应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性振动系统主振型的一种求解方法及稳定性判定

刘錸生　霍拳忠　黄克累

（北京航空学院）（天津大学）（北京航空学院）

（李骊推荐，1986年3月24日收到）

摘　要

本文提出了一种求解非线性振动系统主振型的新方法，将求解非线性系统主振型的问题化为求解一系列代数方程组的问题。该方法适用于各种多自由度非线性振动系统，计算比较简单。文中还给出了一种判定非线性系统主振型稳定性的方法。

一、引　言

与线性振动系统类似，非线性振动系统中也存在主振型。利用主振型可将多自由度非线性系统解耦，得到主振动方程，解之可得系统的主振动解。以非线性系统稳定的主振动解为摄动的出发点，可得相邻非线性系统的拟主振动解，就象通常对线性系统的主振动解摄动求解拟线性系统那样。此外，非线性系统在主共振时是近似按主振型振动的，这一点在工程实际中有着特别重要的意义。

与线性系统相比，非线性系统主振型的性质要复杂得多。线性系统的主振型都是稳定的（证明见后），非线性系统的主振型却常常不稳定；线性系统独立主振型的数目不超过系统的自由度数，而某些非线性系统独立主振型的数目却大大超过系统的自由度数；线性系统独立的主振型之间是正交的，非线性系统独立的主振型之间则通常不存在正交关系；最后，利用线性系统的主振型可得到系统振动的通解，但由于非线性系统中叠加原理不成立，则不能利用非线性系统的主振型得到系统振动的通解。

自六十年代以来，国外学者对非线性系统的主振型进行了大量的研究，部分成果见文献[1～6]。所用的主要方法是Rosenberg提出的几何方法[2]。该方法将求解非线性系统主振型的问题化为求解具有已知度量的曲面测地线的问题，比较直观，尤其适合于定性分析。但该方法只适用于保守系统，且定量计算比较麻烦。

本文提出了一种求解非线性振动系统主振型的新方法，将求解非线性系统主振型的问题化为求解一系列代数方程组的问题。该方法适用于各种多自由度非线性振动系统，计算比较简单。文中还给出了一种判定非线性系统主振型稳定性的方法。

二、一种求解主振型的新方法

考虑n自由度非线性振动系统

$$\ddot{x}_i+f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n;t)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.1}$$

x_i为广义坐标，原点选在静平衡位置；f_i为x_i，$\dot{x}_i$，t的连续函数，可展成x_i，$\dot{x}_i$，t的Taylor级数。

系统的主振型由如下一组单值函数

$$x_i=\varphi_i(\xi) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

给出。ξ为非线性系统的主坐标；φ_i为ξ的连续函数，可展成ξ的Taylor级数，且满足

$$\varphi_i(0)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

将主振型关系代入（2.1）式，得

$$\varphi_i'(\xi)\ddot{\xi}+\varphi_i''(\xi)\dot{\xi}^2+f_i[\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi),\cdots,\varphi_n(\xi);\varphi_1'(\xi)\dot{\xi},\varphi_2'(\xi)\dot{\xi},\cdots,\varphi_n'(\xi)\dot{\xi};t]=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

可导出主振型函数φ_i满足的如下关系式

$$(\varphi_1'\varphi_i''-\varphi_i'\varphi_1'')\dot{\xi}^2+\varphi_1'f_i-\varphi_i'f_1=0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{2.5}$$

取主坐标$\xi=x_1$，上式化为

$$\varphi_i''\dot{\xi}^2+f_i-\varphi_i'f_1=0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{2.6}$$

设主振型函数为如下形式的幂级数

$$\varphi_i(\xi)=c_{i1}\xi+c_{i2}\xi^2+c_{i3}\xi^3+\cdots \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.7}$$

代入（2.5）或（2.6）式，并把f_i按ξ，$\dot{\xi}$，t展开，将等号左端按ξ，$\dot{\xi}$，t及其乘积的幂次排列，令每一项的系数等于零，得到一组关于主振型系数c_{ij}的代数方程组，其实数解便给出系统的主振型。

