

悬臂矩形板的弯曲稳定和振动*

成祥生

(同济大学, 1986年1月13日收到)

摘要

本文用变分法讨论悬臂矩形板的弯曲、稳定和振动的问题, 文中举了很多的算例。

一、前言

悬臂矩形板的弯曲问题曾由 C. W. MacGregor 等人^[1~11]作过理论计算和实验研究, 但计算都较复杂。本文将用变分法分析悬臂矩形板的弯曲、稳定和振动的问题。选用的挠度函数简单为其一主要特点, 虽然有四个参数, 但我们仅按两个参数进行变分, 因此计算较简便。

二、挠度函数的选取

设有一矩形薄板, 取坐标如图1所示, 薄板沿 $y=0$ 边固定, 受有均布载荷 q_0 作用, 我们仅限于讨论对称弯曲。今选取如下的挠度函数

$$w = f_1 \frac{y}{b} \sin \frac{\pi}{a} x + f_2 \sin \frac{\pi}{b} y + f_3 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y + f_4 \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b}\right) \quad (2.1)$$

其中 a 和 b 分别为薄板沿 x 轴和 y 轴边的长度, 而系数 $f_1 \sim f_4$ 都是待定的参数。这些函数仅满足如下的边界条件:

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } w=0 \quad (2.2)$$

但不满足该边界上的转角为零的条件, 即

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

如欲满足条件(2.3), 则可将(2.1)代入上式, 便得到

$$f_1 + 4f_2 + \pi f_3 = 0 \quad (2.4)$$

也就是说: 如所选的挠度函数, 要满足条件(2.3), 则挠度函数的各系数之间必须保持一约束关系, 即条件(2.4)。于是函数(2.1)的四个系数, 只有三个是独立的。

现在挠度函数(2.1)已满足问题的全部几何边界条件, 即在 $y=0$ 的固定边上, 挠度及

* 钱伟长推荐。

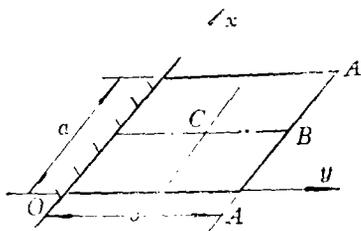


图 1

转角都为零, 即 (2.3) 及 (2.4)。如果采用 Rayleigh-Ritz 法^[12,13] 分析问题, 则挠度函数仅满足几何边界条件 (2.2) 和 (2.3) 就可以了, 但如能满足一部分或全部内力边界条件, 则可提高计算的精确度。由于另外三条边界: $x=0$, $x=a$ 和 $y=b$ 是自由的, 如所讨论的是各向同性板, 则应满足如下的内力边界条件:

对于 $x=0$ 和 $x=a$ 边, 应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

对于 $y=b$ 边, 应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (2.8)$$

以及在角点 $A(x=0, y=b$ 和 $x=a, y=b)$, 应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.9)$$

至于 (2.5) 和 (2.7) 是边界上弯矩为零, 而 (2.6) 和 (2.8) 是边界上的综合横向剪力为零。最后 (2.9) 表示在自由角点上, 集中反力为零, 但它们不一定都满足。

今使 $x=0$ 和 $x=a$ 两条边上的综合横向剪力为零, 即满足条件 (2.6)。为此, 现将 (2.1) 代入 (2.6), 可得到

$$f_1 = -\frac{\pi}{2} \left[1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] f_3 \quad (2.10)$$

再将 (2.10) 代入 (2.4), 可得:

$$f_2 = -\frac{\pi}{8} \left[1 - (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] f_3 \quad (2.11)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\pi}{2} \left[1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] \\ \beta_2 &= -\frac{\pi}{8} \left[1 - (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

