.029	2.994	2.957	2.915	2.870	2.821	2.766	2.706

参 考 文 献

[1] 叶开沅、顾淑贤，均布载荷作用下圆底扁球壳的非线性稳定性，《1980年全国计算力学会议文集》，北京大学出版社 (1980)，280—287.

[2] Keller, H. B. and E. L. Reiss, Iterative solutions for the nonlinear bending of circular plates, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 11 (1958), 273—292.

[3] 叶开沅、郑晓静、周又和，An analytical formula of exact solution to Kármán's equations of circular plate under a concentrated load, *Proc. ICNM*, Shanghai, Science Press, Beijing, China (1985), 386—391.

[4] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，10，3 (1954)，209—238.

On Analytical-Computerized Method to Solve Nonlinear Bending Problem of Circular Plate under a Concentrated Load

Zheng Xiao-jing

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Zhou You-he

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

In this paper, we have got a procedure of the recurrence formulas of analytical solution of iteration on solving the large deflection problem of circular plate under a concentrated load by computer. By researching convergence of the method, we have got a convergent upper bound value about load p, which is a useful criterion for analytical-computerized method.