当系统具有线性主振型

$$\varphi_i(\xi)=c_i\xi \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.8}$$

时，问题则大为简化。将线性主振型关系代入（2.1）式，得

$$c_i\ddot{\xi}+f_i(c_1\xi,c_2\xi,\cdots,c_n\xi;c_1\dot{\xi},c_2\dot{\xi},\cdots,c_n\dot{\xi};t)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.9}$$

可导出主振型系数c_i满足的如下关系式

$$c_1f_i-c_if_1=0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{2.10}$$

把f_i按ξ，$\dot{\xi}$，t展开，将等号左端按ξ，$\dot{\xi}$，t及其乘积的幂次排列，令每一项的系数等于零，得到一组关于c_i的代数方程组，其实数解便给出系统的线性主振型。

这样，求解非线性系统主振型的问题就化为求解主振型系数的代数方程组问题。该方法几乎不受什么限制，适用于各种非线性振动系统——保守系统、自治系统、非自治系统；弱非线性系统、强非线性系统；两自由度系统、多自由度系统；等等。计算也比较简单。

求得系统（2.1）的一个主振型之后，可将系统解耦，得到主振动方程

$$\ddot{\xi}+f_1[\xi,\varphi_2(\xi),\cdots,\varphi_n(\xi);\dot{\xi},\varphi_2'(\xi)\dot{\xi},\cdots,\varphi_n'(\xi)\dot{\xi};t]=0 \tag{2.11}$$

式中已取$\xi=x_1$。上式是一单自由度方程，存在多种有效的方法用来研究其周期的和非周期的响应。解得主坐标$\xi=\xi(t)$，代回主振型关系，便得到系统的主振动解。

求得系统的m个主振型，便可得到系统的m个主振动解。

三、主振型的稳定性判定

设已得到系统（2.1)的一个主振型。给n维位形空间中的主振动轨道如下形式的扰动

$$x_i=\varphi_i(x_1)+\alpha_i \qquad (|\alpha_i|\ll 1,\ i=2,3,\cdots,n) \tag{3.1}$$

可得变分方程组

$$\ddot{\alpha}_i+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_i[x_1,\varphi_2(x_1),\cdots,\varphi_n(x_1);\dot{x}_1,\varphi_2'(x_1)\dot{x}_1,\cdots,\varphi_n'(x_1)\dot{x}_1;t]\alpha_j$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}f_i[x_1,\varphi_2(x_1),\cdots,\varphi_n(x_1);\dot{x}_1,\varphi_2'(x_1)\dot{x}_1,\cdots,\varphi_n'(x_1)\dot{x}_1;t]\dot{\alpha}_j=0$$
$$(i=2,3,\cdots,n) \tag{3.2}$$

对于线性主振型，上式化为

$$\ddot{\alpha}_i+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_i(x_1,c_2x_1,\cdots,c_nx_1;\dot{x}_1,c_2\dot{x}_1,\cdots,c_n\dot{x}_1;t)\alpha_j$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}f_i(x_1,c_2x_1,\cdots,c_nx_1;\dot{x}_1,c_2\dot{x}_1,\cdots,c_n\dot{x}_1;t)\dot{\alpha}_j=0$$
$$(i=2,3,\cdots,n) \tag{3.3}$$

主振型稳定的充分必要条件是（3.2）或（3.3）式的所有解都有界。

运用以上方法判定主振型的稳定性时通常需要将变分方程组解耦。对于两自由度系统，变分方程组本身只有一个单自由度方程，因此．用本方法判定两自由度非线性系统主振型的稳定性是非常方便的。

