应用数学和力学，第8卷第7期（1987年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

计算倍分叉的一种方法*

刘曾荣　周士刚　刘尔宁

（安徽大学，1986年4月10日收到）

摘　要

本文从Melnikov函数的物理意义出发，建立了一种计算倍分叉方法．利用这种方法，具体地讨论了软弹簧Duffing系统的倍分叉现象，发现了与次谐分叉相类似结论——即在阻尼小、外激励幅度大时，会出现倍分叉．这样的结果与物理事实是相吻合的．

一、引　言

P．Holmes[1]发展了Melnikov方法，提出了一套处理次谐分叉与马蹄（Chaos）的解析方法。用这种方法我们处理了软弹簧Duffing 系统在弱阻尼和弱周期扰动下次谐分叉与马蹄关系，得到了一系列结果[2,3]。这些结果没有出现数值结果[4,5]中发现的倍分叉现象。可见现有的Melnikov方法还存在局限性。本文从Melnikov方法的物理意义出发[6]，建立了一种计算倍分叉的方法，并且用此方法具体讨论了软弹簧Duffing系统的倍分叉现象，所得结果是合理的。

二、计算倍分叉的方法

我们参考如下物理系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=f(x)+\varepsilon g(x,y,t)\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)_\varepsilon$$

假定$(2.1)_\varepsilon$是满足文[1]所讨论的系统。显然按照文[1]所讨论的次谐是由$(2.1)_0$的分界线内连续周期轨道族中单条周期轨道在小扰动下得到维持轨道，文[1]作者把这类轨道称为次谐(Subharmonic)轨道。但众所周知的事实告诉我们倍分叉轨道并非由单圈的闭轨道组成，而是由两圈合成一条迴路形成。因而对于文[1]中所考虑系统的倍分叉轨道我们认为是$(2.1)_0$中两条独立周期轨道在小扰动下合成一条闭迴路，显然这种分叉是与[1]考虑的次谐分叉性质完全不同的分叉，对于这类分叉的理论计算有必要加以建立。

设$(2.1)_0$有两条闭轨，其表达式为

* 许政范推荐．

$$q^{\alpha_1}(t)=\begin{pmatrix}x^{\alpha_1}(t)\\ y^{\alpha_1}(t)\end{pmatrix},\quad q^{\alpha_2}(t)=\begin{pmatrix}x^{\alpha_2}(t)\\ y^{\alpha_2}(t)\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

它们的周期分别为$T_{\alpha_1}=(1-\sigma)T$，$T_{\alpha_2}=(1+\sigma)T$，其中T为扰动项$g(x,y,t)$关于t的周期；另外对应的Hamilton量分别为$H(q^{\alpha_1}(t))=h_{\alpha_1}$，$H(q^{\alpha_2}(t))=h_{\alpha_2}$，假定$h_{\alpha_2}-h_{\alpha_1}=O(\varepsilon)$。如果$q^{\alpha_1}(t)$和$q^{\alpha_2}(t)$在小扰动下能组成$(2.1)_\varepsilon$的一条周期为$2T$的倍分叉轨道，按照 Melnikov 函数的物理意义[6]，显然应该满足如下二个条件：

$$\int_0^{T_1} g(q^{\alpha_1}(t),t+t_0)y^{\alpha_1}(t)dt+\int_{T_1}^{2T} g(q^{\alpha_2}(t),t+t_0)y^{\alpha_2}(t)dt=0 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon\int_0^{T_1} g(q^{\alpha_1}(t),t+t_0)g^{\alpha_1}(t)dt=h_{\alpha_2}-h_{\alpha_1} \tag{2.4}$$

条件(2.3)是$q^{\alpha_1}(t)$和$q^{\alpha_2}(t)$在小扰动下成为一条迴路所需要服从条件；条件(2.4)是组成一条迴路时所必需遵从的能量关系。(2.3)和(2.4)是判别物理系统$(2.1)_\varepsilon$是否存在倍分叉轨道的物理判据。

