应用数学和力学，第8卷第7期（1987年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性弹性体的弹性力学变分原理*

钱 伟 长

（上海工业大学；上海应用数学和力学研究所）

摘　要

作者自1978年以后，曾发表了一系列有关弹性力学的变分原理和广义变分原理的文章如[1](1978)，[6](1980)，[2]、[3](1983)，[4]、[5](1984)，都是指线性应力应变关系的线性弹性体的。在1985年出版的广义变分原理[7]中，初步推广至非线性弹性体，但并未进行较全面的探讨。本文特别讨论非线性应力应变关系的弹性体的变分原理和广义变分原理，这里有不少问题是值得注意的，有时，它对线性弹性体的变分原理，有指导意义。当应变很小，其高次项可以略去时，本文所得结论，都能近似地化简为通常线性理论的结果。

一、非线性应力应变关系

设有应力应变关系的示意曲线图如图1。OP 曲线上方的面积为余能密度 $B(\sigma)$，曲线下方的面积为应变能密度$A(e)$，它们的定义为

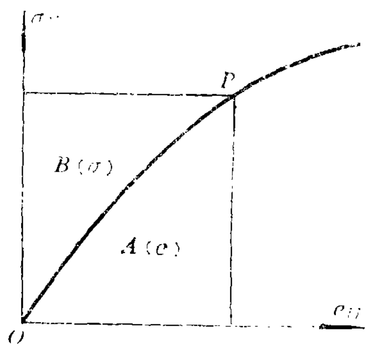

图 1

$$B(\sigma)=\int_0^{\sigma_{ij}} e_{kl}(\sigma)d\sigma_{kl},\quad A(e)=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{kl}(e)de_{kl} \tag{1.1a,b}$$

其中$e_{kl}(\sigma)$是用σ_{ij}表示的e_{kl}，$\sigma_{kl}(e)$是用e_{ij}表示的σ_{kl}。$B(\sigma)$是σ_{ij}的高阶函数，$A(e)$是e_{ij}的高阶函数，对于线性应力应变关系而言

$$e_{kl}(\sigma)=b_{kl\,mn}\sigma_{mn},\quad \sigma_{kl}(e)=a_{kl\,mn}e_{mn} \tag{1.2a,b}$$

于是，对于线性应力应变关系的弹性体，有

$$B(\sigma)=\frac{1}{2}b_{ij\,kl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},\quad A(e)=\frac{1}{2}a_{ij\,kl}e_{ij}e_{kl} \tag{1.3a,b}$$

我们很易证明，对于非线性弹性体而言，应力应变关系可以写成

$$e_{ij}=\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}},\quad \sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \tag{1.4a,b}$$

这对于线性弹性而言，它们也是符合的。试把(1.3a,b)代入(1.4a,b)，即得(1.2a,b)。所以，(1.4a,b)这两个应力应变关系的表达式，不仅适用于非线性弹性体，也适用于线性弹性体，(1.4a,b)是一个适用于两者的一般关系式。从图1，很易认识一个能量恒等式：即

* 1986年12月25日收到。

$$A(e)+B(\sigma)-\sigma_{ij}e_{ij}=0 \tag{1.5}$$

对于线性弹性体而言，上式可以写成

$$\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}=0 \tag{1.6}$$

它就是线性弹性体理论中常见的能量恒等式。但(1.5)是比(1.6)更普遍的表达式，它既适用于线性弹性体，也适用于非线性弹性体。

我们必须指出，有些$A(e)$，$B(\sigma)$的表达式，只适用于线性弹性体，但并不适应于非线性弹性体。例如，朱以文(1984)[8]和王润富(1985)[9]曾从(1.2a,b)和(1.3a,b)中消去b_{klmn}，a_{klmn}而得

$$A=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}=B \tag{1.7}$$

把(1.7)代入(1.5)，证明是满足的。但是，我们很易看到，(1.7)对于非线性弹性体而言，是不适用的。从图很易看到，只有当应力应变曲线是直线时，A才等于B，不是直线时，$A\neq B$。所以(1.7)不能代表一般的余能密度或应变能密度。严格地说，只有在线性弹性体上，A和B在数值上相等，而且等于$e_{ij}\sigma_{ij}/2$。从物理的角度看，A，B都不能用$e_{ij}\sigma_{ij}/2$表示。凡是用$e_{ij}\sigma_{ij}/2$来表示余能或应变能密度所得到结论都是无效的。为了避免这些麻烦，我们可以规定从(1.1a,b)所求得的$B(\sigma)$应该只是σ_{ij}的函数，$A(e)$应该只是e_{ij}的函数。

