应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 08_0875_06

结构振动特性在线识别的理论模型和计算方法*

姚志远, 汪凤泉

(东南大学 工程力学系, 南京 210096)

(我刊原编委张景绘推荐)

摘要: 环境自然激励作用下的大型结构动力特性在线识别方法受到广泛的关注,这个方法仅仅利用结构自然响应的被测试数据,识别结构动力特性• Ibrahim 方法和 ARMAV 方法是基本的识别方法• 该文研究了受随机激励作用动力学模型,给出了有别于传统谐波恢复的子空间分解识别方法• 数值仿真结果表明,该方法对结构振动特性的识别具有较好的鲁棒性和较高的计算精度•

关 键 词: 模态识别; 系统辨识; 结构动力系统
中图分类号: O324 文献标识码: A

引 言

近年来,系统的结构参数在线识别技术受到广泛的关注,识别的系统参数能被用来估计结构的损伤和确定结构未来的响应• 在结构的主动控制中,控制装置的设计要求知道系统的结构参数,因此,系统的结构参数识别是结构振动有效控制的重要一步•

不同于传统的结构参数识别方法,现代结构参数识别方法是未知系统输入的、时域的分析方法,是仅仅依据自然响应的测试数据识别结构动力特性的在线识别技术,它及时准确地反映工作中的大型结构的物理参数和动力特性•

现代结构参数识别技术有两类,一是直接识别方法,直接识别方法通过谐波识别技术直接识别系统的频率、阻尼和振型等动力特性,这类方法有 Ibrahim 等方法[1];二是间接识别方法,间接识别方法通过数学建模方法间接识别系统的物理参数和动力特性,这类方法主要有 AR 和 ARMA 等建模方法[2]• 从理论上讲,数学建模方法能识别受随机激励作用的振动系统的物理参数和动力特性,并且具有较高的计算精度,但是,谐波识别技术能直接得到人们需要的动力特性,并且具有算法简单等特点•

传统的 Ibrahim 方法是谐波识别技术,它的研究范围是作自由振动的物体• 它必须结合随机缩减方法才能识别受随机激励作用的结构的动力特性•

谐波识别技术被广泛地使用在雷达、通讯、信号处理和振动模态识别等领域,大量的算法

---

* 收稿日期: 2002_12_12; 修订日期: 2004_03_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59775022)
作者简介: 姚志远(1961—),男,江苏镇江人,副教授,博士生(联系人.Tel: + 86_511_4401808; E_mail: yaozhi_yuan@sohu.com)•

被提出• 作为现代谐波识别技术,主要的方法有MUSIC、子空间分解等方法• 在这些方法中,子空间分解方法[3~6]是最具竞争性的• 子空间分解方法将受噪声干扰的实验信号分解为信号空间和噪声空间,并且直接得到信号的谐波频率和振型,具有良好的鲁棒性和计算精度,子空间分解方法在建筑结构的动力特性识别中的应用尚未见到报导• 本文提出了受随机激励作用的结构动力学理论模型,并利用子空间分解方法的基本理论,给出了识别多输出动力系统的振动频率、阻尼和振型等动力特性的估计方法• 相对 Ibrahim 方法,本方法具有更好的鲁棒性和较高的计算精度•

1 动力学理论模型和复数解

依据结构动力学理论,受随机激励作用的 n 维结构动力学方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{X}$ 是 n 维位移向量, $\boldsymbol{M}$ 是 $n\times n$ 维质量矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $n\times n$ 维阻尼矩阵, $\boldsymbol{K}$ 是 $n\times n$ 维刚度矩阵, $\boldsymbol{F}$ 是均值为 0 的 n 维随机激励, 各分量相互独立, 满足条件 $E(\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{F}^H(t+k)) = \sigma_0^2\delta(k)\boldsymbol{I}$, $\delta(k)$ 是Kronecker 函数, $\boldsymbol{I}$ 是 $n\times n$ 维单位矩阵•

