应用数学和力学，第8卷第7期（1987年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

含多个任意参数的广义变分原理及换元乘子法

龙驭球

（清华大学，1984年7月收到）

摘　要

弹性力学变分原理的泛函变换可分为三种格式：Ⅰ、放松格式，Ⅱ、增广格式，Ⅲ、等价格式．根据格式Ⅲ，提出含多个任意参数的广义变分原理及其泛函表示式，其中包括：以位移u为一类泛函变量的多参数广义变分原理；以位移u和应力σ为二类泛函变量的多参数广义变分原理；以位移u和应变ε为二类泛函变量的多参数广义变分原理；以位移u应变ε和应力σ为三类泛函变量的多参数广义变分原理．由这些原理可得出等价泛函一系列新形式，此外，通过参数的合理选择，可构造出一系列有限元模型．

本文还讨论了拉氏乘子法“失效”问题，指出“失效”现象产生的原因，提出乘子法“恢复有效”的作法——换元乘子法．

一、前　　言

在弹性力学变分原理中，我们把弹性力学问题中的全部变量分为泛函变量和增广变量两类，把全部条件分为强制条件（各泛函变量之间应事先满足的条件）、自然条件（包括欧拉方程和自然边界条件）和增广条件（增广变量与泛函变量之间的条件）三类．

文献中常常讨论两个变分原理间的等价关系问题．我们认为，为了使概念明确，还应区分如下的三个不同层次：

（1） 广义等价——两个变分原理的全部变量相同，全部条件相同．

（2） 等价——两个变分原理不仅广义等价，而且它们的泛函变量和增广变量分别相同，它们的强制条件、增广条件和自然条件分别相同．

（3） 互等——两个变分原理不仅等价，而且它们的泛函彼此相等或只相差一个比例系数．

为了便于引用，现将弹性力学小位移理论的全部条件（包括基本微分方程和边界条件）列出如下．这里全部变量包含位移u、应变ε、应力σ三类．

（1） 平衡微分方程

$$\mathscr{D}\sigma+\bar{F}=0 \qquad (\text{在体积域}V\text{内}) \tag{1.1}$$

（2） 应变位移关系

$$\mathscr{D}^T u-\varepsilon=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.2}$$

（3） 应力应变关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=0 \quad 或 \quad \boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}=0 \quad （在V内） \tag{1.3}$$

其中 $\mathbf{A}=\mathbf{a}^{-1}$

（4） 位移给定的边界条件

$$\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0 \quad （在固定边界 S_u 上） \tag{1.4}$$

（5） 外力给定的边界条件

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}}=0 \quad （在自由边界S_\sigma上） \tag{1.5}$$

这里

$$\mathbf{u}=[u \quad v \quad w]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}]^T$$

$$\mathbf{a}=\frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{array}\right] \tag{1.6}$$

$$\mathscr{D}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{array}\right] \tag{1.7}$$

$$\mathbf{L}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{array}\right] \tag{1.8}$$

其中，l,m,n为边界外法线的方向余弦。

我们要用到如下形式的分部积分公式：

$$\iiint_V (\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}dV=-\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T(\mathscr{D}^T\mathbf{u})dV+\iint_S (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}dS \tag{1.9}$$

二、泛函变换的三种格式

弹性力学变分原理的泛函变换可分为三种格式：格式Ⅰ（放松格式）就是拉氏乘子法格式，即将强制条件转化为自然条件的广义等价格式；格式Ⅱ（增广格式）是将增广条件转化为自然条件的广义等价格式；格式Ⅲ（等价格式）是将无条件泛函变换为含任意参数的等价泛函一般形式的等价格式。

1. 泛函变换格式Ⅰ（放松格式）

变换前的泛函是一个条件泛函$\Pi^{(0)}$，其强制条件为

$$\boldsymbol{\phi}_i=0 \quad (\text{在}\ \tau_i\ \text{内}) \tag{2.1}$$

变换后的泛函是一个无条件泛函$\Pi^{(u)}$：

$$\Pi^{(u)}=\Pi^{(c)}+\sum_i\int_{\tau_i}\boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\phi}_i d\tau_i \tag{I}$$

