

Helleman映象的紊动性*

程宝龙

(中南工业大学, 1986年6月8日收到)

摘要

本文建立了Helleman映象呈现Smale马蹄的分析条件, 作为推论, 导得Henon映象产生紊动现象的条件.

Helleman^[1]考虑了“标准映象” φ :

$$x_{n+1} = 2Cx_n + 2Cx_n^2 - y_n$$

$$y_{n+1} = Bx_n$$

Zisook^[2]用它说明了二维非线性映象的新特性.

本文一般地考察此映象. 我们能定出 (x, y) 面上的正方形流域 Q , 只要它的边长 $2R$ 与 B, C 之间适合下列关系:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{若 } 0 \leq B \leq 1, C > 2(1+B), \text{ 有} \\
 &\quad C < R < A/(1+B); \\
 &\text{若 } 0 \leq B \leq 1, C < -(1+B), \text{ 有} \\
 &\quad (1+B-C) < R < A/(1+B); \\
 &\text{若 } -1 \leq B < 0, C > A_1 \text{ 或 } C < A_2, \text{ 有} \\
 &\quad A_3 < R < A/(1-B)
 \end{aligned} \right\} \quad (L)$$

此处

$$A = C^2 - BC - C$$

$$A_1 = [(1+B) + \sqrt{(1+B)^2 + 8(1-B)^2}] / 2$$

$$A_2 = [(1+B) - \sqrt{(1+B)^2 + 8(1-B)^2}] / 2$$

$$A_3 = [(1-B) + \sqrt{(1-B)^2 + 4A}] / 2$$

则映象 φ 必以集合 S 上的一个移位自同构 σ 为其子系统, 即存在 S 到 Q 的子集 A 的同胚 $\tau, \tau: S \rightarrow A \subset Q$, 使 $\varphi \circ \tau = \tau \circ \sigma$. 其中 S 是一个双边无穷序列的集合.

作为应用, 我们导得Henon映象的紊动性.

为方便起见, 令

$$\left. \begin{aligned}
 2Cx_n &= -(x+C); & 2Cy_n &= -B(y+C) \\
 2Cx_{n+1} &= -(u+C); & 2Cy_{n+1} &= -B(v+C)
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 许政范推荐. 文本受中国科学院科学基金资助.

映象 φ 就可等价地表为

$$\varphi(x, y) = (-x^2 - By + A, x) \tag{2}$$

取基本流域 Q 为

$$-R \leq x \leq R$$

$$-R \leq y \leq R$$

我们就有

引理1 $\varphi(Q) \cap Q$ 是 Q 中的两个水平条域 U_1, U_2 . 它们由抛物线

$$u = -v^2 + A - BR \tag{I}$$

$$u = -v^2 + A + BR \tag{II}$$

及直线 $u = \pm R$ 所围 (图1) .

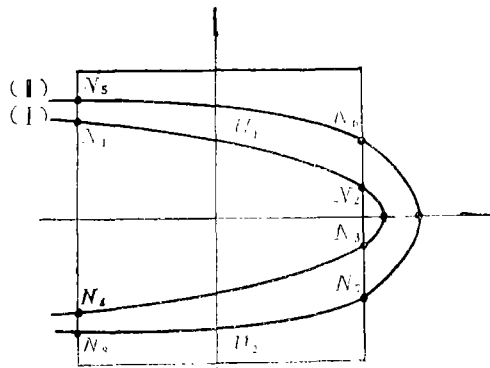


图 1

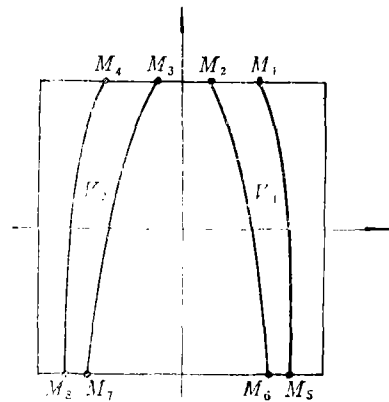


图 2

证 直线 $y=R$ 的象是抛物线 (I), 而 $y=-R$ 的象是 (II).

在 $C < 0$ 或 $C > (1+B)$ 时, 若 $0 \leq B \leq 1, R < A/(1+B)$, 或 $-1 \leq B < 0, R < A/(1-B)$, 则 (I) 和 (II) 的顶点均在 $u=R$ 的右边.

可以算得, (I)、(II)与 $u = \pm R$ 的交点分别为

$$N_1: (-R, \sqrt{A + (1-B)R})$$

$$N_2: (R, \sqrt{A - (1+B)R})$$

$$N_3: (R, -\sqrt{A - (1+B)R})$$

$$N_4: (-R, -\sqrt{A + (1-B)R})$$

及

$$N_5: (-R, \sqrt{A + (1+B)R})$$

$$N_6: (R, \sqrt{A - (1-B)R})$$

$$N_7: (R, -\sqrt{A - (1-B)R})$$

$$N_8: (-R, -\sqrt{A + (1-B)R})$$

引理2 U_1, U_2 的原象是 Q 中的两个竖条形域 V_1, V_2 . 它们由

$$By = -x^2 + A - R \tag{III}$$

$$By = -x^2 + A + R \tag{IV}$$

及 $y = \pm R$ 所围 (图2).

