应用数学和力学，第 8 卷第 6 期（1987年 6 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

再论弹性大挠度问题von Kármán方程与量子本征值问题Schrödinger方程的关系*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1985年11月 8 日收到）

摘 要

本文是文[1]的继续和改善。利用本文的结果，还可以改善文[2～3]中有关弹性大挠度问题的讨论。在本文中，我们再次对弹性大挠度问题的 von Kármán 方程进行简化，使它最终成为非线性 Schrödinger 方程。其次，在本文中我们对 AKNS 方程在多维条件下进行了更为对称的拓展。由于非线性 Schrödinger 方程与 AKNS 方程即 Dirac 方程的可积性条件相联系，因此，弹性大挠度问题可以用逆散射方法求得其精确解，也就是说，它完全成了量子本征值问题。

对于正交各向异性大挠度问题，本文也作了推论。

一、前 言

本文是文[1]的继续和改善。利用本文的结果，还可以改善文[2～3]中有关弹性大挠度问题的讨论。

我们在文[1～3]中曾经将弹性大挠度问题的 von Kármán 方程[4~5]归结为量子本征值问题的 AKNS 方程[6~7]（实际上是 Dirac 方程[8]，即符合特殊相对论的 Schrödinger 方程）的求解。但是我们很容易发现，AKNS 方程的可积性条件与 von Kármán 方程的对应并不十分自然。这种不十分自然的对应尽管有时候可用，但其违反有关自然界普遍谐和的一般性原理。这就使我们有理由认为文[1]的结果必须加以改善。

问题的关键仍然在于对弹性大挠度问题 von Kármán 方程的化简，以及对 AKNS 方程在多维条件下的拓展。看来后者比前者更重要。

在文[1～3]中，我们业已化简了 von Kármán 方程，使它成为

$$\nabla^4 w=\frac{1}{2}\nabla w\cdot\nabla[\nabla w\cdot\nabla w]+q \tag{1.1}$$

式中各力学量的意义同文[1]。然而，这种化简并不彻底。如果记 $\nabla w=\sqrt{6}\,\mathbf{v}$，则方程(1.1)式起码还保留对矢量 $\mathbf{v}$ 的三次微商。这个含有对坐标三次微商的方程，同仅含有对坐

* 钱伟长推荐。

标二次微商的 Schrödinger 方程[8~10]相比，还相差一步路。

其次，我们在文[1～3]中对 AKNS 方程在二维条件下进行了拓展。我们所用的方法是复变函数理论中的解析开拓。但是事实证明这种方法并不理想。因为 Newton 二项式展开后的各项系数互不相等。这给我们的计算增添了麻烦。

由于这样两个原因，使文[1～3]中有关弹性大挠度问题与量子本征值问题的对应，显得比较复杂。本文此举，改善了弹性大挠度问题 von Kármán 方程的化简，使它最终成为非线性 Schrödinger 方程；同时改善了 AKNS 方程在多维条件下的拓展，使其更加对称。其他问题则迎刃而解。

本文所得到的结果要比文[1～3]来得干净漂亮，相信它是使用逆散射方法求解大挠度问题的最佳方案。

本文所得到的结果可以方便地推广到薄壳理论中和正交各向异性板壳理论中去。实际上，本文的出发点就是正交各向异性薄板的大挠度方程，而且它与薄壳理论中大挠度 W' 的方程以

$$W'=W-\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2) \tag{1.2}$$

相联系[2~3]。

本文的结果，对讨论板壳的非线性跳跃是完全必要的[11~12]。

本文同文[1～3,13～17]一样，在需要引入的时候，都假定所有力学量均已解析开拓到复平面上，并且已定义为 Hilbert 空间中的多维矢量。

本文中凡重复指标系指按 Einstein 约定求和。

二、von Kármán方程的化简

Winkler 地基上正交各向异性薄板的弹性大挠度 von Kármán 方程为

$$D_0\nabla^4 W+KW-Q=h\left[\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right] \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4F=\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right] \tag{2.2}$$

式中

$$D_0\nabla^4=D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{2.3}$$

而 D_1,D_2 为 x 方向和 y 方向的抗弯刚度，D_3 为扭转刚度；E 为 Young 模量；h 为板厚；Q 为侧向载荷；K 为 Winkler 地基的弹性系数；W 为挠度；F 为应力函数。在振动问题中

$$Q=-m\frac{\partial^2W}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

式中 m 为薄板每单位面积内的质量。

方程(2.2)式还可以写成

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}+\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{2.5}$$

若规范

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{E}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \tag{2.6}$$