这里$\boldsymbol{\lambda}_i$是乘子，可由$\Pi^{(u)}$的自然条件加以识别，$\Pi^{(c)}$的泛函变量连同识别后的乘子变量即组成$\Pi^{(u)}$的泛函变量。

格式Ⅰ的特点是将条件泛函$\Pi^{(c)}$变换为无条件泛函$\Pi^{(u)}$，$\Pi^{(c)}$与$\Pi^{(u)}$为彼此广义等价但不彼此等价，$\Pi^{(c)}$的强制条件(2.1)转化为$\Pi^{(u)}$的自然条件。

2. 泛函变换格式Ⅱ（增广格式）

格式Ⅱ的特点是将少变量无条件泛函$\Pi^{(-)}$变换为与之广义等价的多变量无条件泛函$\Pi^{(+)}$，使$\Pi^{(-)}$的增广条件转化为$\Pi^{(+)}$的自然条件。

更详细地说，在变换前，原泛函$\Pi^{(-)}(\mathbf{y})$为以$\mathbf{y}$为泛函变量的少变量无条件泛函，又$\mathbf{z}$为增广变量，相应的增广条件为

$$\mathbf{z}-f(\mathbf{y})=0 \quad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.2}$$

在变换后，新泛函$\Pi^{(+)}(\mathbf{y},\mathbf{z})$为以$\mathbf{y}$和$\mathbf{z}$为泛函变量的多变量无条件泛函，由下式确定：

$$\Pi^{(+)}(\mathbf{y},\mathbf{z})=\Pi^{(-)}(\mathbf{y})+\eta Q(\mathbf{y},\mathbf{z}) \tag{II}$$

其中Q为式(2.2)左边增广条件式的正定二次型的积分：

$$Q=\int_V\frac{1}{2}[\mathbf{z}-f(\mathbf{y})]^T\mathbf{C}[\mathbf{z}-f(\mathbf{y})]dV \tag{2.3}$$

这里$\mathbf{C}$是正定对称矩阵，又η是任意非零参数。可以证明，变换前后的两个泛函$\Pi^{(-)}(\mathbf{y})$和$\Pi^{(+)}(\mathbf{y},\mathbf{z})$彼此为广义等价。

3. 泛函变换格式Ⅲ（等价格式）

格式Ⅲ的特点是将无条件泛函Π变换为含多个任意参数的无条件泛函Π_L：

$$\Pi_L=\Pi+\sum_i\eta_iQ_i \tag{III}$$

其中η_i为任意参数，Q_i为由Π的自然条件式组成的二次型在相应域内的积分。在一般情况下，新泛函Π_L为原泛函Π的等价泛函的一般形式。在退化情况下（当η_i为临界值η_{ci}时），$\Pi_L\Big|_{\eta_i=\eta_{ci}}$退化为少变量无条件泛函，原泛函的某些泛函变量转化为新泛函的增广变量，原泛函的某些自然条件转化为新泛函的增广条件，此时新泛函与原泛函彼此为广义等价，而非等价。

三、含多个任意参数的广义变分原理

根据泛函变换格式Ⅲ，现分别讨论一类、二类、三类泛函变量的多参数广义变分原理。

1. 一类泛函变量u的多参数广义变分原理

以位移$\mathbf{u}$为基本变量时弹性力学的基本方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{A}\mathscr{D}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})+\bar{\mathbf{F}}=0 & (\text{在}V\text{内}) \\ \mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0 & (\text{在}S_u\text{上}) \\ \mathbf{L}\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\bar{\mathbf{T}}=0 & (\text{在}S_\sigma\text{上})\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

与此相应的一类泛函变量 $\mathbf{u}$ 的无条件泛函可采用

$$\Pi_{1P}(\mathbf{u})=\iiint_V\left[\frac{1}{2}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})^T\mathbf{A}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV$$

$$-\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}\mathbf{A}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})dS-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS \tag{3.2}$$

$\Pi_{1P}(\mathbf{u})$即为放松几何边界条件的势能原理的能量泛函。其自然条件即为式(3.1)。

根据泛函变换格式Ⅲ，以$\Pi_{1P}(u)$作为变换前的泛函，利用它的三个自然条件(3.1a,b,c)按格式Ⅲ进行变换，可得出其等价泛函更一般的形式如下：

$$\Pi_{1L}(\mathbf{u})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\sum_{i=1}^{5}\alpha_i R_i \tag{3.3}$$

