

# 中厚板特征值问题的杂交/混合 有限元分析\*

钱源耀

(上海市应用数学和力学研究所, 1985年6月30日收到)

## 摘 要

本文采用杂交/混合有限元对中厚板的屈曲问题和自由振动问题进行了分析, 首先推导了一个修正的 Reissner 变分原理, 它仅要求构造  $C^0$  类场变量, 避免了闭锁现象的产生。所有的场变量皆采用线性插值。最后得到一个矩阵型的位移广义本征值方程, 刚度矩阵对称、正定。计算结果表明本文采用的方法简单、可靠, 较为令人满意。

## 一、前 言

关于有限元的中厚板分析, 前人已做过较为详细的评述, 如文献[1], 而专著[2,3]则对各种变分原理进行了讨论。

由于要假设一个全区域内连续的挠度场, 因此一般的杂交应力有限元很难处理中厚板的屈曲问题。薄板的屈曲问题曾有 Allman<sup>[4]</sup>, Tabarrok 和 Simpson<sup>[5]</sup> 以及 Reddy 和 Tsay<sup>[6]</sup> 讨论过。文献[7]分析了中厚板的屈曲问题, 采用剪切变形  $\gamma_x, \gamma_y$  作为自变函数进行插值, 这在薄板极限情况下, 自然不会产生闭锁现象, 不过  $C^1$  类的挠度场的构造是繁重的, 文献中采用了高阶形函数, 其解是相当精确的。随后文献[8]用一种非常简单的方法形成了刚度矩阵, 对中厚板的屈曲问题进行了分析, 同样不出现闭锁现象。不过其最终的方程是混合型的, 这势必要求在求解过程中对一个总体矩阵进行求逆。

文献[6]对薄板的自由振动问题也进行了分析。中厚板的自由振动有限元分析做的人很少。采用标准的位移元, 文献[9]对中厚板情形进行过分析, 而没有考虑薄板板限情况。对于这种单元的振动分析, 只有采用减化或选择数值积分才能避免闭锁现象<sup>[10]</sup>。目前似乎还未见到利用混合型有限元对中厚板的自由振动进行分析的文章。

本文采用混合型能量原理, 只需  $C^0$  类场变量, 且采用线性插值。这样, 形函数的选取及单元刚度矩阵的推导都变得较为简单, 且最终得到的是位移型的较低阶方程。同样避免了闭锁现象。这里分别对中厚板及薄板的屈曲和自由振动进行了分析。

\* 卢文达推荐。

本文是在中国科学技术大学黄茂光教授指导下完成的, 作者在此表示感谢。

## 二、屈曲问题的变分原理

等厚度的中厚板屈曲问题, 有 Reissner 变分原理泛函<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \iint_{\Omega} \left\{ -V' - V'' - M_x \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - M_{xy} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - M_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right. \\ & + Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) \\ & + \frac{1}{2} \lambda \left[ \bar{N}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} d\Omega \\ & + \int_{C_{\phi_n}} M_n \phi_n ds + \int_{C_{\phi_s}} M_{ns} \phi_s ds - \int_{C_w} V_n w ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中  $V', V''$  —— 弯曲和剪切余能,  $\lambda \bar{N}_{ij}$  —— 表示中面力,  $\lambda$  是屈曲稳定参数  
 $V_n$  —— 边界上的横向合力,  $C_{\phi_n}, C_{\phi_s}, C_w$  —— 分别指定  $\phi_n, \phi_s, w$  的边界

$$\text{而} \quad V_n = Q_n - \lambda \bar{N}_n \frac{\partial w}{\partial n} - \lambda \bar{N}_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.2)$$

对式(2.1)中第三、四、五项面积分进行部分求积, 并引入几何条件

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \quad (2.3)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \iint_{\Omega} \left\{ -V' + U'' + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \lambda \left[ \bar{N}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} d\Omega \\ & - \int_{C_{M_n}} M_n \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \gamma_n \right) ds - \int_{C_{M_{ns}}} M_{ns} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \gamma_s \right) ds - \int_{C_w} V_n w ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