则 (2.10) 和 (2.11) 可写成:

$$f_1 = \beta_1 f_3, \quad f_2 = \beta_2 f_3 \quad (2.13)$$

其中 β_1 和 β_2 都是常数。

于是, 函数 (2.1) 可表示如下:

$$w = f_3 \left(\beta_1 \frac{y}{b} \sin \frac{\pi}{a} x + \beta_2 \sin \frac{\pi}{b} y + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \right) + f_4 \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) \quad (2.14)$$

这样, 在上式挠度函数 w 中只包含两个未知参数 f_3 和 f_4 , 而且它们是独立的。这个挠度函数除了满足全部几何边界条件 (2.2) 和 (2.3) 之外, 尚满足薄板 $x=0$ 和 $x=a$ 两条边界上的综合横向剪力为零的部份内力边界条件 (2.6); 而其余的内力边界条件都是自然边界条件, 它

们可通过变分近似地得到满足^[14]。将所选用的挠度函数(2.14)应用于Rayleigh-Ritz法中, 这样就可提高问题计算的精度。

如果薄板系正交各向异性板, 则内力边界条件(2.6)应用下式^[15]来代替:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2 \frac{D_3}{D_1} - \mu_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.15)$$

式中各符号也参见文献[15]。

三、悬臂矩形板的弯曲问题

设一悬臂矩形板, 受均布载荷 q_0 作用, 如图1所示。这时整个系统的形变势能是^[16]

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.1)$$

其中

$$D = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)}$$

是板的弯曲刚度; E 、 h 、 μ 分别为板材料的弹性模量、厚度和波桑比。

如果是正交各向异性板, 则(3.1)式应以下式^[15]来代替

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

式中每个符号也参见[15]。

外力的势能是^[16]

$$W = \iint q_0 w dx dy \quad (3.2)$$

以上所有二重积分均遍及板的中间面。

于是系统的总势能为

$$\Pi = U - W \quad (3.3)$$

根据Rayleigh-Ritz法^[12, 13], 系统在稳定平衡时, 其总势能为最小, 即

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.4)$$

因为 U 和 W 中均包含参数 f_3 和 f_4 , 于是上式又可写成

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_3} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_4} = 0 \quad (3.5)$$

于是将得到关于参数 f_3 和 f_4 的线性代数方程组。从而可以确定两个独立的未知参数 f_3 和 f_4 。现在分下面几种情形来讨论。

(A) 均布载荷 q_0 分布在整个板面上(图1)。

今将挠度函数(2.14)代入(3.1)和(3.2)进行积分之后, 可得

$$U = \sum_i C_i F_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3.6)$$

$$W = C_5 F_5 \quad (3.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= \left(\frac{1}{6} \beta_1^2 + \frac{1}{\pi} \beta_1 + \frac{1}{4} \right) f_3^2 \\
 F_2 &= \left(\frac{1}{2} \beta_2^2 + \frac{2}{\pi} \beta_2 + \frac{1}{4} \right) f_3^2 + \frac{1}{32} f_4^2 - \frac{2}{3\pi} \left(\beta_2 + \frac{2}{\pi} \right) f_3 f_4 \\
 F_3 &= \left(\frac{2}{\pi^2} \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{2\pi} \beta_1 + \frac{1}{\pi} \beta_2 + \frac{1}{4} \right) f_3^2 - \frac{1}{\pi^2} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \beta_1 + \frac{2}{3} \right] f_3 f_4 \\
 F_4 &= \left(\frac{1}{\pi^2} \beta_1^2 + \frac{1}{2} \right) f_3^2 \\
 F_5 &= \left(\beta_1 + 2\beta_2 + \frac{4}{\pi} \right) f_3 + (\pi - 2) f_4
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{D}{2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 ab, \quad C_2 = \frac{D}{2} \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 ab \\
 C_3 &= \mu D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 ab \\
 C_4 &= (1 - \mu) D \frac{\pi^4}{2ab}, \quad C_5 = q_0 \frac{ab}{\pi}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

将 (3.6) 和 (3.7) 代入 (3.3) 并由 (3.5) 对两个参数 f_3 和 f_4 进行变分, 即可求得 f_3 和 f_4 . 从而可完全确定挠度函数 (2.14).