则(2.5)式恒满足。将(2.6)式代入(2.1)式，并计及(2.4)式，我们可以得到关于挠度 W 的非线性方程

$$m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\left(D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W+KW$$

$$=\frac{Eh}{2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] \tag{2.7}$$

因为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 W$$

$$=\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}+2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]W$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]$$

$$=\nabla W\cdot\nabla(\nabla W\cdot\nabla W) \tag{2.8}$$

所以方程(2.7)式可以写成

$$m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\left(D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W+KW$$

$$=\frac{Eh}{4}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 W \tag{2.9}$$

如果设

$$\eta_1^4=\frac{D_1}{m},\quad \eta_3^4=\frac{D_3}{2m},\quad \eta_2^4=\frac{D_2}{m},\quad k^2=\frac{K}{m},\quad W=2\sqrt{\frac{m}{Eh}}\,w \tag{2.10}$$

则非线性方程(2.9)式可以无量纲化为

$$\left[\partial_t\partial_t+\left(\eta_1^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4\eta_3^4\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\eta_2^4\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)+k^2\right]w$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 w \tag{2.11}$$

引入 Flügge 标准矩阵[18] γ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ 及

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=-\sigma_1\otimes\sigma_4 \tag{2.12}$$

而且有

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu},\qquad (\mu,\nu=1,2,3,4,5) \tag{2.13}$$

其中 σ_1 为Pauli 矩阵 σ_4 为 2×2 单位矩阵，$\delta_{\mu\nu}$ 为 Krönecker 符号，$\otimes$表示直积(Krönecker积)。

这时可将方程(2.11)式写成

$$\left[\gamma_1\partial_t+\left(\eta_1^2\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta_3^2\gamma_5\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+k\gamma_3\right]^2 w$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 w \tag{2.14}$$

由方程(2.14)式可以看出，等式两端作用在 w 前的算符应当相等。即对弹性大挠度问题而言，下列两个算符是相等的：

$$\left[\gamma_1\partial_t+\left(\eta_1^2\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta_3^2\gamma_5\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+k\gamma_3\right]$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.15}$$

由此，我们可以将方程(2.14)式等号两端同时“开方”，并得到矩阵正交各向异性非线性 Schrödinger 方程

$$\left[\gamma_1\partial_t+\left(\eta_1^2\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta_3^2\gamma_5\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+k\gamma_3\right]w$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)w \tag{2.16}$$

我们设 w 为 Hilbert 空间中的四维矢量，并且它的四个分量是等值的。于是，(2.16)式可以展开成下面四个方程：

$$\left[i\partial_t+\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+ik\right]w=-\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.17a}$$

$$\left[i\partial_t-\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-ik\right]w=-\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.17b}$$

$$\left[i\partial_t+\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+ik\right]w=\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.17c}$$

$$\left[i\partial_t-\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-ik\right]w=\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.17d}$$

(2.17)式是正交各向异性的非线性 Schrödinger 方程组。

对各向同性薄板来说，方程(2.16)式可以简化为

$$(\sigma_2\partial_t+\eta^2\sigma_1\nabla^2+k\sigma_3)w=\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.18}$$

式中 σ_k ($k=1,2,3$) 为 Pauli 矩阵[8~10]，且有

$$\sigma_m\sigma_n=i\,e_{mnk}\,\sigma_k \qquad (k,m,n=1,2,3) \tag{2.19}$$

而 e_{mnk} 为 Levi-Civita 符号(或 Ricci 符号[18~20])。

对各向同性薄板来说，对应于方程组(2.17)式的方程是

$$(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)w=-\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.20a}$$

$$(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)w=\nabla w\cdot\nabla w \tag{2.20b}$$

(2.20)式是非线性 Schrödinger 方程。它比(1.1)式要来得简单。它是 von Kármán 方程最为彻底的简化形式。方程(2.20)式等号左端的线性部分，与小挠度问题的基本方程完全符合[15]。

三、von Kármán方程与Dirac方程（AKNS方程）的关系

von Kármán 方程与 Dirac 方程（AKNS 方程）的关系表现为前者是后者的可积性条

件。

首先，我们将非线性 Schrödinger 方程(2.20)式改变形式。为此，我们同时作用算子 ∇ 于方程(2.20)式等号左右两端，并记

$$v_m=\partial_m w=(\nabla w)_m \tag{3.1}$$

此时方程(2.20)式成为

$$(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)v_m=-\partial_m v^2 \tag{3.2a}$$

$$(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)v_m=\partial_m v^2 \tag{3.2b}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)v_m+2v_n\partial_m v_n=0\\&(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)v_m-2v_n\partial_m v_n=0\end{aligned}\right\}\quad(m,n=1,2) \tag{3.3a,b}$$

另一方面，由于(3.1)式和关系式

$$\partial_m v_n=\partial_n v_m=\partial_m\partial_n w \tag{3.4}$$

我们又可将(3.3)式写成

$$[(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)\partial_m+2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0 \tag{3.5a}$$

$$[(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)\partial_m-2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0 \tag{3.5b}$$