式中  $U''$  表示剪切应变能, 是  $\gamma_x, \gamma_y$  的函数. 对泛函式(2.4)变分给出平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \lambda \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\lambda \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \lambda \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.5c)$$

以及几何方程

$$k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = 0 \quad (2.6a)$$

$$k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.6b)$$

$$k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) = 0 \tag{2.6c}$$

同时也给出了所有的力学和位移边界条件

$$\frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \lambda \bar{N}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \lambda \bar{N}_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{沿 } C_{l_n} \tag{2.7a}$$

$$w = 0 \quad \text{沿 } C_w \tag{2.7b}$$

$$M_n = 0 \quad \text{沿 } C_{v_n} \tag{2.7c}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} - \gamma_n = 0 \quad \text{沿 } C_{\phi_n} \tag{2.7d}$$

$$M_{ns} = 0 \quad \text{沿 } C_{v_{ns}} \tag{2.7e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} - \gamma_s = 0 \quad \text{沿 } C_{\phi_s} \tag{2.7f}$$

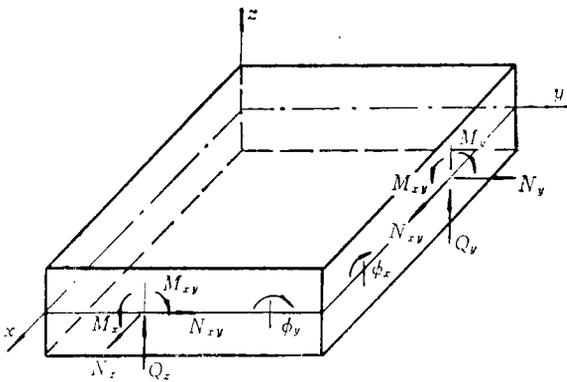


图1 内力及转角的定义

板中各内力及转角的定义如图1.

在进行有限元分析时, 为保证泛函式(2.4)中的积分成立, 需要求  $w, M_x, M_{xy}, M_y$  在全板域内保持连续, 这一条件在单元内易于满足, 而在单元交界面上要求  $w$  连续, 同时又要求  $M_n, M_{ns}$  满足平衡条件, 则过于苛刻. 因为这样就无法把一些独立参数在单元内凝聚掉, 而在最终的方程中保留力和位移两套参数, 成为混合型方程. 引入拉氏乘子以放松单元交界面上对  $M_n, M_{ns}$  的平衡要求, 则

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^* = & \sum_n \left( \int_{\Omega^n} \left\{ -V' + U'' + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \lambda \left[ \bar{N}_z \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \right. \\ & \left. - \int_{C_{M_n}^n} M_n \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \gamma_n \right) ds - \int_{C_{M_{ns}}^n} M_{ns} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \gamma_s \right) ds \right) \\ & - \sum_l \left( \int_{C_l} A_n (M_n^+ + M_n^-) ds + \int_{C_l} A_s (M_{ns}^+ + M_{ns}^-) ds \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中,  $n$  为单元数目,  $l$  为单元间交界面数目,  $\Omega^n$  为单元全域,  $C_l$  为单元之间的交界面,  $C_{M_n}^n, C_{M_{ns}}^n$  为给定  $M_n, M_{ns}$  的单元边界.

拉氏乘子的物理意义是单元边界上的法向转角和切向转角. 不过不能直接将这一物理意义代入泛函式(2.8), 否则有可能出现闭锁现象. 引入新的定义于单元边界上的参数  $\lambda_n$  和  $\lambda_s$ , 使

$$A_n = \lambda_n - \gamma_n, \quad A_s = \lambda_s - \gamma_s. \tag{2.9}$$

显然  $\lambda_n, \lambda_s$  是边界上挠度  $w$  对法向及切向的导数. 在插值函数的选取中, 保证  $\gamma_n$  和  $\gamma_s$  在单元交界面上的连续性, 则代入(2.9)式后的泛函式在单元交界面上给出条件

$$\lambda_n = \frac{\partial w^+}{\partial n}, \quad \lambda_n = \frac{\partial w^-}{\partial n}, \quad \lambda_s = \frac{\partial w^+}{\partial s}, \quad \lambda_s = \frac{\partial w^-}{\partial s} \quad (2.10)$$