对于方板的情形, 计算稍为简化. 因为这时 $b=a$, 若取 $\mu=0.3$, 则由 (2.12) 可得

$$\beta_1 = -4.24116, \quad \beta_2 = 0.27489 \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= 1.89791 f_3^2, \\
 F_2 &= 0.46278 f_3^2 - 0.19342 f_3 f_4 \\
 F_3 &= -0.57375 f_3^2 + 0.08869 f_3 f_4 \\
 F_4 &= 2.32249 f_3^2 \\
 F_5 &= -2.41814 f_3 + 1.14159 f_4
 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 = C_2 &= \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{a^2}, \quad C_3 = 0.6 \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{a^2} \\
 C_4 &= 0.7 \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{a^2}, \quad C_5 = 0.31831 q_0 a^2
 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

将 (3.11) 和 (3.12) 代入 (3.6) 和 (3.7), 再由 (3.5) 对两个参数 f_3 和 f_4 进行变分, 可得到关于参数 f_3 和 f_4 的两个代数方程的方程组:

$$\begin{bmatrix} 3.64219 & -0.070133 \\ -0.070133 & 0.031250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.76969 \\ 0.36338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 a^4 \\ D \pi^4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

由上面方程可解出

$$f_3 = 0.000135 q_0 a^4 / D, \quad f_4 = 0.119680 q_0 a^4 / D \quad (3.14)$$

在自由边 $y=a$ 的中点 $B(x=a/2, y=a)$, 其挠度由 (2.14) 给出:

$$\begin{aligned}
 w_B &= w \left(\frac{a}{2}, a \right) = \beta_1 f_3 + f_4 = (-4.24116) 0.000135 \frac{q_0 a^4}{D} \\
 &\quad + 0.119680 \frac{q_0 a^4}{D} = 0.11911 \frac{q_0 a^4}{D}
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

在角点 $A(x=0, y=a$ 或 $x=a, y=a)$, 其挠度也由 (2.14) 给出:

$$w_A = w(0, a) = f_4 = 0.11968 \frac{q_0 a^4}{D} \quad (3.16)$$

将这些结果与Л. В. Канторович^[1]所得的数值列表比较如下:

表 1

作者	挠度	$w\left(\frac{a}{2}, a\right)$	$w(0, a)$
Л. В. Канторович ^[1]		$0.1192 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0.1211 \frac{q_0 a^4}{D}$
本文		$0.1191 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0.1197 \frac{q_0 a^4}{D}$

从表中可看出: 这些结果, 其间相差不大, 但本文方法在实际计算中较为便利。

同样, 用上述类似的方法还计算了如下(B)~(G)的几种方板的情形, 就是:

(B)板在自由边 $y=a$ 的中点 $B(x=a/2, y=a)$ 有一个集中力 P 作用而弯曲(见图2)。

(C)板在中心点 $C(x=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2})$ 有一个集中力 P 作用而弯曲(见图3)。