当主振型稳定时，对非线性系统的主振动解运用摄动法可求得相邻非线性系统的拟主振动解。常用的求解多自由度拟线性系统的各种摄动方法便是其特例。

最后，对于线性系统我们证明如下的

定理1 线性振动系统的所有主振型都是稳定的。

证明 线性振动系统只具有线性主振型。其变分方程组系含$n-1$个未知函数的$n-1$个二阶常系数线性齐次常微分方程组，由原自由振动系统去掉第一个广义坐标而构成，其解有界。证毕。

四、保守系统的主振型

1. 齐次非线性系统的主振型

考虑n自由度p阶齐次非线性系统

$$m_i\ddot{x}_i+k_{ii}x_i^p+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}k_{ij}(x_i-x_j)^p=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

p为正奇数。当$p=1$时，便得到对应的线性系统。

将主振型关系（2.8）代入（4.1）式，得主振型系数方程组

$$\left[k_{ii}c_i^p+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}k_{ij}(c_i-c_j)^p\right]m_1c_1-\left[k_{11}c_1^p+\sum_{j=2}^{n}k_{1j}(c_1-c_j)^p\right]m_ic_i=0$$

$$(i=2,3,\cdots,n) \tag{4.2}$$

其实数解便给出系统（4.1）的主振型。

不难证明，对于线性系统，主振型系数方程组给出与现有的线性振动理论完全相同的结果。因此，在线性系统中两种求解主振型的方法是等价的。

求得系统（4.1）的主振型之后，利用主振型可将系统解耦，得到主振动方程

$$m_1c_1\ddot{\xi}+\left[k_{11}c_1^p+\sum_{j=2}^{n}k_{1j}(c_1-c_j)^p\right]\xi^p=0 \tag{4.3}$$

采用谐波平衡法，求得其近似的周期解

$$\xi=a\cos\omega t \tag{4.4}$$

式中

$$\omega=\sqrt{2\frac{p!!}{(p+1)!!}\cdot\frac{k_{11}c_1^p+\sum\limits_{j=2}^{n}k_{1j}(c_1-c_j)^p}{m_1c_1}a^{p-1}} \tag{4.5}$$

系统的主振动解为

$$x_i=c_ia\cos\omega t\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.6}$$

求得系统的m个主振型，便可得到系统的m个主振动解。

2. 非齐次非线性系统的主振型

考虑n自由度非齐次非线性系统

$$m_i\ddot{x}_i+\sum_{p=1}^{N}\left[k_{iip}x_i^p+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}k_{ijp}(x_i-x_j)^p\right]=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.7}$$

称系统

$$m_i\ddot{x}_i+k_{iip}x_i^p+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}k_{ijp}(x_i-x_j)^p=0\qquad(i=1,2,\cdots,n;p=1,2,\cdots,N) \tag{4.8}$$

为系统（4.7）的p阶齐次派生系统。

将主振型关系（2.8）代入（4.7）式，得主振型系数方程组

$$\left[k_{iip}c_i^p+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}k_{ijp}(c_i-c_j)^p\right]m_1c_1-\left[k_{11p}c_1^p+\sum_{j=2}^{n}k_{1jp}(c_1-c_j)^p\right]m_ic_i=0$$

$$(i=2,3,\cdots,n;p=1,2,\cdots,N) \tag{4.9}$$

其实数解便给出系统（4.7）的主振型。

定理2　非齐次非线性系统的线性主振型包含在其任意一个齐次派生系统的主振型之中。

证明　非齐次非线性系统的主振型系数方程组由其各阶齐次派生系统的主振型系数方程组联立而成。因此，非齐次系统的主振型系数方程组的解必为其任意一个齐次派生系统的主振型系数方程组的解。证毕。

由定理 2 可得如下两个推论：

推论1　非齐次非线性系统具有线性主振型的充分必要条件是其所有齐次派生系统具有公共的主振型。

推论2　可线性化系统的线性主振型包含在对应的线性系统的主振型之中。

求得系统（4.7）的主振型之后，利用主振型可将系统解耦，得到主振动方程

$$m_1c_1\ddot{\xi}+\sum_{p=1}^{N}\left[k_{11p}c_1^p+\sum_{j=2}^{n}k_{1jp}(c_1-c_j)^p\right]\xi^p=0 \tag{4.10}$$