$$\text{和} \quad M_n^+ + M_n^- = 0, \quad M_{ns}^+ + M_{ns}^- = 0 \quad (2.11)$$

把参数  $\lambda_n$  和  $\lambda_s$  的定义扩大至单元的全部边界, 可简化泛函的边界积分项, 这要求

$$\begin{cases} \lambda_n - \gamma_n = 0 & \text{沿 } C_n^+ \\ \lambda_s - \gamma_s = 0 & \text{沿 } C_s^+ \end{cases} \quad (2.12)$$

这样最终得到一个广义泛函数

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = \sum_n \left( \int_{\Omega^n} \left\{ -V' + U'' + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \lambda \left[ \bar{N}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\partial\Omega^n} [M_n(\lambda_n - \gamma_n) + M_{ns}(\lambda_s - \gamma_s)] ds \right) \quad (2.13) \end{aligned}$$

其中  $\partial\Omega^n$  表示单元的所有边界。

### 三、自由振动问题的变分原理

等厚度中厚板自由振动问题的 Reissner 变分原理是<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_R = \int_{\Omega} \left\{ -V' - V'' - M_x \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - M_{xy} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - M_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right. \\ \left. + Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) + Q_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \rho [hw^2 + J\phi_x^2 + J\phi_y^2] \right\} d\Omega \\ + \int_{C_{\phi_n}} M_n \phi_n ds + \int_{C_{\phi_s}} M_{ns} \phi_s ds - \int_{C_w} Q_n w ds \quad (3.1) \end{aligned}$$

这里  $\omega$  为板的自由振动频率,  $\rho$  为板的密度,  $J$  为板的横断面的惯性矩, 其值为

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \quad (3.2)$$

采用同第二节一样的方法、记号和条件, 最终得到按单元求和的中厚板自由振动问题的广义泛函式为

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = \sum_n \left( \int_{\Omega^n} \left\{ -V' + U'' + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \omega^2 \rho \left[ hw^2 + J \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \right)^2 + J \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \right)^2 \right] \right\} d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\partial\Omega^n} [M_n(\lambda_n - \gamma_n) + M_{ns}(\lambda_s - \gamma_s)] ds \right) \quad (3.3) \end{aligned}$$

这一泛函的驻值原理给出平衡条件, 几何方程及所有的位移和力学边界条件。

## 四、有限元分析

一个任意四边形经过等参变换后,可在局部坐标系( $\xi$ - $\eta$ )中选取插值函数,使

$$\{\gamma_x, \gamma_y\}^T = [P_1]\{q\} \quad (4.1)$$

$$w = [P_2]\{q\} \quad (4.2)$$

$$\{\lambda_x, \lambda_y\}^T = [P_3]\{q\} \quad (4.3)$$

而 $\{q\}$ 表示结点参数

$$\{q\} = \{w_1, \gamma_{x1}, \gamma_{y1}, \lambda_{x1}, \lambda_{y1}, \dots, w_4, \gamma_{x4}, \gamma_{y4}, \lambda_{x4}, \lambda_{y4}\}^T \quad (4.4)$$

内力矩按单元内部广义参数 $\{\beta\}$ 进行插值

$$\{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = [m]\{\beta\} \quad (4.5)$$

其中  $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9\}^T \quad (4.6)$

为简化以后的工作,分别记

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{array} \right\} = [Dm]\{\beta\}, \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = [DP_2]\{q\} \quad (4.8)$$

和  $\{M_n, M_{ns}\}^T = [T_1][m]\{\beta\} \quad (4.9)$

$$\{\lambda_n - \gamma_n, \lambda_s - \gamma_s\}^T = [T_2]([P_3] - [P_1])\{q\} \quad (4.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} [P_2] \\ [DP_2] - [P_1] \end{pmatrix} \{q\} = [P_4]\{q\} \quad (4.11)$$