(D)板在两角点 $A(x=0, y=a$ 及 $x=a, y=a)$ 各有一个相等的集中力 P 作用而弯曲(见图4)。

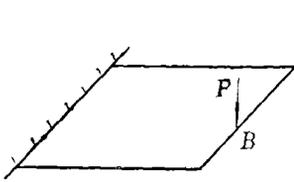


图 2

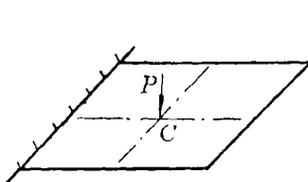


图 3

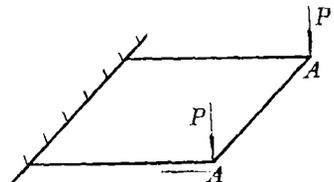


图 4

(E)板在自由边 $y=a$ 的中点 B 有一个集中力偶 M_0 作用而弯曲(见图5)。

(F)板在中心点 C 有一个集中力偶 M_0 作用而弯曲(见图6)。

(G)板在两角点 A 各有一个相等的集中力偶 M_0 作用而弯曲(见图7)。

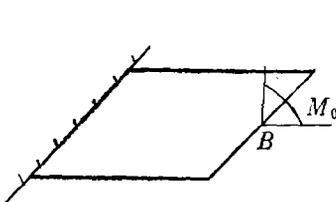


图 5

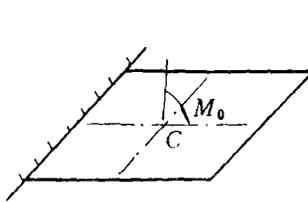


图 6

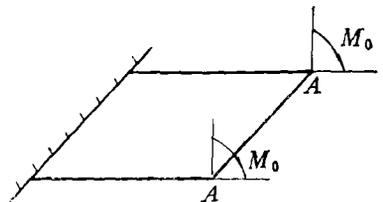


图 7

以上各情形的计算结果列于表2。

表 2

情 形	挠 度 $w\left(\frac{a}{2}, a\right)$	$w(0, a)$	图 号
(A)	$0.11911 q_0 a^4/D$	$0.11968 q_0 a^4/D$	1
(B)	$0.34025 P a^2/D$	$0.31531 P a^2/D$	2
(C)	$0.09732 P a^2/D$	$0.09497 P a^2/D$	3
(D)	$0.63061 P a^2/D$	$0.68669 P a^2/D$	4
(E)	$0.54380 M_0 a/D$	$0.48481 M_0 a/D$	5
(F)	$0.37516 M_0 a/D$	$0.35332 M_0 a/D$	6
(G)	$1.00073 M_0 a/D$	$1.06723 M_0 a/D$	7

四、悬臂矩形板的稳定性问题

在研究悬臂矩形板的稳定性问题时，系统的总势能仍然是 (3.3) 式，但其中外力的势能 W 可分为两种形式^[17]，若设只有沿 y 轴方向的压力，则当

(i) 有均匀分布压力 p 时：

$$W = \frac{1}{2} \iint p \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (4.1)$$

(ii) 有集中压力时：

$$W = \frac{1}{2} \int P \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=\xi}^2 dy \quad (4.2)$$

其中 ξ 系力的作用点沿 x 方向的坐标。上面的二重积分遍及板的中面，但另一个单积分是对 y 从 0 到 b 积分。(4.1) 式是比较一般的。

若将 (2.14) 代入 (4.1) 进行积分，则得

$$W = \frac{1}{2} p \pi^2 \frac{a}{b} \left[\bar{F}_1 f_3^2 + \frac{1}{8} f_4^2 + \bar{F}_2 f_3 f_4 \right] \quad (4.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{1}{2\pi^2} \beta_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2^2 + \frac{2}{\pi} \beta_2 + \frac{1}{2} \\ \bar{F}_2 &= \frac{4}{\pi^3} \beta_1 - \frac{2}{3\pi} \beta_2 - \frac{4}{3\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

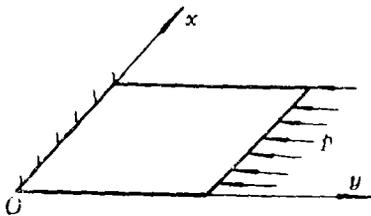


图 8

若对于方板，则

$$\bar{F}_1 = 1.62402, \quad \bar{F}_2 = -0.74057 \quad (4.5)$$

现在对几种方板情况下的临界力进行计算。

(A) 在自由边 $y=a$ 边上有均匀分布的压力 p (见图

8)。

将 (4.5) 代入 (4.3), 再将 (3.6) 和 (4.3) 代到 (3.5), 可得到如下的关于参数 f_3 和 f_4 的齐次线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} 3.64219K - 16.02859p & -0.070133K + 3.65460p \\ -0.070133K + 3.65460p & 0.03125K - 1.23371p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