证 可以求得, $N_i (i=1 \sim 8)$ 将分别对应成 (x, y) 上的 $M_i (i=1 \sim 8)$. 它们是

$$\begin{aligned} M_1: & (\sqrt{A+(1-B)R}, R) \\ M_2: & (\sqrt{A-(1+B)R}, R) \\ M_3: & (-\sqrt{A-(1+B)R}, R) \\ M_4: & (-\sqrt{A+(1-B)R}, R) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} M_5: & (\sqrt{A+(1+B)R}, -R) \\ M_6: & (\sqrt{A-(1-B)R}, -R) \\ M_7: & (-\sqrt{A-(1-B)R}, -R) \\ M_8: & (-\sqrt{A+(1+B)R}, -R) \end{aligned}$$

可见, $u=-R$ 上的 $\overline{N_5N_1}, \overline{N_4N_8}$ 及 $u=R$ 上的 $\overline{N_6N_2}, \overline{N_3N_7}$ 将分别对应 (x, y) 面上抛物线 (IV), (I) 上的 $\overline{M_5M_1}, \overline{M_4M_8}, \overline{M_6M_2}, \overline{M_3M_7}$. 此图 2 是按 $B>0$ 而作, 当 $B<0$ 时, 图形与图 2 关于 x 轴对称.

引理 3 若条件 (L) 成立, 则 Moser^[3] 的充分条件 (ii) 一定成立.

证 我们来阐明, 对 (x, y) 上的竖直线形域 V_1, V_2 中的任一条 $V, \varphi^{-1}(V) \cap V_i = \tilde{V}$, 仍是竖直线域, 且有常数 $\nu=7/8$, 使 $d(\tilde{V}) \leq 7/8 d(V)$. 类似地, 对水平条亦会有 $d(\tilde{H}_i) \leq 7d(H)/8$.

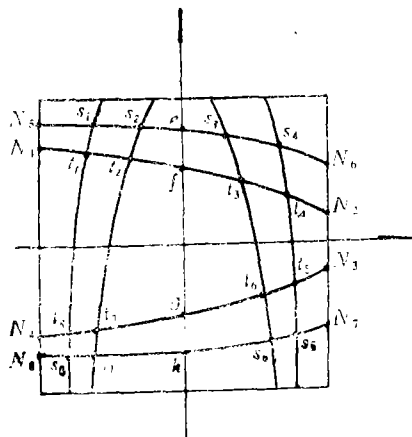


图 3

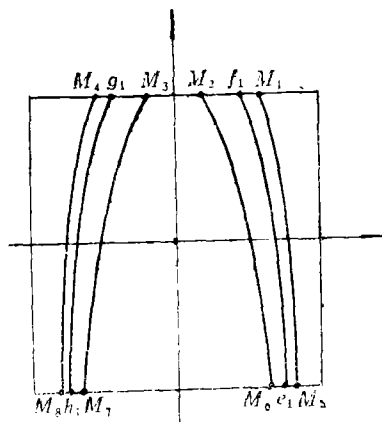


图 4

能够算得, (I) 及 (II) 与 $u=0$ 的变点 f, g, e, h 将是

$$\begin{aligned} f: & (0, \sqrt{A-BR}) \\ g: & (0, -\sqrt{A-BR}) \\ e: & (0, \sqrt{A+BR}) \\ h: & (0, -\sqrt{A+BR}) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} f_1: & (\sqrt{A-BR}, R) \\ g_1: & (-\sqrt{A-BR}, R) \\ e_1: & (\sqrt{A+BR}, -R) \\ h_1: & (-\sqrt{A+BR}, -R) \end{aligned}$$

这四点均在抛物线

$$By = -x^2 + A + R(1-B) \quad (V)$$

之上.

所以有

$$\begin{aligned} x_{M_1} - x_{f_1} &= x_{g_1} - x_{M_4} = \sqrt{A + (1-B)R} - \sqrt{A - BR} \\ x_{f_1} - x_{M_2} &= x_{M_3} - x_{g_1} = \sqrt{A - BR} - \sqrt{A - (1+B)R} \\ d(V_1) &= d(V_2) = \sqrt{A + (1-B)R} - \sqrt{A - (1+B)R} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} x_{g_1} - x_{M_4} &< x_{M_3} - x_{g_1} \\ \frac{\sqrt{A + (1-B)R} + \sqrt{A - (1+B)R}}{\sqrt{A - BR} + \sqrt{A - (1+B)R}} &\leq \frac{7}{4} \end{aligned} \quad (3)$$