其中R_i为由式(3.1)左边的三个自然条件式组成的二次项的积分：

$$\left.\begin{array}{l}R_1=\iiint_V\frac{1}{2}[\mathbf{A}\mathscr{D}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})+\bar{\mathbf{F}}]^T[\mathbf{A}\mathscr{D}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})+\bar{\mathbf{F}}]dV \\ R_2=\iint_{S_u}\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \\ R_3=\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{A}\mathscr{D}\mathscr{D}^T\mathbf{u}+\bar{\mathbf{F}})dS \\ R_4=\iint_{S_\sigma}\frac{1}{2}(\mathbf{L}\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{L}\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\bar{\mathbf{T}})dS \\ R_5=\iint_{S_\sigma}(\mathbf{L}\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{A}\mathscr{D}\mathscr{D}^T\mathbf{u}+\bar{\mathbf{F}})dS\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

如果被积函数中 $\mathbf{u}$ 的最高导数在域V内限定为一阶，在边界 S 上限定为零阶，则得泛函的简易形式如下：

$$\Pi_{1L}(\mathbf{u})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\alpha_2 R_2 \tag{3.5}$$

2. 二类泛函变量$\mathbf{u}$,$\boldsymbol{\sigma}$的多参数广义变分原理

以位移 $\mathbf{u}$ 和应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 为基本变量时弹性力学的基本方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}}=0 & (\text{在}V\text{内}) \\ \mathscr{D}^T\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=0 & (\text{在}V\text{内}) \\ \mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0 & (\text{在}S_u\text{上}) \\ \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}}=0 & (\text{在}S_\sigma\text{上})\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

与此相应的二类泛函变量 $\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\sigma}$ 的无条件泛函可采用

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=&\iiint_V\left[\boldsymbol{\sigma}^T(\mathscr{D}^T\mathbf{u})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV\\&-\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}\sigma dS-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS\\ \text{或}\qquad&\\ \Pi'_{HR}(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma})=&\iiint_V\left[-\mathbf{u}^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right]dV\\&+\iint_{S_u}\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{L}\sigma dS+\iint_{S_\sigma}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{u}dS\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$ 和 $\Pi'_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$即为Hellinger-Reissner泛函的两种表示式。由式(1.9)得知，二者是互等的。

根据格式Ⅲ，可得出其等价泛函更一般的形式如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})&=\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+\sum_{i=1}^{9}\beta_iP_i\\&=\Pi'_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+\sum_{i=1}^{9}\beta_iP_i\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\iiint_V\frac{1}{2}(\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})dV\\P_2&=\iiint_V\frac{1}{2}(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})dV\\P_3&=\iiint_V(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u})dV\\P_4&=\iint_{S_u}\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS\\P_5&=\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})dS\\P_6&=\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u})dS\\P_7&=\iint_{S_\sigma}\frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}})dS\\P_8&=\iint_{S_\sigma}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\mathscr{D}^T\mathbf{u})dS\\P_9&=\iint_{S_\sigma}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})dS\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

其中

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}b_1&0&0&0&b_3&b_2\\0&b_2&0&b_3&0&b_1\\0&0&b_3&b_2&b_1&0\end{array}\right]$$

b_1, b_2, b_3为任意给定值。由于

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})-P_1-P_6 \tag{3.10}$$

因此式(3.8)可改写为

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})-P_1-P_6+\sum_{i=1}^{9}\beta_i P_i \tag{3.11}$$

如果$\beta_1=\beta_6=1$，$\beta_2=\beta_3=\beta_5=\beta_7=\beta_8=\beta_9=0$，则由式(3.11)得知，$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$ 即退化为一类泛函变量 $\mathbf{u}$ 的泛函如下：

$$\Pi_{1L}(\mathbf{u})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\beta_4 P_4=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\beta_4 R_2$$

此泛函实际上就是泛函(3.5)。

如果对被积函数中导数的最高阶数加以限制，则得二类泛函变量$\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}$两种简易泛函形式如下：