当系统的弹性恢复力对称于原点时，p 取正奇数。采用谐波平衡法，可得近似的周期解

$$\xi=a\cos\omega t \tag{4.11}$$

式中

$$\omega=\sqrt{2\sum_{p=1,3,\cdots}^{2q+1}\frac{p!!}{(p+1)!!}\cdot\frac{k_{11p}c_1^p+\sum\limits_{j=2}^{n}k_{1jp}(c_1-c_j)^p}{m_1c_1}a^{p-1}} \tag{4.12}$$

系统的主振动解为

$$x_i=c_ia\cos\omega t\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.13}$$

求得系统的 m 个主振型，便可得到系统的 m 个主振动解。

五、自治系统的主振型

考虑 n 自由度自治系统

$$\ddot{x}_i+f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.1}$$

f_i为x_i，$\dot{x}_i$的连续函数，可展成x_i，$\dot{x}_i$的Taylor级数。

称系统

$$\ddot{x}_i+f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;0,0,\cdots,0)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2}$$

为其对应的保守系统。

将主振型关系（2.8）代入（5.1）式，可得主振型系数方程组，其实数解便给出系统（5.1）的主振型。

定理3　自治系统的线性主振型包含在其对应的保守系统的线性主振型之中。

证明　自治系统的主振型系数方程组中包含着其对应的保守系统的主振型系数方程组，因此，自治系统的主振型系数方程组的解必为其对应的保守系统的主振型系数方程组的解。证毕。

求得系统（5.1）的主振型之后，利用主振型可将系统解耦，得到主振动方程

$$c_1\ddot{\xi}+f_1(c_1\xi,c_2\xi,\cdots,c_n\xi;c_1\dot{\xi},c_2\dot{\xi},\cdots,c_n\dot{\xi})=0 \tag{5.3}$$

解得主坐标$\xi=\xi(t)$，代回主振型关系，便得到系统的主振动解

$$x_i=c_i\xi(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.4}$$

六、非自治系统的主振型

考虑 n 自由度非自治系统(2.1)。称系统

$$\ddot{x}_i+f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n;0)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.1}$$

为其对应的自治系统。

将主振型关系（2.8）代入（2.1）式，可得主振型系数方程组，其实数解便给出系统（2.1）的主振型。

定理4　非自治系统的线性主振型包含在其对应的自治系统的线性主振型之中。

证明　非自治系统的主振型系数方程组中包含着其对应的自治系统的主振型系数方程组，因此，非自治系统的主振型系数方程组的解必为其对应的自治系统的主振型系数方程组的解。证毕。

七、算　例

例1　求两自由度非线性系统

$$m\ddot{x}_1+5kx_1^3+k(x_1-x_2)^3=0,\quad m\ddot{x}_2-k(x_1-x_2)^3+5kx_2^3=0$$

的主振型并判定其稳定性。

解　统系的主振型系数方程为

$$5c_1c_2^3-c_1(c_1-c_2)^3-c_2(c_1-c_2)^3-5c_1^3c_2=0$$

解得四个主振型

$$\begin{Bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\xi_1,\ \begin{Bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0.381966\end{Bmatrix}\xi_2$$

$$\begin{Bmatrix}x_1^{(3)}\\x_2^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}\xi_3,\ \begin{Bmatrix}x_1^{(4)}\\x_2^{(4)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-2.618034\end{Bmatrix}\xi_4$$

主振动方程为

$$mc_1^{(s)}\ddot{\xi}_s+[5kc_1^{(s)3}+k(c_1^{(s)}-c_2^{(s)})^3]\xi_s^3=0\qquad(s=1,2,3,4)$$