当e_{ij}，σ_{ij}满足一般的应力应变关系时，它们满足能量恒等式(1.5)。把(1.5)对σ_{ij},e_{ij}变分，得

$$\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}=0 \tag{1.8}$$

这指出，当e_{ij}，σ_{ij}满足一般的应力应变关系(1.4a,b)时，(1.5)式的变分(1.8)式也都满足。所以(1.5)式本身及其一阶变分都是满足应力应变关系的。这相当于说，能量式

$$\Phi=A(e)+B(\sigma)-\sigma_{ij}e_{ij} \tag{1.9}$$

相当于一般应力应变关系式$e_{ij}-\partial B/\partial\sigma_{ij}$，$\sigma_{ij}-\partial A/\partial e_{ij}$的某种二次式。对于线性弹性体而言，我们很易证明

$$\begin{aligned}\Phi&=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\\&=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl})(b_{ijmn}\sigma_{mn}-e_{ij})\\&=\frac{1}{2}a_{ijkl}(b_{klpq}\sigma_{pq}-e_{kl})(b_{ijmn}\sigma_{mn}-e_{ij})\end{aligned} \tag{1.10}$$

或对线弹性体而言，上式也可以写成

$$\Phi=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\qquad\text{(线性)} \tag{1.11}$$

但是对非线性弹性体而言，(1.11)式不适用，亦即对一般弹性体而言，Φ无法析成两个因子，即

$$\Phi\neq\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\qquad\text{(非线性)} \tag{1.12}$$

这指出，(1.11)式不是普遍适用的Φ的合理表达式。

我们还必须指出$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}$和$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}$都是正定的，亦即，对一般

非线性弹性体而言

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\geqslant 0 \tag{1.13a}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}\geqslant 0 \tag{1.13b}$$

总结起来讲，(1.4a)，(1.4b)，(1.5)都可以代表一般弹性体（一般非线性弹性体）的应力应变关系式，而(1.7)，(1.11)只适用于线性弹性体，而不适用于非线性弹性体，所以不能用来作为研究弹性体的变分原理。换句话说：我们应该用一般弹性体的应力应变关系式来研究其变分原理，即使在研究线性弹性体的变分原理时，我们也把它看成是一般非线性弹性体的线性化近似来处理，从而放弃那些只适用于线性弹性体而不适用于一般非线性弹性体的应力应变关系式，如(1.7)，(1.11)等。

二、非线性弹性体的最小位能原理及其广义变分原理

一个小位移变形弹性静力学平衡问题，一共有三种待定量σ_{ij}，e_{ij}，u_i，共15个分量，求解这个问题，共有15个在域V中必须满足的方程式，即

（1） 应变位移关系（适用于小变形）

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.1}$$

（2） 应力应变关系（适用于一般非线性弹性体，包括线性弹性体）

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=e_{ij},\ \text{或}\ \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.2a或b}$$

$$\text{或}\quad A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.2c}$$

（3） 内部应力平衡方程（适用于小位移变形）

$$\sigma_{ij,j}+\bar F_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.3}$$

这σ_{ij}，u_i等9个分量还应该满足六个边界条件

（4） 边界位移已知的条件

$$u_i=\bar u_i \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.4}$$

（5） 边界外力已知的边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar p_i \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{2.5}$$

其中总的边界面积S为

$$S=S_u+S_\sigma \tag{2.6}$$

我们的问题是在(2.4)，(2.5)式的6个边界条件下，从(2.1)，(2.2)，(2.3)等15个方程中求解V内15个待定函数。现在让我们建立最小位能原理来替代上述微分方程的求解问题。

最小位能原理（非线性弹性体的）

在一切有足够光滑性，并满足变分约束条件应变位移关系(2.1)式和边界位移已知条件(2.4)式的u_i和e_{ij}中，其使泛函

$$\Pi_P(u_i,e_{ij})=\int_V\{A(e)-\bar F_i u_i\}dV-\int_{S_\sigma}\bar p_i u_i dS \tag{2.7}$$

为最小值的u_i和e_{ij}，必为非线性弹性体的小位移弹性力学平衡问题的精确解。如果把非线性弹性体的应力应变关系(2.2b)作为不参加变分的约束条件，用它来引进σ_{ij}，则这个泛函极值问题的欧拉方程可以化为平衡方程(2.3)式和边界外力已知条件(2.5)式。