实际上，(3.5a)式就是(3.3a)式，而(3.5b)式就是(3.3b)式。将(3.5b)式与(3.3b)式互相交换，我们可以得到互相等价的另两组方程：

$$\left.\begin{aligned}&(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)v_m+2v_n\partial_m v_n=0\\&[(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)\partial_m-2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&[(i\partial_t-\eta^2\nabla^2-k)\partial_m+2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0\\&(i\partial_t+\eta^2\nabla^2-k)v_m-2v_n\partial_m v_n=0\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

如果不计 Winkler 地基上的弹性系数 K，这时(2.20)式成为共轭方程组，而(3.6)式和(3.7)式成为

$$\left.\begin{aligned}&(i\partial_t-\eta^2\nabla^2)v_m+2v_n\partial_m v_n=0\\&[(i\partial_t+\eta^2\nabla^2)\partial_m-2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&[(i\partial_t-\eta^2\nabla^2)\partial_m+2(\partial_n v_m)\partial_n]w=0\\&(i\partial_t+\eta^2\nabla^2)v_m-2v_n\partial_m v_n=0\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

其次，我们对 AKNS 方程进行二维拓展。以下，式中凡不含 Pauli 矩阵 σ_k ($k=1,2$) 的量，均约定已乘上 2×2 单位矩阵。需要指出的是，我们对协变指标和逆变指标未加区别。因而有两种意义上的求和，其中一种形如 $\sigma_k\partial_k$，另一种形如$\sigma_k v_k M\sigma_k v_k=v_k M v_k$（式中 M 为任一力学量）。

我们发现，如果 AKNS 方程取如下形式：

$$i\partial_t\psi=H\psi,\qquad L\psi=\zeta\psi \tag{3.10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&H=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}i\eta\sigma_k\partial_k & -iq\\ ir & -i\eta\sigma_k\partial_k\end{bmatrix}\\&\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)^T\qquad(k=1,2)\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

和

$$A=2\zeta^2+qr,\ B=2iq\zeta-\eta\sigma_k\partial_k q,\ C=2ir\zeta+\eta\sigma_k\partial_k r \tag{3.12}$$

则根据可积性条件[21~23]

$$\left.\begin{aligned}&\eta\sigma_k\partial_k A=qC-rB\\&\eta\sigma_k\partial_k B+2i\zeta B=i\partial_t q-2qA\\&\eta\sigma_k\partial_k C-2i\zeta C=i\partial_t r+2rA\end{aligned}\right\}\quad (k=1,2) \tag{3.13}$$

可以得到方程组

$$(i\partial_t-\eta^2\nabla^2)r+2qr^2=0 \tag{3.14a}$$

$$(i\partial_t+\eta^2\nabla^2)q-2q^2r=0 \tag{3.14b}$$

以(3.14)式对照(3.8)式或(3.9)式，可见

（1）当

$$r=\sigma_m v_m,\qquad q=\sigma_n\partial_n \tag{3.15}$$

时，方程(3.8)式与(3.14)式完全相同；

（2）当

$$q=\sigma_m v_m,\qquad r=\sigma_n\partial_n \tag{3.16}$$

时，方程(3.9)式与(3.14)式完全相同。换言之，von Kármán 方程的简化形式，其挠度的梯度现在成了 Dirac 方程（AKNS 方程)的可积性条件。

可以看出，拓展后的 AKNS 方程由于是关于四元 ψ 的方程，因而算符 H 和 L 都成为 4×4 矩阵。

如果弹性大挠度问题存在外场，外场的势用 U_k $(k=1,2)$来表示，则在使用经典规则后，∂_k 应用下列变换来代替：

$$\partial_k\to\partial_k-iU_k\qquad (k=1,2) \tag{3.17}$$

以上讨论还可以推广到正交各向异性薄板的弹性大挠度问题中去。对忽略 Winkler 地基的弹性系数 K 的正交各向异性薄板而言，矩阵 L 的形式将变成

$$L=\begin{bmatrix}\dfrac{i}{\eta_2}\Big[\sqrt{\pm\eta_1^2\eta_2^2-\eta_3^4}\,\sigma_1\dfrac{\partial}{\partial x}+\sigma_2\Big(\eta_3^2\dfrac{\partial}{\partial x}\pm\eta_2^2\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)\Big] & -iq\\ ir & -\dfrac{i}{\eta_2}\Big[\sqrt{\pm\eta_1^2\eta_2^2-\eta_3^4}\,\sigma_1\dfrac{\partial}{\partial x}+\sigma_2\Big(\eta_3^2\dfrac{\partial}{\partial x}\pm\eta_2^2\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)\Big]\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