主振动解为

$$x_i^{(s)}=c_i^{(s)}a_s\cos\omega_s t\qquad(i=1,2;\ s=1,2,3,4)$$

式中

$$\omega_1=1.936492\sqrt{\frac{k}{m}}a_1,\quad \omega_2=2.393635\sqrt{\frac{k}{m}}a_2,$$

$$\omega_3=3.122499\sqrt{\frac{k}{m}}a_3,\quad \omega_4=6.266619\sqrt{\frac{k}{m}}a_4$$

给主振动轨道以小扰动，得变分方程

$$m\ddot{\alpha}^{(s)}+3[k(1-c_2^{(s)})^2+5kc_2^{(s)2}]x_1^{(s)2}\alpha^{(s)}=0\qquad(s=1,2,3,4)$$

可近似化为Mathieu方程

$$\frac{d^2\alpha^{(s)}}{dz_s^2}+(\delta_s+\varepsilon_s\cos z_s)\alpha^{(s)}=0\qquad(s=1,2,3,4)$$

式中

$$\delta_1=\varepsilon_1=0.5,\ \delta_2=\varepsilon_2=0.172746,\ \delta_3=\varepsilon_3=0.346154,\ \delta_4=\varepsilon_4=0.452254$$

第一、二、四主振型是稳定的，第三主振型不稳定。

例2　求三自由度耦合Van der Pol方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+\mu m(x_1^2-1)\dot{x}_1+kx_1+k(x_1-x_2)=0 \\ m\ddot{x}_2+\mu m\left(\frac{1}{2}x_2^2-1\right)\dot{x}_2-k(x_1-x_2)+k(x_2-x_3)=0 \\ m\ddot{x}_3+\mu m(x_3^2-1)\dot{x}_3-k(x_2-x_3)+kx_3=0 \end{cases}$$

(μ为小参数)的主振型并判定其稳定性

解 系统具有三个主振型

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}\xi_1,\quad \begin{Bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}\xi_2,\quad \begin{Bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}\xi_3$$

主振动方程为

$$m\ddot{\xi}_1+\mu m(\xi_1^2-1)\dot{\xi}_1+(2-\sqrt{2})k\xi_1=0$$
$$m\ddot{\xi}_2+\mu m(\xi_2^2-1)\dot{\xi}_2+2k\xi_2=0$$
$$m\ddot{\xi}_3+\mu m(\xi_3^2-1)\dot{\xi}_3+(2+\sqrt{2})k\xi_3=0$$

定常主振动解为

$$x_i^{(s)}=2c_i^{(s)}\cos(\omega_s t+\theta_s)\qquad (i=1,2,3;\ s=1,2,3)$$

式中

$$\omega_1=\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{2\frac{k}{m}},\quad \omega_3=\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}}$$

给主振动轨道以小扰动，得变分方程组

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1+\mu[(x_1^{(1)2}-1)\dot{\alpha}_1+2x_1^{(1)}\dot{x}_1^{(1)}\alpha_1]+\frac{k}{m}(2\alpha_1-\beta_1)=0 \\ \ddot{\beta}_1+\mu[(x_1^{(1)2}-1)\dot{\beta}_1+2x_1^{(1)}\dot{x}_1^{(1)}\beta_1]+\frac{k}{m}(2\beta_1-\alpha_1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_2-\mu\dot{\alpha}_2+\frac{k}{m}(2\alpha_2-\beta_2)=0 \\ \ddot{\beta}_2+\mu[(x_1^{(2)2}-1)\dot{\beta}_2+2x_1^{(2)}\dot{x}_1^{(2)}\beta_2]+\frac{k}{m}(2\beta_2-\alpha_2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_3+\mu[(x_1^{(3)2}-1)\dot{\alpha}_3+2x_1^{(3)}\dot{x}_1^{(3)}\alpha_3]+\frac{k}{m}(2\alpha_3-\beta_3)=0 \\ \ddot{\beta}_3+\mu[(x_1^{(3)2}-1)\dot{\beta}_3+2x_1^{(3)}\dot{x}_1^{(3)}\beta_3]+\frac{k}{m}(2\beta_3-\alpha_3)=0 \end{cases}$$