证明的必要条件为

$$\delta\Pi_P=\int_V\left\{\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right\}dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS=0 \tag{2.8a}$$

利用约束条件(2.1)，有

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j} \tag{2.8b}$$

于是，利用格林定理和约束条件(2.4)，得

$$\begin{aligned}\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}dV&=\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j}dV\\&=\int_{S_\sigma}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j\delta u_i dS-\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i dV\end{aligned} \tag{2.9}$$

代入(2.8)式，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_P=&\int_V\left\{-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\right\}dV\\&+\int_{S_\sigma}\left\{\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-\bar{p}_i\right\}\delta u_i dS=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

得下列欧拉方程

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.11a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{2.11b}$$

在利用了不参加变分的约束条件应力应变关系式(2.2b)后，(2.11a,b)分别化为(2.3)式和(2.5)式。

所以，在变分约束条件(2.1)式，(2.4)式和非变分约束条件(2.2b)的约束下，(2.7)式泛函的极值条件导出欧拉方程(2.3)式和(2.5)式。所有这些约束条件和欧拉方程在一起，构成本题的精确解。

证明的充分条件为

$$\delta^2\Pi_P=\int_V\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}dV\geqslant 0 \tag{2.12}$$

这是非线性弹性体的泛函极小的充分条件。它是由正定条件(1.13b)决定的。

我们必须指出，最小位能原理的泛函(2.7)式Π_P在形式上有两个变量e_{ij}，u_i，但由于受(2.1)式位移应变关系式的约束，只有一个量(u_i)是独立的，所以，$\Pi_P(u_i)$在实质上还是一个单变量变分原理的泛函。

现在让我们用传统的拉氏乘子法[10],[11]把约束条件(2.1)，(2.4)吸收到泛函中去。设引入待定拉氏乘子λ_{ij}和μ_i，建立新的四变量泛函

$$\begin{aligned}\Pi_P^*(e_{ij},\ u_i,\ \lambda_{ij},\ \mu_i)=&\int_V\left\{A(e)-\bar{F}_i u_i+\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\lambda_{ij}\right\}dV\\&-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\mu_i dS\end{aligned} \tag{2.13}$$

变分驻值条件为

$$\delta\Pi_P^*(e_{ij},u_i,\lambda_{ij},\mu_i)=\int_V\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\lambda_{ij}+(\lambda_{ij,j}\right.$$

$$-\bar{F}_i)\delta u_i\Big\}dV-\int_{S_\sigma}(\lambda_{ij}n_j+\bar{p}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i+(\mu_i-\lambda_{ij}n_j)\delta u_i\}dS=0 \tag{2.14}$$

由于δe_{ij}，$\delta\lambda_{ij}$，δu_i在V中，δu_i在S_σ上，$\delta\mu_i$，δu_i在S_u上都是独立变分，我们从(2.14)式求得6个新泛函的欧拉方程：

(1) 在V内：$\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}=0$ (2.15a)

(2) 在V内：$e_{ij}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ (2.15b)

(3) 在V内：$\lambda_{ij,j}-\bar{F}_i=0$ (2.15c)

(4) 在S_σ上：$\lambda_{ij}n_j+\bar{p}_i=0$ (2.15d)

(5) 在S_u上：$u_i-\bar{u}_i=0$ (2.15e)

(6) 在S_u上：$\mu_i-\lambda_{ij}n_j=0$ (2.15f)

其中(2.15b)，(2.15e)是原来要吸收进泛函的约束条件，现在变成了新泛函的欧拉方程。从(2.15a)，(2.15f)，我们导出了待定的拉氏乘子，这样识别的拉氏乘子为

$$\lambda_{ij}=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.16a}$$

$$\mu_i=\lambda_{ij}n_j=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.16b}$$

而(2.15c，d)化为平衡方程和外力已知的边界条件（用$\partial A/\partial e_{ij}$表示的）

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.17a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j=\bar{p}_i \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{2.17b}$$

很易看到，如果我们使用未参加变分的应力应变关系(2.2b)，则(2.17a)，(2.17b)立刻化为(2.3)，(2.5)式。

把(2.16a,b)中识别了的拉氏乘子代入(2.13)，得两变量新泛函。

$$\Pi^*_{P2}(e_{ij},\ u_i)=\int_V\left\{A(e)-\bar{F}_j u_j-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right\}dV$$
$$-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i u_i dS-\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j dS \tag{2.18}$$