其中

$$K = \frac{D}{a^2} \pi^4$$

为求方程组的非零解, 则必须上式的系数行列式为零, 即得到板的稳定性方程:

$$6.48530p^2 - 4.48168Kp + 0.10890K^2 = 0 \quad (4.7)$$

由此, 可求出它的最小的正实根

$$p_{\min} = 2.45571 \frac{D}{a^2}$$

于是最小的临界力就是

$$(p_{cr})_{\min} = 2.45571 \frac{D}{a^2} \quad (4.8)$$

同样, 用上述类似的方法还计算了如下 (B) 和 (C) 两种方板情形的最小临界力, 就是:

(B) 板在自由边 $y=a$ 的中点 $B(x=a/2, y=a)$ 有一个集中力 P 作用而屈曲 (见图 9)。

(C) 板在两角点 $A(x=0, y=a$ 及 $x=a, y=a)$ 各有一个相等的集中力 P 作用而屈曲 (见图 10)。

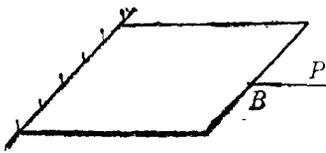


图 9

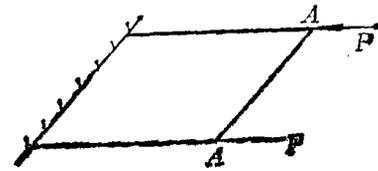


图 10

以上各情形的计算结果列于表 3。

表 3

情形	临界力	最小临界力	图号
(A)		$(p_{cr})_{\min} = 2.45571 D/a^2$	8
(B)		$(P_{cr})_{\min} = 1.91898 D/a$	9
(C)		$(P_{cr})_{\min} = 1.19127 D/a$	10

五、悬臂矩形板的振动问题

在研究薄板的振动问题时, 系统的总势能仍然是 (3.3) 式, 但其中外力的势能应换成系统的势能 W_K :

$$W_K = \frac{1}{2} \frac{\gamma h}{g} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (5.1)$$

其中 γ 和 g 分别为板材料的比重和重力加速度。

今取

$$w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t \quad (5.2)$$

其中 ω 为薄板自由振动的固有频率, t 为时间。我们以(2.14)表示上式中的 $w(x, y)$, 并取应变势能(3.1)及系统动能(5.1)的最大值。求系统应变势能及动能的最大值, 只要将(5.2)代入(3.1)及(5.1), 但最后令 $\sin \omega t = 1$, 便得到 U 及 W_K 的最大值, 例如

$$W_K = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\gamma h}{g} \iint w^2(x, y) dx dy \quad (5.3)$$

其中 U_{\max} 在形式上和(3.1)式一样。

在本节中我们略去了 U 及 W_K 的最大值的符号“max”。

再将(2.14)的 $w(x, y)$ 代入上式, 进行积分, 得:

$$W_K = \frac{1}{2} \frac{\gamma h}{g} [\tilde{F}_1 f_3^2 + \tilde{F}_2 f_4^2 + \tilde{F}_3 f_3 f_4] \quad (5.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_1 &= ab \left(\frac{1}{6} \beta_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2^2 + \frac{4}{\pi^2} \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{\pi} \beta_1 + \frac{2}{\pi} \beta_2 + \frac{1}{4} \right) \\ \tilde{F}_2 &= ab \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \\ \tilde{F}_3 &= 2ab \left(\frac{\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3} \beta_1 + \frac{2}{3\pi} \beta_2 + \frac{4}{3\pi^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

如为方板, 则

$$\tilde{F}_1 = 1.63819a^2, \quad \tilde{F}_2 = 0.22676a^2, \quad \tilde{F}_3 = -1.06398a^2 \quad (5.6)$$

将(5.6)代入(5.4), 再将(3.6)和(5.4)代入(3.5), 可得到如下的关于参数 f_3 和 f_4 的线性齐次代数方程组:

$$\begin{bmatrix} 3.64219K - 1.63819L & -0.070133K + 0.53199L \\ -0.070133K + 0.53199L & 0.03125K - 0.22676L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