而 A,B,C 中所有 $\eta\sigma_k\partial_k$ 应用下列变换来代替

$$\eta\sigma_k\partial_k\to\frac{1}{\eta_2}\Big[\sqrt{\pm\eta_1^2\eta_2^2-\eta_3^4}\,\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}+\sigma_2\Big(\eta_3^2\frac{\partial}{\partial x}\pm\eta_2^2\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big] \tag{3.19}$$

从而，全部弹性力学问题[2,13~15]，甚至于全部非耗散的力学或热力学问题，都以极精致的形式与量子本征值问题相联系。我们或者可以用量子本征值问题 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的通解来得到线性弹性力学问题和其他非耗散型线性方程的通解，或者可以用量子本征值问题 Schrödinger 方程或 Dirac 方程的通解经由逆散射变换得到非线性弹性力学问题和其他非线性问题的精确解。

参 考 文 献

[1] 沈惠川，弹性大挠度问题 von Karman 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系，应用数学和力学，**6**，8 (1985)，711—723.

[2] 沈惠川，薄壳理论中的 Schrödinger 方程，应用数学和力学，**6**，10 (1985)，887—900.

[3] 沈惠川，正交各向异性板壳理论中的Schrödinger方程，应用数学和力学，**8**，2 (1987)，177—184.

[4] von Kárman, Th., *Encyklopadie der Math.*, Wissonschaften, Bd Ⅳ, **4** (1910), 349.

[5] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек и Ее Приложения в Технике*, Гостехиздат (1949). 中译本，《壳体的一般理论》，薛振东等译，人民教育出版社 (1964).

[6] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Letters*, **30** (1973), 1262—1264.

[7] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Letters*, **31** (1973), 125—127.

[8] Dirac, P. A. M.,《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965).

[9] Landau, L. D. (Ландау Л. Д.) and E. M. Lifshitz (E. M. Лифшиц), 《量子力学》，严肃译，人民教育出版社 (1980).

[10] Schiff, L. I.,《量子力学》，方励之校，人民教育出版社 (1982).

[11] Налешкевич Я. (Naleszkiewicz, J.), Квантвые свойства явлений упругой неустойчивости, *Бюлл, Польск., АН.*, **3**, 2 (1955), 59—72.

[12] Вольмир А. С., *Гибкие Пластики и Оболочки*, Гостехиздат, Москва (1956). 中译本，《柔韧板与柔韧壳》，卢文达等译，科学出版社 (1959).

[13] 沈惠川，弹性动力学的通解，应用数学和力学，**6**，9 (1985)，791—796; 自然杂志，**7**，8 (1984)，633—634.

[14] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，**5**，4 (1984)，541—551.

[15] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，**5**，6 (1984)，817—827.

[16] 沈惠川，理想塑性力学问题的通解，自然杂志，**8**，11 (1985)，846—848.

[17] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程，双调和方程和本征方程，应用数学和力学，**7**，1 (1986)，61—72.

[18] Flügge, S.,《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社，(1981，上册; 1983，下册).

[19] 沈惠川，动力应力函数张量，应用数学和力学，**3**，6 (1982)，829—834.

[20] 沈惠川，动力应力函数张量及弹性静力学的通解，中国科学技术大学学报，**14**，增刊 1，JCUST 84016 (1984)，95—102.

[21] 谷内俊弥(Taniuti, T.)，西原动修(Nishihara, K.)，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社 (1981).

[22] Eckhaus, W. and A. Van Harten，《逆散射变换和孤立子理论》，黄迅成译，上海科学技术文献出版社 (1984).

[23] Захоров В. Е., С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, *Теория Солитонов*, Физико-Математической Литературы (1980). 中译本，《孤子理论》，彭启才译，科学出版社 (1985).

Further Study of the Relation of von Kármán Equation for Elastic Large Deflection Problem and Schrödinger Equation for Quantum Eigenvalues Problem

Shen Hui-chuan

(Fundamental Physics Centre, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

This work is the continuation and improvement of the discussion of Ref. [1]. We also improve the discussion of Refs. [2~3] on the elastic large deflection problem by the results of this paper. We again simplify the von Kármán equation for elastic large deflection problem, and finally turn it into the nonlinear Schrödinger equation in this paper. Secondly, we expand the AKNS equation to still more symmetrical degree under many dimensional conditions in this paper. Owing to the connection between the nonlinear Schrödinger equation and the integrability condition for the AKNS equation or the Dirac equation, we can obtain the exact solution for elastic large deflection problem by inverse scattering method. In other words, the elastic large deflection problem wholly becomes a quantum eigenvalues problem.

The large deflection problem with orthorhombic anisotropy is also deduced in this paper.