于是我们得以应变能为基础的二变量广义变分原理（适用于一般非线性弹性体）：

在一切有足够光滑条件的e_{ij},u_i中，其使$\Pi^*_{P2}(e_{ij},u_i)$为驻值的e_{ij},u_i，必为一般非线性弹性体的弹性力学问题的精确解。在这个无约束条件的广义变分原理中，应力应变关系式(2.2b)是一个不参加变分的约束条件，在使用了(2.2b)以后，$\Pi^*_{P2}(e_{ij},u_i)$的变分驻值条件，给出(2.1)，(2.3)，(2.4)，(2.5)等4个方程为欧拉方程。

在应力应变关系(2.2b)的约束条件下，我们可以将$\partial A/\partial e_{ij}$写成$\sigma_{ij}$，于是(2.18)可以写成

$$\Pi^*_{P3}(e_{ij},u_i,\ \sigma_{ij})=\int_V\left\{A(e)-\bar{F}_i u_i-\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}dV$$
$$-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i u_i dS-\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}n_j dS \tag{2.19}$$

其中，e_{ij}，u_i，σ_{ij}并不独立，而是受(2.2b)的约束的。于是，得下列广义位能变分原理。

在(2.2b)的约束下，其使$\Pi^*_{p3}(e_{ij},\ u_i,\ \sigma_{ij})$为驻值的$u_i$，$e_{ij}$，$\sigma_{ij}$，必为非线性弹性体的弹性力学问题的精确解。

我们必须指出下列各点：

（1） $\Pi^*_{p3}(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})$只是形式上的三变量，$\sigma_{ij}$，$e_{ij}$之间并不独立，而是受应力应变关系(2.2b)的约束。在实质上还是二变量广义变分原理。这一点，对于线性弹性体的问题而言，业已在文[3](1983)中证明了。

（2） 在线性弹性体中，它还原为胡鹫原理(1955)[12],[13]的泛函Π_{HW}。所以，胡鹫原理是这一广义位能变分原理的线性化后的特例，而且同样道理，胡鹫原理的泛函并不像胡海昌[14]所强调的那样是三变量的，而是受(2.2b)为约束条件的变分原理，实质上是只有两个独立变量的变分原理。

（3） 从推导过程中，我们能够通过传统的拉氏乘子法，合理地唯一地识别待定乘子，并不需要像胡海昌(1985)[15]那样，用所谓"猜谜语法"。在胡氏猜谜语法中，并不能肯定(2.2b)是不是约束条件。这和胡海昌原来用的猜谜过程(1954)[13]并无区别。

（4） 鹫津久一郎(1955)[12]的原文推导中，采用了传统的拉氏乘子法，而且明确地在该文推导过程中，在11页(2.24)式中引用了相应于

$$\lambda_{ij}=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=-\sigma_{ij} \tag{2.20}$$

的算式亦即是说，他是在(2.2b)的约束条件下，才得到$\lambda_{ij}=-\sigma_{ij}$的结论的，所以$\Pi_{HW}$的$e_{ij}$，$u_i$，$\sigma_{ij}$中，三变量并不独立。

三、非线性弹性体的最小余能原理及其广义变分原理

最小余能原理（非线性弹性体的）为：

在一切有足够光滑性，并满足变分约束条件平衡方程(2.3)式和边界外力已知的边界条件(2.5)式的一切σ_{ij}中，其使泛函

$$\Pi_C(\sigma_{ij})=\int_V B(\sigma)\,dV-\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS \tag{3.1}$$

为最小值的σ_{ij}，必为非线性弹性体的小位移弹性力学平衡问题的精确解。如果把非线性弹性体的应力应变关系(2.2a)作为不参加变分的约束条件，用它来引进e_{ij}，则这个泛函极值的欧拉方程可以化为应变位移关系(2.1)式和边界位移已知的边界条件(2.4)式。

证明的必要条件为

$$\delta\Pi_C=\int_V\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\right\}dV-\int_{S_u}n_j\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}dS=0 \tag{3.2}$$

根据恒等式

$$\begin{aligned}&\int_V\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}dV\\&\qquad=-\int_V u_i\delta\sigma_{ij,j}dV+\int_{S_\sigma}u_in_j\delta\sigma_{ij}dS+\int_{S_u}u_in_j\delta\sigma_{ij}dS\end{aligned} \tag{3.3}$$