在上述方程中,  $[T_1]$ 和 $[T_2]$ 是坐标变换矩阵. 另外再记弯曲和剪切弹性矩阵分别为  $[D_B]$ ,  $[D_S]$ . 且

$$[\bar{N}] = \begin{pmatrix} \bar{N}_x & \bar{N}_{xy} \\ \bar{N}_{xy} & \bar{N}_y \end{pmatrix}, \quad [\bar{m}] = \begin{pmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho h & 0 \\ 0 & 0 & \rho h \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

于是中厚板屈曲问题的广义泛函式(2.13)可表为

$$\bar{\Pi} = \sum_n \left( -\frac{1}{2} \{\beta\}^T [F]^e \{\beta\} + \{\beta\}^T [R]^e \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [k]^e \{q\} + \frac{1}{2} \lambda \{q\}^T [G]^e \{q\} \right) \quad (4.13)$$

式中

$$\begin{cases} [F]^e = \iint_{\Omega^e} [m]^T [D_B]^{-1} [m] d\Omega, & [k]^e = \iint_{\Omega^e} [P_1]^T [D_s] [P_1] d\Omega \\ [R]^e = \iint_{\Omega^e} [Dm]^T ([DP_2] - [P_1]) d\Omega - \int_{\partial\Omega^e} [m]^T [T_1]^T [T_2] ([P_3] - [P_1]) ds \\ [G]^e = \iint_{\Omega^e} [DP_2]^T [\bar{N}] [DP_2] d\Omega \end{cases} \quad (4.14)$$

单元的内部参数可以在单元内部凝聚掉, 由

$$\partial \bar{\Pi} / \partial \{\beta\} = 0 \quad (4.15)$$

消去 $\{\beta\}$ 后有

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \sum_n \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [K]^e \{q\} + \frac{1}{2} \lambda \{q\}^T [G]^e \{q\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{Q\}^T [K] \{Q\} + \frac{1}{2} \lambda \{Q\}^T [G] \{Q\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{这里} \quad [K]^e = [R]^e [F]^{-1} [R]^e + [k]^e \quad (4.17)$$

同理, 中厚板自由振动问题的广义泛函式(3.3)可表为

$$\bar{\Pi} = \sum_n \left( \frac{1}{2} \{\beta\}^T [F]^e \{\beta\} + \{\beta\}^T [R]^e \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [k]^e \{q\} - \frac{1}{2} \omega^2 \{q\}^T [M]^e \{q\} \right) \quad (4.18)$$

单元刚度矩阵为

$$[M]^e = \iint_{\Omega^e} [P_4]^T [\bar{m}] [P_4] d\Omega \quad (4.19)$$

消去内部参数 $\{\beta\}$ , 有

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \sum_n \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [K]^e \{q\} - \frac{1}{2} \omega^2 \{q\}^T [M]^e \{q\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{Q\}^T [K] \{Q\} - \frac{1}{2} \omega^2 \{Q\}^T [M] \{Q\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

对(4.16)和(4.20)两式变分, 得到二个广义本征值方程

$$([K] + \lambda[G])\{Q\} = 0, \quad ([K] - \omega^2[M])\{Q\} = 0 \quad (4.21a, b)$$

为简化计算, 在振动分析中采用了主、次两套参数<sup>[9]</sup>. 仅在总终的方程中保留主参数 $\{Q\}_R$ , 而用类似静力凝聚的方法消去次要参数 $\{Q\}_C$ . 本文选取所有的结点挠度值 $w_i (i=1, n)$ 为主参数, 则

$$\{Q\} = \{Q_R, Q_C\}^T = [T] \{Q\}_R \quad (4.22)$$

$$\text{即} \quad \{Q\}_C = -[K_{CC}]^{-1} [K_{RC}]^T \{Q\}_R \quad (4.23)$$

这里我们记

$$[K] = \begin{pmatrix} [K_{RR}] & [K_{RC}] \\ [K_{RC}]^T & [K_{CC}] \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

变换矩阵 $[T]$ 记为

$$[T] = \begin{pmatrix} [I] \\ -[K_{CC}]^{-1} [K_{RC}]^T \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

于是本征方程(4.21b)变为

$$([K]^* - \omega^2[M]^*)\{Q\}_R = 0 \tag{4.26}$$

式中  $[K]^* = [T]^T[K][T], [M]^* = [T]^T[M][T]$  (4.27)