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+\beta_1P_1+\beta_4P_4+\beta_7P_7 \tag{3.12}$$

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\Pi'_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+\beta_2P_2+\beta_4P_4+\beta_7P_7 \tag{3.13}$$

在式(3.12)，$\mathbf{u}$限定为一阶（在V内）和零阶（在S上），$\boldsymbol{\sigma}$限定为零阶。在式(3.13)，$\boldsymbol{\sigma}$限定为一阶（在V内）和零阶（在S上），$\mathbf{u}$限定为零阶。

3. 二类泛函变量 u,ε 的多参数广义变分原理

以位移$\mathbf{u}$和应变$\boldsymbol{\varepsilon}$为基本变量时弹性力学的基本方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}}=0 & (\text{在}V\text{内})\\ \boldsymbol{\varepsilon}-\mathscr{D}^T u=0 & (\text{在}V\text{内})\\ \mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0 & (\text{在}S_u\text{上})\\ \mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}}=0 & (\text{在}S_\sigma\text{上})\end{array}\right\} \tag{3.14}$$

与此相应的二类泛函变量$\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$的无条件泛函可采用

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\iiint_V\left[(\mathscr{D}^T\mathbf{u})^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV\\ \qquad -\iint_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}dS-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS\\ \text{或}\\ \Pi'_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\iiint_V\left[-(\mathscr{D}(\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})+\bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}\right]dV\\ \qquad +\iint_{S_u}\bar{\mathbf{u}}\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}dS+\iint_{S_\sigma}(\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{u}dS\end{array}\right\} \tag{3.15}$$

其中$\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})$与$\Pi'_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})$是互等的。

根据格式Ⅱ，可得出其等价泛函更一般的形式如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})&=\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})+\sum_{i=1}^{9}\gamma_i S_i\\ &=\Pi'_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})+\sum_{i=1}^{9}\gamma_i S_i\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=\iiint_V \frac{1}{2}(\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon})^T\mathbf{A}(\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon})dV\\
S_2&=\iiint_V \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}})^T(\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}})dV\\
S_3&=\iiint_V (\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{BA}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathscr{D}^T\mathbf{u})dV\\
S_4&=\iint_{S_u} \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS\\
S_5&=\iint_{S_u} (\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{LA}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathscr{D}^T\mathbf{u})dS\\
S_6&=\iint_{S_u} (\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}})dS\\
S_7&=\iint_{S_\sigma} \frac{1}{2}(\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}})dS\\
S_8&=\iint_{S_\sigma} (\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{LA}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathscr{D}^T\mathbf{u})dS\\
S_9&=\iint_{S_\sigma} (\mathbf{LA}\boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{A}\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\bar{\mathbf{F}})dS
\end{aligned}\right\}\tag{3.17}$$

由于

$$\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})-S_1-S_5\tag{3.18}$$

因此式(3.16)可改写为

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})-S_1-S_5+\sum_{i=1}^{9}\gamma_i S_i\tag{3.19}$$

如果 $\gamma_1=\gamma_5=1$，$\gamma_2=\gamma_3=\gamma_6=\gamma_7=\gamma_8=\gamma_9=0$，则由式(3.19)得知，$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})$ 即退化为一类泛函变量 $\mathbf{u}$ 的泛函如下：

$$\Pi_{1L}(\mathbf{u})=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\gamma_4S_4=\Pi_{1P}+\gamma_4R_2$$

此泛函实际上就是泛函(3.5)。

如果对被积函数中导数的最高阶数加以限制，则得二类泛函变量 $\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon}$ 的两种简易泛函形式如下：

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})+\gamma_1S_1+\gamma_4S_4+\gamma_7S_7\tag{3.20}$$

$$\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\Pi_2'(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})+\gamma_2S_2+\gamma_4S_4+\gamma_7S_7\tag{3.21}$$

在(3.20)中，$\mathbf{u}$ 限定为一阶(在V内)和零阶(在S上)，$\boldsymbol{\varepsilon}$限定为零阶。在(3.21)中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 限定为一阶(在V内)和零阶(在 S 上)，$\mathbf{u}$ 限定为零阶。