在利用了约条件(2.3)，(2.5)式后，恒等式可以写成

$$\int_V\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}dV-\int_{S_u}u_in_j\delta\sigma_{ij}dS=0 \tag{3.4}$$

把(3.4)式从(3.2)式中减去，得

$$\delta\Pi_C=\int_V\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}\delta\sigma_{ij}dV+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS=0 \tag{3.5}$$

由于$\delta\sigma_{ij}$在V中和在S_u上都独立的，从(3.5)式得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.6a}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{3.6b}$$

可以看到，从(3.6a)和(2.2a)中消去$\partial B/\partial\sigma_{ij}$，即得(2.1)式，即应变位移关系式。这就指出，如果应力应变关系(2.2a)得到满足，则(3.6a)式即给出(2.1)式。所以(2.2a)也是一种约束，即不参加变分的约束。现在证明最小余能原理的充分条件：

$$\delta^2\Pi_C=\int_V\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}dV\geqslant 0 \tag{3.7}$$

这是根据正定条件(1.13a)决定的，这样就完全证明了非线性弹性体的弹性力学问题的最小余能原理。其约束条件为平衡方程(2.3)和边界外力已知条件(2.5)式，在不参加变分的应力应变关系(2.2a)的约束下，最小余能原理给出欧拉方程(2.1)式和(2.4)式，前者为应变位移关系，后者为边界位移已知条件。如果把$B(\sigma)$化为线性弹性体的表达式，则(3.1)式化为常见的线性弹性体的最小余能原理。

现在用两个待定拉氏乘子λ_i，μ_i，把(2.3)和(2.5)两个约束条件吸收到泛函$\Pi_C(\sigma_{ij})$中去。形成下列新泛函

$$\begin{aligned}\Pi_C^*(\sigma_{ij},\lambda_i,\mu_i)=&\int_V\left\{B(\sigma)+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\lambda_i\right\}dV\\&-\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS+\int_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\mu_i dS\end{aligned} \tag{3.8}$$

变分驻值条件给出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_C^*=&\int_V\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta\lambda_i\right\}dV\\&-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\delta\sigma_{ij}dS+\int_{S_\sigma}\{(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta\mu_i+\mu_i n_j\delta\sigma_{ij}\}dS=0\end{aligned} \tag{3.9}$$

利用恒等式(3.3)，上式可以写成

$$\begin{aligned}\delta\Pi_C^*=&\int_V\left\{\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}+(\lambda_i-u_i)\delta\sigma_{ij,j}\right.\\&\left.+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta\lambda_i\right\}dV+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS\\&+\int_{S_\sigma}\{(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta\mu_i+(\mu_i+u_i)n_j\delta\sigma_{ij}\}dS=0\end{aligned} \tag{3.10}$$

于是，导出欧拉方程

(1) 在V内 $\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ (3.11a)

(2) 在V内 $\lambda_i-u_i=0$ (3.11b)

(3) 在V内 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ (3.11c)

(4) 在S_u上 $u_i-\bar{u}_i=0$ (3.11d)

(5) 在S_σ上 $n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i=0$ (3.11e)

(6) 在S_σ上 $\mu_i+u_i=0$ (3.11f)

其中(3.11c)和(3.11e)为原泛函的约束条件，(3.11a)，(3.11d)为原泛函的欧拉方程，(3.11b)，(3.11f)决定了λ_i，μ_i，

$$\lambda_i=u_i \quad (\text{在}V\text{内}),\quad \mu_i=-u_i \quad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{3.12}$$

把它们代入(3.8)，得广义余能原理

$$\Pi^*_{C2}(\sigma_{ij},u_i)=\int_V\left\{B(\sigma)+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\right\}dV-\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS-\int_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)u_i dS \tag{3.13}$$

这是适用于非线性弹性体的广义余能原理（二变量）

在一切有足够光滑条件的σ_{ij}，u_i中，其使二变量广义余能泛函(3.13)为驻值的σ_{ij},u_i，必为一般弹性体的弹性力学问题的精确解。当然应力应变关系(2.2a)是一个不参加变分的约束条件，在使用了(2.2a)以后，$\Pi^*_{C2}(\sigma_{ij},u_i)$的变分驻值条件，给出(2.1)，(2.3)，(2.4)，(2.5)等4个方程为欧拉方程。