所有的形函数全采用线性函数，它们是

$$[P_1] = [[PA]_1, [PA]_2, [PA]_3, [PA]_4]_{2 \times 20} \tag{4.28a}$$

$$[PA]_i = \begin{pmatrix} 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28b}$$

$$[P_2] = [[PB]_1, [PB]_2, [PB]_3, [PB]_4]_{1 \times 20} \tag{4.29a}$$

$$[PB]_i = (N_i, 0, 0, 0, 0) \tag{4.29b}$$

$$[P_3] = [[PC]_1, [PC]_2, [PC]_3, [PC]_4]_{2 \times 20} \tag{4.30a}$$

$$[PC]_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \tag{4.30b}$$

$$[m] = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 \\ 0 & 1 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

其中  $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$  (4.32)

### 五、数值结果

本文计算了以下各算例，为了便于比较也列出了部分前人相应的计算值和理论解。在振动力学中  $m, n$  分别表示沿  $x, y$  方向上的半波数。在所有各向同性体算例中，均取泊松比  $\nu = 0.3$ 。

经典薄板理论解<sup>[11]</sup>  $\lambda = 4.000$ ，表1中所有的  $\lambda$  数值均应乘以因子  $\pi^2 D/a^2$ 。对于这一问题，计算还表明，如采用非平行四边形单元，则其解的精度不会受到影响。

表2中所有的  $\lambda$  数值均应乘以因子  $\pi^2 D/a^2$ ，理论解<sup>[11]</sup>  $\lambda = 10.07$ 。

表3中所有  $\omega$  数值均应乘以因子  $10^{-4}(G/\rho h^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

表4中板的厚跨比  $h/a = 10^{-1}$ ，且在  $x$  和  $y$  方向上的跨度分别为  $a$  和  $b$ ，其比值为  $a/b = 1/\sqrt{2}$ 。

表1 单向均匀受压简支方板稳定参数  $\lambda$

h/a	网格				文献[8]	文献[7]	文献[12]
	1×1	2×2	4×4	6×6			
0.001	4.4425	4.1962	4.0509	4.0227	4.0625	4.0000	4.000
0.05	4.3740	4.1372	3.9945	3.9668	3.9991	3.9444	3.911
0.10	4.1001	3.9664	3.8341	3.8078	3.8299	3.7865	3.741
0.15	3.7398	3.7129	3.5938	3.5695	3.5840	3.5496	—

表 2 单向均匀受压固支方板稳定参数  $\lambda$ 

$\frac{h}{a}$	网 格	1×1	2×2	4×4	6×6	文献[8]	文献[7]
	$\lambda$						
0.001		9.8483	11.7849	10.5228	10.2735	10.4819	10.0850
0.05		9.5180	11.2288	10.0175	9.7645	9.9146	9.6025
0.10		8.3099	9.7759	8.7431	8.4951	8.5611	8.3974
0.15		6.9523	7.9881	7.1875	6.9545	6.9474	6.9029

表 3 四边简支方板( $h/a=10^{-3}$ )固有频率  $\omega$ 

$m, n$	网 格	2×4 (半板)	4×4	4×8 (半板)	理论解 [11]	误差%
	$\omega$					
1.1		0.1012	0.1012	0.0975	0.0963	1.2
1.2		—	—	0.2522	0.2408	4.5
1.3		—	—	0.5405	0.4816	12.2

表 4 四边简支矩形板固有频率  $\omega/(G/\rho a^2)^{\frac{1}{2}}$ 

$m, n$	网 格	4×6	3×9 (半板)	三维线弹 性理论解	Mindlin 板 解	文献[9]
	$\omega$					
1.1		0.734	0.717	0.704	0.704	0.704
1.2		1.481	1.421	1.376	1.375	1.377
2.1		2.459	—	2.018	2.016	2.005
1.3		2.899	2.630	2.431	2.428	2.450
2.2		3.071	—	2.634	2.631	2.601
2.3		4.219	—	3.612	3.605	3.583
1.4		5.254	4.417	3.800	3.793	3.896
3.1		—	4.875	3.987	3.979	4.093
3.2		—	5.377	4.535	4.524	4.717
3.3		—	6.256	5.411	5.396	5.752
1.5		—	6.911	5.411	5.396	5.594