从动力学基本理论知道,方程(1)的解包含两部分内容,一是由结构自然振动产生的谐波振动,二是由外力产生的随机振动• 在使用谐波识别技术之前,必须消除随机振动的影响,而相关运算能够在保持谐波振动的同时消除随机振动的影响• 取结构上某一定点的测试信号 $x_0(t)$, 将 $x_0(t-\tau)$ 乘方程(1)的两侧,并取数学期望得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}(\tau) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}(\tau) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}(\tau) = \boldsymbol{F}\delta(\tau), \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{Y}(\tau) = E(\boldsymbol{X}(t)x_0(t-\tau))$, $\boldsymbol{F} = E(\boldsymbol{F}(t)x_0(t-\tau)) = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)^{\mathrm{T}}$, σ_k^2 是常数, $\tau \geqslant 0$•

从数学方程角度理解,方程(2)是在时间 $\tau = 0$ 系统受外部冲击作用,并获得动能,在时间 $\tau > 0$ 时系统作自由振动的动力系统• 在无阻尼的情况下,其解为

$$\boldsymbol{Y}(m) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \sin(\omega_k m), \tag{3}$$

其中, m 是时间, ω_k 是振动频率, Φ_k 是相应的振型•

对于信号 $\boldsymbol{X}$ 而论,信号 $\boldsymbol{Y}(m)$ 不是实际意义上的振动信号,而是实际信号 $\boldsymbol{X}$ 关于某定点的测试信号 $x_0(t)$ 的相关函数• 重要的是 $\boldsymbol{Y}(m)$ 满足的微分方程同系统作自由振动的微分方程(1)是一样的,这就是说,方程(2)同作自由振动的原振动系统具有相同的物理参数和动力特性• 因此,利用信号 $\boldsymbol{Y}(m)$ 能识别系统的动力特性•

对于信号 $\boldsymbol{Y}$ 作希尔伯特变换,其变换值为 $\boldsymbol{Y}$, 记 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} + \mathrm{j}\boldsymbol{Y}$• 则信号 $\boldsymbol{Y}$ 为 $\sum_{k=1}^{n} \Phi_k \exp(\mathrm{j}\omega_k m)$, 是与信号 $\boldsymbol{Y}$ 有相同振动频率和振型的复值信号($\mathrm{j} = \sqrt{-1}$)• 由于以下讨论的信号是指样本信号所对应的复信号,为了方便写书,仍然记为 $\boldsymbol{Y}$ 为 $\boldsymbol{Y}$• 则(3)式的复值形式为

$$\boldsymbol{Y}(m) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \exp(\mathrm{j}\omega_k m)• \tag{4}$$

2 子空间分解方法和算法

以上分析表明,作自由振动的动力系统,其振动信号是由不同频率的谐波组成,而刻划谐

波及其组成的动力参数是频率、阻尼和振型. 谐波分析的方法, 是通过样本信号估计信号的频率、阻尼和振型. 事实上, 对于被讨论的大型结构, 其自由度是很大的, 而实际上的测试点是受限制的、不全面的; 另一方面在众多振动模态中起主要作用的模态是少部分的. 因此, 在小阻尼下, 考虑如下模型

$$\boldsymbol{Y}(m)=\sum_{k=1}^{p}\Phi_k \mathrm{e}^{(\mathrm{j}\omega_k+\alpha_k)m}+\boldsymbol{v}(m),\tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{Y}(m)=(y_1(m),y_2(m),\cdots,y_n(m))$ 是 n 个测试点上的振动信号相对某定点振动信号的相关函数(以下仍称为振动信号), 这里的 n 是测试点的个数, p 是系统中起主要作用的模态的个数, 它小于等于系统的维数. Φ_k 是 n 阶列向量, 这里$\{\Phi_k\}$已不是系统的完整的振型, 它的任意两列之间不一定相互垂直的, 但是, 它们之间是不相关的. $\boldsymbol{v}(m)$ 是加性白噪声, 是信号采集和计算过程产生的噪声, 成立 $\boldsymbol{v}(m)\boldsymbol{v}^H(m+k)=\sigma^2\boldsymbol{I}\delta(k)$, 这里 σ^2 是噪声的功率, $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵. α_k 是与阻尼有关的实数($\alpha_k=\zeta_k\omega_k$, ζ_k 是阻尼比). 振动信号与噪声信号是不相关的.