4. 三类泛函变量 u, ε, σ 的多参数广义变分原理

以位移 $\mathbf{u}$、应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}$、应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 为基本变量时弹性力学的基本方程为式(1.1)到(1.5)。

与此相应的三类泛函变量 $\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}$ 的无条件泛函可采用胡海昌-鹫津泛函：

$$
\left.\begin{aligned}
\Pi_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) &= \iiint_V \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV \\
&\quad - \iint_{S_u}(u-\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\,dS - \iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}\,dS \\
\Pi'_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) &= \iiint_V \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} - (\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{u}\right]dV \\
&\quad + \iint_{S_u}\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\,dS + \iint_{S_\sigma}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{u}\,dS
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}
$$

根据格式Ⅲ，可得出其等价泛函更一般的形式如下：

$$
\Pi_{3L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) = \Pi_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) + \sum_{i=1}^{14}\eta_i Q_i = \Pi'_{HW}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) + \sum_{i=1}^{14}\eta_i Q_i \tag{3.23}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \iiint_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})^T\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})\,dV \\
Q_2 &= \iiint_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})\,dV \\
Q_3 &= \iiint_V \frac{1}{2}(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})\,dV \\
Q_4 &= \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma})^T(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})\,dV \\
Q_5 &= \iiint_V (\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})\,dV \\
Q_6 &= \iiint_V (\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{B}\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})\,dV \\
Q_7 &= \iint_{S_u} \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\,dS \\
Q_8 &= \iint_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})\,dS \\
Q_9 &= \iint_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{L}\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})\,dS \\
Q_{10} &= \iint_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})\,dS \\
Q_{11} &= \iint_{S_\sigma} \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})^T(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})\,dS \\
Q_{12} &= \iint_{S_\sigma} (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})\,dS \\
Q_{13} &= \iint_{S_\sigma} (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{L}\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{D}^T\mathbf{u})\,dS \\
Q_{14} &= \iint_{S_\sigma} (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}})^T(\mathscr{D}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}})\,dS
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}
$$

除下面所列退化情形外，式(3.23)所示泛函即为三类泛函变量 $\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$ 的多参数泛函的一般形式。

下面列出三种退化情况。

第一，不含 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的退化情况。设

$$\eta_2=1+\eta_1,\ \eta_4=-1-\eta_1,\ \eta_5=\eta_6,\ \eta_8=\eta_9,\ \eta_{12}=\eta_{13}$$

则泛函(3.23)退化为二类泛函变量 $\mathbf{u}$,$\boldsymbol{\sigma}$ 的泛函如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})&=(\Pi_{HW}-Q_1)+(1+\eta_1)(Q_1+Q_2-Q_4)+\eta_3Q_3+\eta_5(Q_5+Q_6)\\&\quad+\eta_7Q_7+\eta_{10}Q_{10}+\eta_8(Q_8+Q_9)+\eta_{11}Q_{11}+\eta_{12}(Q_{12}+Q_{13})+\eta_{14}Q_{14}\\&=\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+(1+\eta_1)P_1+\eta_3P_2+\eta_5P_3+\eta_7P_4+\eta_{10}P_5\\&\quad+\eta_8P_6+\eta_{11}P_7+\eta_{12}P_8+\eta_{14}P_9\end{aligned}\tag{3.25}$$

此泛函实际上就是泛函(3.8)。

第二，不含 $\boldsymbol{\sigma}$ 的退化情况。设

$$\eta_4=-1,\ \eta_8=1,\ \eta_1=\eta_3=\eta_5=\eta_6=\eta_{10}=\eta_{11}=\eta_{12}=\eta_{13}=\eta_{14}=0$$

则泛函(3.23)退化为二类泛函变量 $\mathbf{u}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的泛函如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{2L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})&=(\Pi_{HW}-Q_4+Q_8)+\eta_2Q_2+\eta_7Q_7+\eta_9Q_9\\&=\Pi_2(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})+\eta_2S_1+\eta_7S_4+\eta_9S_5\end{aligned}\tag{3.26}$$

此泛函为泛函(3.16)的特例。如果在泛函(3.23)中再增加补充项 $\gamma_2S_2+\gamma_3S_3+\gamma_6S_6+\gamma_7S_7+\gamma_8S_8+\gamma_9S_9$，则此泛函可退化为泛函(3.16)。