表 5 四边简支方板( $h/a=10^{-1}$ )固有频率  $\omega/\sqrt{G/(\rho h^2)}$ 

$m, n$	本文解*	误差%**	三维线弹性理论解	Mindlin板解	文献[9]
1.1	0.09421	1.1	0.0932	0.0930	0.0931
2.1	0.2323	4.3	0.2226	0.2218	0.2217
2.2	0.3577	4.6	0.3421	0.3402	0.3409
3.1	0.4645	11.4	0.4171	0.4144	0.4387
3.2	0.5721	9.2	0.5239	0.5197	0.5484
3.3	0.7597	10.0	0.6889	0.6821	0.7838
4.2	0.8040	7.0	0.7511	0.7431	0.8779

\* 全部采用  $8 \times 8$  有限元网格. \*\* 同弹性理论解的误差.

## 六、结 论

从上节算例结果来看, 随网格的加密, 无论单元形状如何, 解的收敛性是可以得到保证的. 在屈曲问题中, 本文的解较文献[8]收敛得更快些, 同时又省去了文献[8]的总体矩阵求逆过程, 减少许多计算量. 在振动分析中, 本文的收敛速度比文献[9]差些, 但注意到后者采用的是二次插值, 且采用了比本文密得多的网格, 本文还是具有其特点的. 本文全部采用线性插值, 因而单元刚度矩阵的推导非常简单, 最终的方程较为低阶, 同时从第四节出发, 在此基础上发展高阶单元是很容易的.

## 参 考 文 献

- [1] Hughes, T. J. R. and T. E. Tezduyar, Finite element based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element, *Journal of Applied Mechanics*, 48, Sept. (1981), 587.
- [2] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).
- [3] 胡海昌, 《弹性力学的变分原理及其应用》, 科学出版社 (1981).
- [4] Allman, D. J., Finite element analysis of plate buckling using a mixed variational principle, *Proc. 3rd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.* (1971), 683.
- [5] Tabarrok, B. and A. Simpson, An equilibrium finite element model for buckling analysis of plates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11 (1977), 1733.
- [6] Reddy, J. N. and C. S. Tsay, Stability and vibration of thin rectangular plates by simplified mixed finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, 55, 2 (1977), 289.
- [7] Venkateswara Rao, G., J. Venkataramana and K. Kanaka Raju, Stability of moderately thick rectangular plates using a high precision triangular finite element, *Comp. and Struct.*, 5 (1975), 257.
- [8] 罗继伟, 中厚板屈曲的平衡模型有限元分析, *固体力学学报*, 2 (1983), 177.
- [9] Rock, T.A. and E. Hinton, A finite element method for the free vibration of plates allowing for transverse shear deformation, *Comp. and Struct.*, 6 (1976), 37.
- [10] Hinton, E., and N. Bićanić, A comparison of Lagrange and Serendipity Mindlin plate

- elements for free vibration analysis, *Comp. and Struct.*, **10** (1979), 483.
- [11] 铁摩辛柯, S. P., J. M. 盖莱, 《弹性稳定理论》, 第二版, 科学出版社 (1965).
- [12] Srinivas, S. and A. K. Rao, Buckling of thick rectangular plates, *AIAA J.*, **7** (1969), 1645.

## A Hybrid/Mixed Model Finite Element Analysis for Eigenvalue Problem of Moderately Thick Plates

Qian Yuan-yao

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

### Abstract

The buckling and free vibration problems of moderately thick plate are considered in this paper by using the hybrid/mixed finite element model. A modified Reissner principle which only requires  $C^0$  continuity is derived. No locking phenomenon is observed. Linear interpolation is used for all independent unknown function. Finally a displacement generalized eigenvalue equation is obtained, in which the stiffness matrix is symmetric and positively definite. The calculated results show that the method proposed is simple, reliable and satisfactory.