2.1 子空间分解法

子空间分解法, 是利用样本信号的相关函数将样本信号空间分解为信号空间和噪声空间. 考虑 $\boldsymbol{Y}$ 的相关函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(k)=E(\boldsymbol{Y}(m)\boldsymbol{Y}^H(m+k))=\sum_{l=1}^{p}\Phi_l\mathrm{e}^{\lambda_l k}\Phi_l^H+\sigma^2\boldsymbol{I}\delta(k)=\\ \Phi\Lambda^k\Phi^H+\sigma^2\boldsymbol{I}\delta(k),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1},\mathrm{e}^{\lambda_2},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_p})$, $\lambda_k=\mathrm{j}\omega_k+\alpha_k$, $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_p)$.

记 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(0)-\sigma^2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{R}=\Phi\Phi^H$. 事实上, 对于对称矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的上述分解法是不唯一的, 假设 $\boldsymbol{R}=\Phi\Phi^H$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的又一分解, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使

$$\Phi=\Phi\boldsymbol{Q}.\tag{7}$$

记 $\boldsymbol{R}=\Phi^{-1}\boldsymbol{R}(1)\Phi^{-H}$, 则有

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\Lambda.\tag{8}$$

定理 假设 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(0)-\sigma^2\boldsymbol{I}$, 有 $\boldsymbol{R}=\Phi\Phi^H$. 如果是 $\boldsymbol{R}=\Phi\Phi^H$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的又一分解, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\Phi=\Phi\boldsymbol{Q}$, 并且 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\Lambda$.

定理表明, $\boldsymbol{R}$ 的不同的分解之间相差一个正交矩阵, 而这个正交矩阵是矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征向量. 对 $\boldsymbol{R}$ 进行特征分解, 求出对角线矩阵 Λ($\boldsymbol{R}$ 的特征值) 和正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$(相应的特征向量). 通过矩阵 Λ 和 $\boldsymbol{Q}$, 首先由 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=\ln\Lambda$, 求出结构振动的频率和阻尼, 再由(7) 式求出相应的振型 Φ.

需要说明的是, 在复数范围内, 使(7) 式成立的 $\boldsymbol{Q}$ 不是唯一的, 相应地表现方程(8) 中其解是不唯一的. 其所求振型的一般形式为

$$\Phi=\Phi\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_p}),\tag{9}$$

其中, θ_k 是任意实数.

由于所求的 Φ 是实矩阵, 为了保证唯一性, 可选择 θ_k 使 Φ 的虚部的模最小.

2.2 算法

从理论上, 由相关函数 $\boldsymbol{R}(0)$ 和 $\boldsymbol{R}(1)$ 能求出系统的频率、振型和阻尼. 事实上, 无法得到完整的信号, 首先必须用样本信号估计相关函数 $\boldsymbol{R}(0)$ 和 $\boldsymbol{R}(1)$. 作为 $\boldsymbol{R}(0)$ 和 $\boldsymbol{R}(1)$ 的估计

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}(0) = \begin{bmatrix} r_{11}(0) & r_{12}(0) & \cdots & r_{1n}(0) \\ r_{21}(0) & r_{22}(0) & \cdots & r_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1}(0) & r_{n2}(0) & \cdots & r_{nn}(0) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{R}(1) = \begin{bmatrix} r_{11}(1) & r_{12}(1) & \cdots & r_{1n}(1) \\ r_{21}(1) & r_{22}(1) & \cdots & r_{2n}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1}(1) & r_{n2}(1) & \cdots & r_{nn}(1) \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $r_{st}(k) = E(y_s(m) y_t^H(m+k))$•