第三，不含 $\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\sigma}$ 的退化情况。设

$$\eta_2=\eta_8=\eta_9=1,\ \eta_4=-1,\ \eta_1=\eta_3=\eta_5=\eta_6=\eta_{10}=\eta_{11}=\eta_{12}=\eta_{13}=\eta_{14}=0$$

则泛函(3.23)退化为一类泛函变量 $\mathbf{u}$ 的泛函如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{1L}(\mathbf{u})&=(\Pi_{HW}+Q_2-Q_4+Q_8+Q_9)+\eta_7Q_7\\&=\Pi_{1P}(\mathbf{u})+\eta_7R_2\end{aligned}\tag{3.27}$$

此泛函实际上就是泛函(3.5)。

如果对被积函数中导数的最高阶数加以限制，则得三类泛函变量 $\mathbf{u}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\sigma}$ 的两种简易泛函形式如下：

$$\Pi_{3L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma})=\Pi_{HW}+\eta_1Q_1+\eta_2Q_2+\eta_4Q_4+\eta_7Q_7+\eta_8Q_8+\eta_{11}Q_{11}+\eta_{12}Q_{12}\tag{3.28}$$

$$\Pi_{3L}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma})=\Pi'_{HW}+\eta_1Q_1+\eta_3Q_3+\eta_5Q_5+\eta_7Q_7+\eta_8Q_8+\eta_{11}Q_{11}+\eta_{12}Q_{12}\tag{3.29}$$

在(3.28)中，$\mathbf{u}$ 限定为一阶(在 V 内)和零阶(在 S 上)，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 限定为零阶。在(3.29)中，$\boldsymbol{\sigma}$ 限定为一阶(在 V 内)和零阶(在 S 上)，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\mathbf{u}$ 限定为零阶。

四、换元乘子法

1. 拉氏乘子法失效现象的分析

文献[1]在对拉氏乘子法失效现象进行分析的基础上提出了高阶拉氏乘子法。

拉氏乘子法的目标是把原泛函的强制条件变换为新泛函的自然条件，作法是借助乘子将原泛函的强制条件式吸收到新泛函中来，从而达到上述目标。

因此，应用拉氏乘子法时要有一个前提：即原泛函应是条件泛函，原泛函的泛函变量之间应存在强制条件。如果这个前提不成立，则拉氏乘子法就会失效。

换句话说，拉氏乘子法只是用于把原泛函的强制条件变换为新泛函的自然条件，而不能

用于把原泛函的增广条件和自然条件变换为新泛函的自然条件。在本文所述泛函变换的三种格式中，拉氏乘子法只能用于格式Ⅰ，而不能用于格式Ⅱ和Ⅲ。

根据上述分析，可对拉氏乘子法的各种失效现象作出解释。

例如，在Hellinger-Reissner泛函Π_{HR}中，如果想借助乘子将应力应变关系式吸收到新泛函中来，这种作法就会失效。失效的的原因是应用拉氏乘子法的前提并不成立。因为对原泛函$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$来说，应变$\boldsymbol{\varepsilon}$是增广变量，而不是泛函变量；$\boldsymbol{\varepsilon}$与$\boldsymbol{\sigma}$间的应力应变关系是增广条件，而不是强制条件。企图用拉氏乘子法来解除原泛函的增广条件，因而导致失效。

又如在胡海昌-鹫津泛函Π_{HW}中，如果想借助乘子将应力应变关系式吸收到新泛函中来，这种作法也会失效。这是因为对原泛函Π_{HW}来说，应力应变关系是自然条件，而不是强制条件。

2. 换元乘子法

文献[2]指出拉氏乘子法有两个不足之处：第一，不能从势能原理直接得到Hellinger-Reissher原理；第二，不能从余能原理直接得到胡海昌-鹫津原理。

为了消除拉氏乘子法的局限性，我们提出换元乘子法。拉氏乘子法的一个局限性是无法将原泛函的增广条件式吸收到新泛函中来。在换元乘子法中，第一步是进行换元，即利用增广条件将原泛函中的泛函变量用增广变量来替换，得到一个过渡性的泛函。对这个过渡性泛函来说，原来的增广条件已经转化为强制条件。第二步是应用拉氏乘子法，借助乘子将过渡性泛函的强制条件式吸收到新泛函中来。经过上述两个步骤，原泛函的增广条件式就被吸收到新泛函中来了。