我们也必须指出下列各点：

（1） 在线性弹性体中，(3.13)式还原为Hellinger-Reissner原理的泛函Π_{HR}。所以，Hellinger-Reissner原理是这一广义变分原理的线性化后的特例。

（2） 在推导过程中，我们能够通过传统的拉氏乘子法，合理地唯一地识别待定乘子，并不需要像胡海昌(1985)[15]那样，用所谓猜谜语法。在胡氏猜谜语法中，并不能肯定(2.2a)是不是约束条件。

（3） 应力应变关系(2.2a)是这一原理中不参加变分的约束条件。

四、高阶拉氏乘子法和更一般的三变量的广义变分原理

根据上两节的讨论，不论广义位能原理和广义余能原理，它们都不是真正的三变量的广义变分原理。都以应力应变关系(2.2a)或(2.2b)作为约束条件。

我们可以证明，用一般拉氏乘子法并不能消除这个约束条件。我们只能求之于高阶拉氏乘子法(1983)[2]。

我们用高阶拉氏乘子A把能量恒等式(1.5)引进广义位能原理的泛函。得

$$\Pi_{GP}(\sigma_{ij},e_{ij},u_i,A)=\Pi^*_{P3}(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})+\int_V A(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{4.1}$$

其中$\Pi^*_{P3}(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})$见(2.19)，而且$(e_{ij},\sigma_{ij})$中受(2.2b)的约束。$A$是$x_i$，$e_{ij}$，$u_i$，$\sigma_{ij}$的任意函数

$$A=A(x_i,e_{ij},u_i,\sigma_{ij}) \tag{4.2}$$

(4.1)的变分驻值问题给出

$$\delta\Pi_{GP}=\int_V(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})\delta A dV+\int_V\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)(1+A)\delta e_{ij}+\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)A\delta\sigma_{ij}-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV$$

$$+\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS-\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS=0 \tag{4.3}$$

得欧拉方程

（1） 在V内 $A+B-e_{ij}\sigma_{ij}=0$ (4.4a)

（2） 在V内 $(1+\Lambda)\left(\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)=0$ (4.4b)

（3） 在V内 $\Lambda\left(\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)-\left[e_{ij}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]=0$ (4.4c)

（4） 在V内 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ (4.4d)

（5） 在S_σ上 $\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0$ (4.4e)

（6） 在S_u上 $u_i-\bar{u}_i=0$ (4.4f)

(4.4a)给出σ_{ij}，e_{ij}所应该满足应力应变关系。所以，不论Λ是什么函数，(4.4b)自然满足，而(4.4c)给出

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{4.5}$$

这就证明了：不论$\Lambda(x_i,\ e_{ij},\ \sigma_{ij},\ u_i)$是什么函数，$\Pi_{GP}$是更一般的，不受任何约束条件的，而且是三变量完全独立的广义变分原理。

同样，我们也可以用另一高阶拉氏乘子Λ'在$\Pi^*_{C2}(\sigma_{ij},\ u_i)$中引进能量恒等式(1.5)，得

$$\Pi_{GC}(\sigma_{ij},\ e_{ij},\ u_i,\ \Lambda')=\Pi^*_{C2}(\sigma_{ij},\ u_i)+\int_V\Lambda'(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{4.6}$$

其中$\Pi^*_{C2}(\sigma_{ij},u_i)$见(3.13)，$\Lambda'$是$x_i$，$e_{ij}$，$\sigma_{ij}$，$u_i$的任何函数。

$$\Lambda'=\Lambda'(x_i,\ e_{ij},\ \sigma_{ij},\ u_i) \tag{4.7}$$

其变分驻值条件给出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{GC}=&\int_V(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})\delta\Lambda'dV\\&+\int_V\left\{\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\Lambda'+\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\Lambda'\delta e_{ij}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV\\&+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS-\int_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta u_i dS=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

得欧拉方程：

（1） 在V内 $A+B-\sigma_{ij}e_{ij}=0$ (4.9a)

（2） 在V内 $\left(\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\Lambda'+\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ (4.9b)

（3） 在V内 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ (4.9c)

（4） 在V内 $\Lambda'\left(\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)=0$ (4.9d)

（5） 在S_u上 $u_i-\bar{u}_i=0$ (4.9e)

（6） 在S_σ上 $n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i=0$ (4.9f)