三、软弹簧Duffing系统的倍分叉

考虑软弹簧 Duffing 系统

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon r\dot{x}+\varepsilon\delta\cos\omega t \tag{3.1}_\varepsilon$$

外激励的周期为$T=2\pi/\omega$。方程$(3.1)_0$的定性性质以及以k为参数的周期轨道解$q^k(t)$见文[2]。在周期轨道族中任选两条周期轨道$q^{k_1}(t)$，$q^{k_2}(t)$，使它们满足条件

1、
$$\left.\begin{aligned}T_{k_1}&=(1-\sigma)T=4\sqrt{1+k_1^2}\,K(k_1)\\ T_{k_2}&=(1+\sigma)T=4\sqrt{1+k_2^2}\,K(k_2)\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中$K(k)$为第一类完全椭圆积分，σ是由条件待定正常数。

2、$q^{k_1}(t)$和$q^{k_2}(t)$的 Hamilton 量有

$$h_{k_2}-h_{k_1}=\frac{k_2^2}{(1+k_2^2)^2}-\frac{k_1^2}{(1+k_1^2)^2}=O(\varepsilon) \tag{3.3}$$

假定这两条轨道在小扰动下组成一条倍分叉轨道，那么由(2.3)和(2.4)可得到

$$\int_0^{T_1}[-r\dot{x}_{k_1}(t)+\delta\cos\omega(t+t_0)]\dot{x}_{k_1}(t)dt+\int_{T_1}^{2T}[-r\dot{x}_{k_2}(t)+\delta\cos\omega(t+t_0)]\dot{x}_{k_2}(t)dt=0 \tag{3.4}$$

和
$$\varepsilon\int_0^{T_1}[-r\dot{x}_{k_1}(t)+\delta\cos\omega(t+t_0)]\dot{x}_{k_1}(t)dt=h_{k_2}-h_{k_1} \tag{3.5}$$

把(3.2)代入(3.4)，计算(3.4)得：

$$H_1\cos\omega t_0+H_2\sin\omega t_0=H \tag{3.6}$$

其中
$$H=\frac{\sqrt{2}}{3\pi\omega}\left(\frac{r}{\delta}\right)\left\{\frac{1}{(1+k_2^2)^{3/2}}\left[(k_2^2-1)K(k_2)+(k_2^2+1)E(k_2)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1+k_1^2)^{3/2}}\left[(k_1^2-1)K(k_1)+(k_1^2+1)E(k_1)\right]\right\}$$
$$H_1=A+C\cos2\pi\sigma-D\sin2\pi\sigma$$
$$H_2=B+C\sin2\pi\sigma+D\cos2\pi\sigma$$
$$A=\frac{\sin2\pi\sigma}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l-1}{(2l-2+\sigma)(2l-\sigma)}\operatorname{cosech}\frac{(2l-1)\pi K'(k_1)}{2K(k_1)}$$
$$B=\frac{(1-\cos2\pi\sigma)}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l-1}{(2l-2+\sigma)(2l-\sigma)}\operatorname{cosech}\frac{(2l-1)\pi K'(k_1)}{2K(k_1)}$$
$$C=\frac{\sin2\pi\sigma}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l-1}{(2l-2+\sigma)(2l-\sigma)}\operatorname{cosech}\frac{(2l-1)\pi K'(k_2)}{2K(k_2)}$$
$$D=\frac{(1-\cos2\pi\sigma)}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l-1}{(2l-2+\sigma)(2l-\sigma)}\operatorname{cosech}\frac{(2l-1)\pi K'(k_2)}{2K(k_2)}$$

利用(3.2)和(3.3)，可求得(3.5)为
$$A\cos\omega t_0+B\sin\omega t_0=M_1+M_2 \tag{3.7}$$
其中
$$M_1=h_{k_2}-h_{k_1}/4\sqrt{2}(\varepsilon\delta)\pi\omega$$
$$M_2=\frac{\sqrt{2}}{3\pi\omega}\left(\frac{r}{\delta}\right)\left[(k_1^2-1)K(k_1)+(k_1^2+1)E(k_1)\right]$$
$K'(k)=K(\sqrt{1-k^2})$，$E(k)$ 为第二类完全椭圆积分。