对第一、三变分方程组作变量代换

$$\begin{Bmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_s^* \\ \beta_s^* \end{Bmatrix}\exp\left[-\frac{\mu}{2}\left[t+\frac{1}{\omega_s}\sin2(\omega_s t+\theta_s)\right]\right]\qquad (s=1,3)$$

得

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_s^*+\left[\frac{k}{m}-2\mu\omega_s\sin2(\omega_s t+\theta_s)\right]\alpha_s^*=0 \\ \ddot{\beta}_s^*+\left[3\frac{k}{m}-2\mu\omega_s\sin2(\omega_s t+\theta_s)\right]\beta_s^*=0 \end{cases}\qquad (s=1,3)$$

可近似化为Mathieu方程

$$d^2\alpha_s^*/dz_s^2+(\delta_s+\varepsilon_s\cos z_s)\alpha_s^*=0,\quad d^2\beta_s^*/dz_s^{*2}+(\delta_s^*+\varepsilon_s^*\cos z_s^*)\beta_s^*=0\qquad (s=1,3)$$

式中 $\delta_1=0.426777,\ \delta_1^*=1.280331,\ \varepsilon_1=\varepsilon_1^*=0.653281\mu\sqrt{m/k}$

$\delta_3=0.073223,\ \delta_3^*=0.219670,\ \varepsilon_3=\varepsilon_3^*=0.270598\mu\sqrt{m/k}$

对于充分小的μ，第一、三主振型是稳定的。对第二变分方程组，有

$$a_2=\exp\left[\frac{\mu}{2}t\right]\left[a\cos\sqrt{2\frac{k}{m}-\frac{\mu^2}{4}}\;t+\frac{k}{m}\int_0^t\beta\sin\sqrt{2\frac{k}{m}-\frac{\mu^2}{4}}\;(t-\tau)d\tau\right]$$

无界，因此，第二主振型不稳定。

八、结 束 语

本文提出了一种求解非线性振动系统主振型的新方法，适用于各种多自由度非线性振动系统。文中还提出了一种判定非线性系统主振型稳定性的方法。计算实例表明，用本文的方法求解非线性系统的主振型并判定稳定性是方便可行的。

参 考 文 献

[1] Rosenberg, R. M., Normal modes of nonlinear dual-mode systems, *ASME, J. Appl. Mech.*, **27**, E, 2 (1960), 263—268.

[2] Rosenberg, R. M., On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Adv. in Appl. Mech.*, **9**, Acad. Press (1966).

[3] Cooke, C. H. and R. A. Struble, On the existence of periodic solutions and normal mode vibrations of nonlinear systems, *Quart. Appl. Math.*, **24**, 3 (1966), 177—193.

[4] Pecelli, G. and E. S. Thomas, Normal modes, uncoupling, and stability for a class of nonlinear oscillators, *Quart. Appl. Math.*, **37**, 3 (1979), 281—301.

[5] Szemplińska-Stupnicka, W., The resonant vibration of homogeneous non-linear systems, *Int. J. Nonl. Mech.*, **15** (1980), 407—415.

[6] Van der Varst, P. G. Th., On normal mode vibrations of nonlinear conservative systems, Ph. D. Thesis, Eindhoven Univ. of Tech., Netherland (1982).

A Method of Finding the Principal Modes of Nonlinear Vibration Systems and Their Stabilities

Liu Lian-sheng

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing*)

Huo Quan zhong

(*Tianjin University, Tianjin*)

Huang Ke-lei

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing*)

Abstract

This paper presents a new method of finding the principal modes of nonlinear vibration systems, by means of which the problem of finding principal modes of nonlinear systems is transferred to the problem of finding real roots of a set of algebraic equations. The method is applicable to various kinds of nonlinear vibration systems with many degrees of freedom, and is simple in calculation. The paper presents another new method of analyzing the stabilities of principal modes of nonlinear systems.