从(4.9a)，(4.9d)，得A'不定而

$$A+B-e_{ij}\sigma_{ij}=0\text{ 和 }\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \tag{4.10}$$

于是(4.9b)给出

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{4.11}$$

而(4.9c)，(4.9e)，(4.9f)分别为平衡方程，和有关边界条件。

这就证明了，不论$A'(x_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, u_i)$是什么函数，$\Pi_{GC}$是更一般的，不受任何约束的，而且是三变量都独立的广义变分原理。

Π_{GP}和Π_{GC}都适用于一般的非线性弹性体的弹性力学问题广义变分原理。

我们从(4.6)，(4.1)可以证明

$$\Pi_{GP}+\Pi_{GC}=\int_V(1+A+A')(A+B-\sigma_{ij}e_{ij})dV=0 \tag{4.12}$$

只要

$$1+A+A'=0 \tag{4.13}$$

这就证明了，只要A，A'满足(4.13)，则Π_{GP}和Π_{GC}是等价的。(4.13)式称为等价条件。

到此，我们指出下列各点：

（1） Π_{GP}，Π_{GC}都是不受任何约束的三变量都独立的广义变分原理。

（2） Π_{GP}，Π_{GC}都适用于非线性弹性体的弹性力学问题。当应变很小，可以略去非线性项时，Π_{GP}，Π_{GC}分别退化为(1983)[2]所提出的线性弹性体的有关广义变分原理。

（3） A，A'都是x_i，σ_{ij}，e_{ij}，u_i的任意函数，不一定是常量。

（4） A，B都分别是e_{ij}和σ_{ij}的函数，在非线性弹性体时，满足(1.12)式。不像线性弹性体那样，可以析成两个因子[见(1.11)]。所以，本法和胡海昌(1985)[15]所谈的加权残差法完全不相同。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，清华大学科学报告TH 78011 (1978)；力学与实践，1，1 (1979)，16—24，1，2 (1979)，18—27；机械工程学报，15，2 (1979)，1-23。

[2] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2 (1983)，137—150。

[3] 钱伟长，再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定理问题和胡海昌先生商榷，力学学报，4 (1983)，325-340。

[4] 钱伟长，亦论广义变分原理和无条件变分原理——就本题答胡海昌先生，固体力学学报，3 (1984)，461—468。

[5] 钱伟长，弹性理论中各种变分原理的分类，应用数学和力学，5，6 (1984)，765—770。

[6] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社（上册）(1980年8月)。

[7] 钱伟长，《广义变分原理》，多学科学术讲座丛书，知识出版社，上海 (1985)。

[8] 朱以文，关于胡海昌-鹫津变分原理中三类变量的独立性的研究，武汉水利电力学院弹性力学教研室印 (1984年11月)。

[9] 王润富，线弹性、小位移情形下，弹性力学中三类、两类、一类变量的有约束条件变分原理和无约束条件变分原理，华东水利学院 (1985年)，私人通讯（未发表）。

[10] Courant and Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, German edition (1924), Springer Verlag, First English edition (1952), Interscience Publishers, New York, Vol. I, 164—274.

[11] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw Hill, (U. K) (1977), 68, 77, 80, 304, 309, 333.

[12] Washizu, K., On the variational principles of elasticity and plasticity, *Technical Report*, Aeroelastic and Structural Research Laboratory, M. I. T., 25-18, March (1955).

[13] 胡海昌，论弹性力学与受范体力学中的一般变分原理，物理学报，10, 3 (1954), 259.

[14] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社 (1982).

[15] 胡海昌，关于拉氏乘子法及其它，力学学报，5 (1985), 426~434.

Variational Principles in Elasticity with Nonlinear Stress-Strain Relation

Chien Wei-zang

(*Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

Since 1978, a series of papers have been published concerning the variational principles and generalized variational principles in elasticity such as[1](1979),[6](1980),[2,3](1983),[4, 5](1984). All these papers deal with the elastic body with linear stress-strain relations. In 1985, a book was published on generalized variational principles dealing with some nonlinear elastic body, but never going into detailed discussion. This paper discusses particularly variational principles and generalized variational principles for elastic body with nonlinear stress-strain relations. In these discussions, we find many interesting problems worth while to pay some attention. At the same time, these discussions are also instructive for linear elastic problems. When the strain is small, the high order terms may be neglected, the results of this paper may be simplified to the well-known principles in ordinary elasticity problems.