例题　用换元乘子法从势能原理的泛函$\Pi_P(\mathbf{u})$导出Hellinger-Reissner原理的泛函$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$。

解　势能原理的泛函为

$$\Pi_P(\mathbf{u})=\int_V\left[\frac{1}{2}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})^T\mathbf{A}(\mathscr{D}^T\mathbf{u})-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS \tag{4.1}$$

强制条件为　　$\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=0$　　（在S_u上）　　(4.2)

增广条件为　　$\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=0$　　（在V内）　　(4.3)

第一步，将增广条件(4.3)代入原泛函(4.1)，进行换元，得出过渡性泛函如下：

$$\Pi(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\int_V\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS \tag{4.4}$$

此时，式(4.2)和(4.3)都是强制条件。

第二步，借助乘子$\boldsymbol{\sigma}$和乘子$-\mathbf{T}=-\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}$分别将强制条件式(4.3)和(4.2)吸收到新泛函中来，这个新泛函就是$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})$：

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})=\int_V\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS$$

$$+\int_V\boldsymbol{\sigma}^T(\mathscr{D}^T\mathbf{u}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})dV-\int_{S_u}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{4.5}$$

同理，用换元乘子法也可从余能原理导出胡海昌-鹫津原理。

五、结　　语

泛函变换三种格式的提出为建立等价泛函和广义等价泛函提供了有效手段，例如熟知的泛函Π_{HW}，Π_{HR}，$\Pi_{1P}(\mathbf{u})$之间的变换关系可简洁地表示为

$$\Pi_{HW}=\Pi_{HR}+Q_1 \tag{5.1}$$

$$\Pi_{HR}=\Pi_{1P}(\mathbf{u})-P_1-P_6 \tag{5.2}$$

由于对泛函变换的三种格式加以区分，因此可对拉氏乘子法失效现象作出解释，并由此提出换元乘子法。

多参数广义变分原理表明等价泛函在形式上的多样性。在这里“唯一性定理”是不成立的。在三类、二类、一类泛函变量的无条件泛函一系列简易形式中，熟知的泛函Π_{HW}，Π_{HR}，$\Pi_{1P}(\mathbf{u})$只是其中的一种简易形式。

在罚函数法[3,4]中，只有当罚参数趋于无限大时才能逼近精确解，而在多参数广义变分原理中，其参数η则可为任意有限值，因而不同于罚参数。在应用多参数广义变分原理求近似解时，通过参数的合理选择，可以有意识地加强某个自然条件的比重，从而为建立各种有效的近似解法创造条件。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2 (1983)，137—150。

[2] 陈万吉，更一般的杂交广义变分原理及有限元模型，合肥工业大学学报，4 (1983)。

[3] Taylor, R. L. and O. C. Zienkiewicz, Complementary energy with penalty functions in finite element analysis, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons (1979).

[4] Oden, J. T., Penalty-finite element methods for constrained problems in elasticity, *Proc. of Symposium on Finite Element Method* (1982).

Generalized Variational Principles with Several Arbitrary Parameters and the Variable Substitution and Multiplier Method

Long Yu-qiu

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

The functional transformations of variational principles in elasticity are classified as three patterns: Ⅰ relaxation pattern, Ⅱ augmented pattern and Ⅲ equivalent pattern.

On the basis of pattern Ⅲ, the generalized variational principles with several arbitrary parameters are formulated and their functionals are defined. They are: the generalized principle of single variable **u** with several parameters, the generalized principle of two variables **u**, **σ** with several parameters, the generalized principle of two variables **u**, **ε** with several parameters, and the generalized principle of three variables **u**, **ε**, **σ** with several parameters. From these principles, a series of new forms of equivalent functionals can be obtained. When the values of these parameters are properly chosen, a series of finite element models can be formulated.

In this paper, the question of losing effectiveness for Lagrange multiplier method is also discussed. In order to "recover" effectiveness for multiplier method, a modified method, namely, the variable substitution and multiplier method, is proposed.