有了 $\boldsymbol{R}(0)$, 就能估计系统的模态数 p• 对其进行SVD分解, 所得特征值按大小排列为 $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \cdots \geqslant w_p \geqslant \sigma_{\min}^2 \geqslant \cdots$, 这里 p 由

$$w_p > \alpha, \quad \sigma_{\min}^2 \leqslant \alpha \tag{11}$$

确定, α 是给定的确定数, 是区分信号空间和噪声空间的限•

算法

1) 计算振动信号 $\boldsymbol{X}$ 关于某定点的测试信号 $x_0(t)$ 的相关函数 $\boldsymbol{Y}(\tau)$•

2) 由(10)式求出 $\boldsymbol{R}(0)$、$\boldsymbol{R}(1)$ 作为相关函数 $\boldsymbol{R}(0)$、$\boldsymbol{R}(1)$ 的估计, 并由(11)式确定模态数 p•

3) 分解 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(0) - \sigma_{\min}^2 \boldsymbol{I}$ 为, $\boldsymbol{R} = \Phi \Phi^H$, 求得 Φ•

4) 求 $\boldsymbol{R} = \Phi^{-1} \boldsymbol{R}(1) \Phi^{-H}$ 的特征值和特征向量, 得对角矩阵 Λ 和矩阵 $\boldsymbol{Q}$•

5) 由 $\mathrm{diag}(\mathrm{j}\omega_1 + \alpha_1, \mathrm{j}\omega_2 + \alpha_2, \cdots, \mathrm{j}\omega_p + \alpha_p) = \ln \Lambda$, 得到频率 ω_k 和阻尼 α_k•

6) 由(7)式得振型 $\Phi = \Phi \boldsymbol{Q}$•

3 仿真验证

受随机激励作用的5维动力系统被考虑, 假设结构的主模态由4阶振动模态组成, 其振动频率、阻尼和振型见表1、表2• 识别仅仅依靠系统的输出信号, 从5个通道同时测定结构的输出, 考虑信号在采集和计算过程中的随机误差, 输出测试信号 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{v}$, 其中 $\boldsymbol{X}$ 为系统的实际振动信号, $\boldsymbol{v}$ 为正态白噪声•

结构动力特性的参数识别方法是从输出测试信号中计算出结构的振动频率、阻尼和振型, 实际结构的振动频率、阻尼和振型记为 $\lambda_k = \mathrm{j}\omega_k + \alpha_k$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$, 由于信号受噪声的影响, 估计出的振动频率、阻尼和振型为 $\lambda_k + \Delta\lambda_k$, $\Phi + \Delta\Phi$• 相应的增量是由噪声产生的•

由方程(5)得

$$\boldsymbol{v}(m) = \sum_{k=1}^{p} \Phi_k \mathrm{e}^{m\lambda_k}(\mathrm{e}^{m\Delta\lambda_k} - 1) + \sum_{k=1}^{p} \Delta\Phi_k \mathrm{e}^{m(\lambda_k + \Delta\lambda_k)}• \tag{12}$$

将向量 $\boldsymbol{v}(m)$ 的第 i 分量按泰勒公式展开, 并略去高阶小量有

$$v_i(m) = \sum_{k=1}^{p} \Phi_{ki} \mathrm{e}^{m\lambda_k} m \Delta\lambda_k + \sum_{k=1}^{p} \Delta\Phi_{ki} \mathrm{e}^{m\lambda_k}• \tag{13}$$

从(13)式知道, $\Delta\lambda_k$ 与 $v_i(m)$ 成正比, 比率系数是 $1/(\Phi_{ki} \mathrm{e}^{m\lambda_k} m)$, 当 m 充分大时, $1/(\Phi_{ki} \mathrm{e}^{m\lambda_k} m)$ 充分小, 这表明随着测试样本的增加, 噪声对频率和阻尼的影响将会减少• 又 $\Delta\Phi_{ki}$ 与 $v_i(m)$ 成正比, 比率系数是 $1/\mathrm{e}^{m\lambda_k}$, 其模大于1, 这表明噪声的增加将会对振型的精度产