其中

$$K = \frac{D}{a^2} \pi^4, \quad L = \frac{\gamma h}{g} a^2 \omega^2$$

为求方程组(5.7)的非零解, 则必须上式的系数行列式为零, 即得频率方程式:

$$0.08847L^2 - 0.80247KL + 0.10890K^2 = 0 \quad (5.8)$$

从中可求得其最小正实根

$$L_{\min} = 0.13779K$$

于是可求得薄板自由振动的最小固有频率为:

$$\omega_{\min} = 0.37120 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} = 3.66364 \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} \quad (5.9)$$

这个结果和[18]中只用了挠度函数(2.14)的一项 $w = f_4(1 - \cos \pi y / 2b)$ 的数值来比较, 相差不多。

由上述的分析和实际计算以及结合上面几个表中列出的许多具体的数值例子, 可看出: 计算薄板的挠度、临界力和固有频率都比较简便, 使用范围也比较广阔。

六、结 论

1. 我们使用 Rayleigh-Ritz 法分析了悬臂矩形板的弯曲、稳定和振动的问题, 其中所选的挠度函数范围较宽, 它们事先不一定满足几何及内力边界条件, 但使所选的挠度函数的系数之间有某些约束, 以使全部几何边界条件得到满足, 再使其一部份内力边界条件也得到满足, 从而提高了计算精度和得到较好的近似解。

2. 由于使挠度函数之间有某些约束, 因此有些系数不是独立的, 这样可以减少被变分的系数的个数, 从而使计算变得简单。

3. 研究和计算表明: 挠度函数 w 的项数取得愈多以及参预变分的系数愈多, 则计算精度也愈高, 但这时计算变得很繁复。

4. 由对悬臂矩形板的弯曲、稳定和振动的许多数值算例可看出: 用该法分析薄板的问题时, 计算较简洁, 应用于各种边值问题的范围比较广泛, 从而扩大了 Rayleigh-Ritz 法的使用界限。

参 考 文 献

- [1] Канторович Л. В., *Изв. АН СССР*, 5 (1933).
- [2] MacGregor, C. W., *Mech. Eng.*, 57 (1935), 225.
- [3] Holl, D. L., *J. Appl. Mech.*, 4 (1937), 8.
- [4] Jaramillo, T. J., *J. Appl. Mech.*, 17 (1950), 67.
- [5] Nash, W. A., *J. Appl. Mech.*, 19 (1952), 33.
- [6] Jung, H., *Math. Nachr.*, 6 (1952), 343.
- [7] Girkmann, K., *Flächentragwerke*, Vierte Auflage, Vienna (1956), 233.
- [8] 舒德坚、施振东, 弹性薄板广义变分原理及其应用, 北京航空学院学报, 1 (1957).
- [9] Koiter, W. T. and J. B., *Abblas Journal of the Netherlands Royal Academy of Sciences*, Amsterdam, 60 (1957), 173.
- [10] 张福范, 《弹性薄板》第二版, 科学出版社 (1984).
- [11] Plass, H. J., J. H. Games, Jr. and C. D. Newson, *J. Appl. Mech.* 29 (1962).
- [12] Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, MacMillan and Co., Ltd., London (1877).
- [13] Ritz, W., *J. Reine u. Angew. Mathe.*, 135 (1908), 1—61.
- [14] 钱伟长, 《变分法及有限元》(上册), 科学出版社 (1980).
- [15] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат, М. (1957).
- [16] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959).
- [17] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1936).
- [18] 曹国雄, 《弹性矩形薄板振动》, 中国建筑工业出版社 (1983), 98.

The Bending, Stability and Vibrations of Cantilever Rectangular Plates

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the problems of the bending, stability and vibrations of cantilever rectangular plates by means of the variational method. In the text a good many calculating examples are illustrated.