这样，对于给定r、δ、ω的系统$(3.1)_\varepsilon$，在σ允许的范围内，如果存在满足
$$\left.\begin{aligned}&H_1\cos\omega t_0+H_2\sin\omega t_0=H\\&A\cos\omega t_0+B\sin\omega t_0=M_1+M_2\end{aligned}\right\}$$
的解$\tilde{\sigma}$，那么对于小 ε，有可能存在倍分叉轨道，此轨道的表达式为
$$q(t)=\begin{cases}q^{k_1}(t)+O(\varepsilon) & (2nT\leqslant t\leqslant T_1+2nT)\\ q^{k_2}(t)+O(\varepsilon) & (T_1+2nT\leqslant t\leqslant 2(n+1)T)\end{cases}$$
其中k_1和k_2由下式决定
$$(1-\tilde{\sigma})T=4\sqrt{1+k_1^2}\,K(k_1),\ (1+\tilde{\sigma})T=4\sqrt{1+k_2^2}\,K(k_2)$$

利用上述结果，我们进行了数值计算。对于固定的ω、$\varepsilon\delta$和εr的系统，我们改变σ数值，计算对应于(3.6)和(3.7)的 ωt_0值，最后以σ为横轴，以 ωt_0 值为纵轴，画出曲线图，如果两条曲线有交点，就意味着可能存在着倍分叉轨道，交点所对应的σ 值就是产生倍分叉轨道所对应的 $\tilde{\sigma}$ 值，反之如果两曲线不存在交点就意味着不存在倍分叉轨道。

图 1～4 中，取 $\omega=0.53$，逐渐增大比值 δ/r，发现当 δ/r 较小时，两曲线无交点不存在倍分叉轨道；当δ/r逐渐增加时，两曲线交点就存在，倍分叉轨道产生，而且当δ/r变大时，交点所对应的$\tilde{\sigma}$ 变小。这些现象说明能否产生倍分叉也决定于外力幅值与阻尼之比值，此比值越大产生倍分叉轨道离原周期T 的轨道越近。这些结果与[1]对次谐分叉讨论结果相似，在