由图 3 知, $\varphi^{-1}(V)$ 将涉及四边形 $s_1s_2t_2t_1$, $s_3s_4t_4t_3$, $s_5s_6t_6t_5$, $s_7s_8t_8t_7$. 它们分别被含在 N_6efN_1 , eN_6N_2f , N_7hgN_3 , hN_8N_4g 之内. 因此 $\varphi^{-1}(s_3s_4t_4t_3) \cap V_1$ 应是 (x, y) 面上 Q 内的一个竖直条域, 它含在由 $y = \mp R$ 及 $\widehat{M_6M_2}$, $\widehat{e_2f_1}$ 所围的竖直条域 $V_{f_1M_2}$ 之内. 由 (2), 就可得出

$$d(V_{f_1M_2}) \leq 7/8 d(V) \quad (4)$$

显有

$$d(\varphi^{-1}(s_3s_4t_4t_3) \cap V_1) \leq d(V_{f_1M_2})$$

于是

$$d(\varphi^{-1}(s_3s_4t_4t_3) \cap V_1) \leq 7/8 d(V) \quad (5)$$

同样, 得

$$d(\varphi^{-1}(s_1s_2t_2t_1) \cap V_1) \leq 7/8 d(V) \quad (6)$$

$$d(\varphi^{-1}(s_5s_6t_6t_5) \cap V_2) \leq 7/8 d(V) \quad (7)$$

$$d(\varphi^{-1}(s_7s_8t_8t_7) \cap V_2) \leq 7/8 d(V) \quad (8)$$

关于水平条的情况将完全相同.

总起来, 我们得到

定理 1 若 B, C, R 适合 (L), 则 Helleman 映象 $\varphi(x, y)$ 在方形流域 Q 内, 以序列空间 S 的移位自同构 σ 为其子系统, 即存在 Q 内闭的二维 Cantor 集 A , 使 φ 的周期点在 A 内是稠的, 且 φ 有轨线在 A 内稠密.

证 上述引理 1、2、3 分别给出了文 [3] 中 Moser 定理的条件 (i)、(ii). 由之即知本定理是真.

现在来考虑 Henon 映象:

$$T(x, y) = (-x^2 - By + A, x) \quad (9)$$

就有

推论 1 当 $0 \leq |B| \leq 1$, $A > 2(1 + |B|)^2$ 时, Henon 映象必呈现紊动性态.

证 事实上, 这时有

$$C_1 = [1 + B + \sqrt{(1+B)^2 + 4A}]/2 > 2(1+B)$$

或

$$C_2 = [1 + B - \sqrt{(1+B)^2 + 4A}]/2 < -(1+B)$$

对于它们, 成立

$$C_i^2 - BC_i - C_i = A \quad (i=1, 2)$$

因而, (9)可化为(2)的形式. 随之, 用(1)的逆变换

$$\left. \begin{aligned} x &= -2Cx_n - C; & By &= -2Cy_n - BC \\ u &= -2Cx_{n+1} - C; & Bv &= -2Cy_{n+1} - BC \end{aligned} \right\} \quad (1)'$$

就可将(9)化为Helleman映象 φ . 由定理1, 就得出本推论.

可见, A 值越大、 $|B|$ 值越小, Henon映象就越容易呈现紊动性. $A > 8$ 时, Henon映象就必定会发生紊动现象.

例1 按上述推论, 若 $|B|=1$, 则当 $A > 8$ 时, Henon映象必呈现紊动. 这个结果优于文[4]的结果.

例2 Henon^[5], Feit^[6]认为若 $B=0.3$, 则 A 的值位于 $[-0.12, 2.6]$ 之外时, 映象将没有奇怪吸引子.

按推论1, $B=0.3$ 时, 只要 $A > 3.38$, 映象定会产生紊动.

尽管马蹄的存在并不完全等同于奇怪吸引子, 但是马蹄的存在已可从另一个侧面去描述这个物理或力学过程将发生紊动现象.

作者对张锦炎教授表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Helleman, R. H. G., *Fundamental Problem in Statistical Mechanics*, Vol. 5, edited by E.G.D. Cohen, Elsevier, New York (1980), 165.
- [2] Zisook, A.B., Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings, *Phys. Rev.*, A24 (1981), 1640.
- [3] Moser, J., *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press (1973).
- [4] Henon, M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.*, 50 (1976), 69—77.
- [5] Feit, S., Characteristic exponents and strange attractors, *Comm. Math. Phys.*, 61 (1978), 249—260.
- [6] 张锦炎, 关于Henon映象中的Smale马蹄, 科学通报, 24 (1984), 1478—1480.

Chaotic Behavior in the Helleman Mapping

Cheng Bao-long

(Central-South Polytechnic University, Changsha)

Abstract

In this paper, we establish the analytical conditions for the Helleman mapping in which the Smale horseshoe appears. Then we use it to educe the chaotic criterion of Henon maps.