生直接的影响,这种影响不会因测试样本的增加而减小• 数值计算的结果也表明上述结论是正确的•

信号和噪声的大小也被考虑,信号是112 dB,噪声是30 dB• 表1示出了振型和振型的估计值,表2示出了频率、阻尼和频率、阻尼的估计值•

表1 振型和振型的估计

理论振型				估计振型			
2.0	2.0	1.0	-2.0	1.999 98	2.000 05	1.000 00	-1.994 2
2.0	-4.0	-1.0	1.0	1.999 99	-4.000 00	-1.000 8	0.992 85
3.0	1.0	3.0	2.0	2.999 98	0.999 96	3.002 12	1.956 60
1.0	1.0	-7.0	-1.0	1.000 00	1.000 00	-7.004 8	-1.002 7
2.0	1.0	3.0	1.0	1.999 99	1.000 01	3.003 0	1.000 00

表2 频率、阻尼和频率、阻尼的估计值

频率、阻尼	$j\omega_1+\alpha_1$	$j\omega_2+\alpha_2$	$j\omega_3+\alpha_3$	$j\omega_4+\alpha_4$
理论值	3.5j- 0.000	2.4j- 0.000	1.2j- 0.000	0.5j- 0.000
估计值	3.5j- 0.004 1	2.4j- 0.002 9	1.2j- 0.001 9	0.5j- 0.001 3
理论值	3.5j- 0.010	2.4j- 0.008	1.2j- 0.005	0.5j- 0.001
估计值	3.5j- 0.010 0	2.4j- 0.008 0	1.2j- 0.005 0	0.5j- 0.001 7

4 结 论

讨论了一个受随机激励作用的结构动力系统• 引进了测试信号关于固定点测试信号的相关函数 ***Y***,研究结果表明,信号 ***Y*** 是系统所对应的自由振动方程的解,***Y*** 包含了系统所有的动力特性• 利用希尔伯特变换将信号 ***Y*** 从实数域变换到复数域,使 ***Y*** 的解简单地表示为 $\sum_{k=1}^{n}\Phi_k e^{\lambda_k m}$ 的形式• 提出了识别谐波信号的频率、阻尼和振型的子空间方法• 数值仿真结果表明,本方法能有效地识别系统的动力特性,相对 Ibrahim 方法,本方法不利用最小二乘法,并具有良好的鲁棒性和较高的计算精度•

[参 考 文 献]

[1] UENG Jin_min, LIN Chi_chang, LIN Pao_lung. System identification of torsionally coupled buildings[J]. Computers and Structures, 2000, **74**: 667—686.

[2] Huang C S. Structural identification from ambient vibration measurement using the multivariate AR model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **241**(3): 337—359.

[3] Schmidt R O. A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation[D]. Ph D thesis. Palo Alto: Stanford University, 1981.

[4] Stoica Petre, Nords├ Anders E. Subspace_based frequency estimation in the presence of moving_average noise using decimation[J]. Signal Processing, 1997, **63**: 211—220.

[5] Gershman Alex B, Stoica Petre. New MODE_based techniques for direction finding with an improved threshold performance[J]. Signal Processing, 1999, **76**: 221—235.

[6] Kristensson Martin, Jansson Maghus, Ottersten B├rn. Modified IQML and weighted subspace fitting without eigendecomposition[J]. Signal Processing, 1999, **79**: 29—44.

Theoretical Model and Numerical Method on Online Identification of Dynamical Characteristics of Structural System

YAO Zhi_yuan, WANG Feng_quan
(Department of Engineering Mechanics, Southeast University,
Nanjing 210096, P.R. China)

Abstract: An online method of identification of dynamic characteristics only using measured ambient response of structural dynamic system is widely focused on. The Ibrahim and ARMAV methods are basic identification methods. A model on dynamic system suffered by random ambient excitation was researched into, and a subspace decomposition method being different from traditional harmonic retrieval method was introduced. Robustness and effectiveness of this approach on identification of vibration characteristics are demonstrated on numerical experiment.

Key words: modal identification; system identification; structure dynamic system