物理上是合理的。

图5～6中，取$\omega=0.72$，从图中见它也基本遵从图1～4的规律。但把图3与图5加以比较发现，对同一比值δ/r，ω越小越可能产生倍分叉轨道。

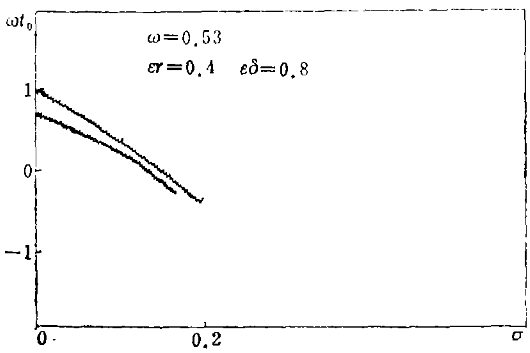

图 1

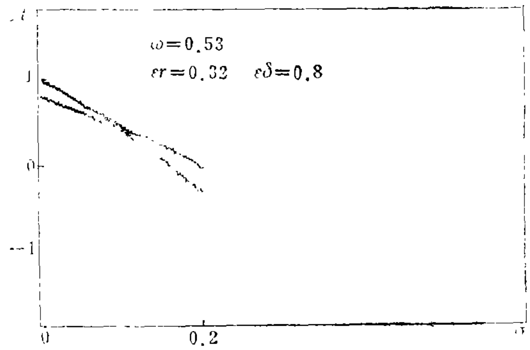

图 2

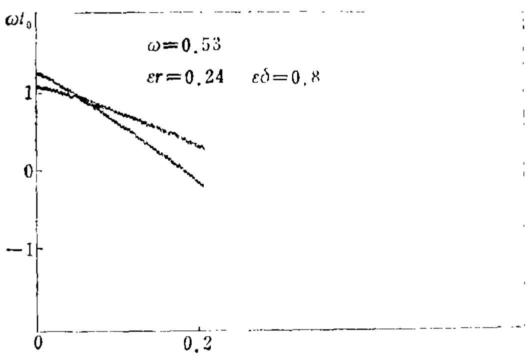

图 3

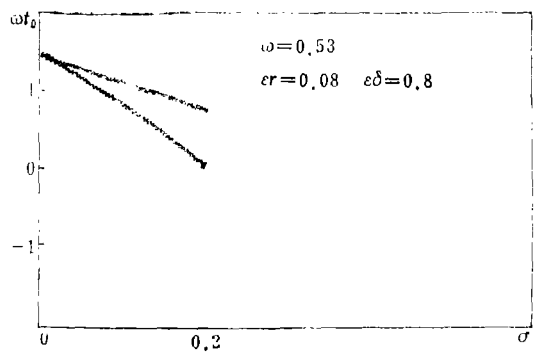

图 4

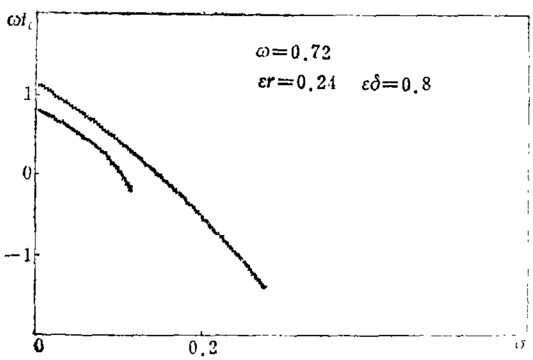

图 5

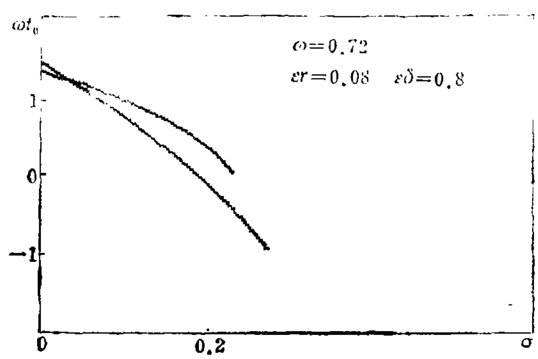

图 6

作者感谢许政范教授的帮助与支持，感谢北京大学朱照宣教授对于本文工作提出了宝贵意见。

参 考 文 献

[1] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).

[2] 刘曾荣、姚伟国、朱照宣，软弹簧系统在周期小扰动下通向浑沌的道路，应用数学和力学，**7**，2 (1986), 103—108.

[3] Liu Zheng-rong, Some bifurcation and chaotic behavior in soft spring duffing equation, ICNM 会议文集 (1985).

[4] Huberman, B. A. and J. P. Crutchfield, Chaotic states of a harmonic system in periodic fields, *Phy. Rev. Lett.*, **43**, 23 (1979).

[5] Chui, S. T. and K. B. Ma, Nature of some chaotic states for duffing's equation, *Phys. Rev. A*, **26**, 4 (1982).

[6] 刘曾荣，Melnikov 函数的物理意义，科学通报，**30**，22 (1985).

A Method to Calculate Period Doubling Bifurcation

Liu Zheng-rong Zhou Shi-gang Liu Er-ning

(*Anhui University, Hefei*)

Abstract

Based on physical meaning of Melnikov function, we establish a method to calculate period doubling bifurcation and discuss this kind of bifurcation of soft spring Duffing system and find that the result is analogous to subharmonic bifurcation, that is, period doubling bifurcation will appear if damping is small and amplitude of excitation is big. This coincides with the facts of physics.