应用数学和力学，第8卷第5期（1987年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

梁的弹性最优设计*

唐燮黎　　叶开沅

（河海大学）　（兰州大学）

（1986年3月14日收到）

摘　要

本文根据最小余能原理建立了弹性梁最优强度设计问题的数学形式，它为一个具有等式和不等式约束的泛函极值问题。进而应用拉格朗日乘子法得到了极值的必要条件，并由此导出最优解所必须满足的一组关系式，这组关系式可以用来检验等强度设计或任一可行弹性设计的最优性。当等强度设计不是最优设计时文中还建议了一个迭代寻优的数值解法。

一、问题的提出

近二十年来许多作者研究了弹性梁或柱的各种优化设计问题，诸如最小挠度设计，最大刚度设计，最大临界载荷设计以及最大基频设计等。然而讨论弹性梁强度设计的文章并不多见。对大量工程问题而言，不考虑梁的强度问题是不实际的。为此，在本文中我们将考虑静不定梁在任意的分布力，集中力或集中力偶作用下的强度设计问题。讨论中假设截面性质由一个可变参数决定。属于这一类型的截面形式有宽度固定，高度沿梁轴线可变的矩形截面；梁高和翼宽不变，上下翼板厚度沿梁轴线可变的理想工字梁截面；半径沿梁轴线可变的圆形截面等。以$\bar{x}$表沿梁轴线的坐标，$\overline{M}(\bar{x})$表梁的极限弹性矩分布。由截面性质为单参数决定的假定可知，给出一个极限弹性矩分布，就有相应的截面形式分布，因而得到了一个梁的设计方案，这样我们可以称一个给定的$\overline{M}(\bar{x})$为一个设计。

给定设计$\overline{M}(\bar{x})$，设梁在外载作用下相应的弯矩分布为$\bar{m}(\bar{x})$，则为使$\overline{M}(\bar{x})$是弹性设计意义下的一个可行设计，如下不等式在梁的任一截面$\bar{x}$处必须满足：

$$\overline{M}(\bar{x})\geqslant|\bar{m}(\bar{x})| \tag{1.1}$$

我们假定对所讨论的梁而言弯曲应力是主要的，由横向剪力产生的剪应力是小的。为此在本文中对剪应力不作逐点检验，而用以下整体性约束条件来保证梁有承受剪力的能力

$$\overline{M}(\bar{x})\geqslant\overline{M}_m \tag{1.2}$$

式中$\overline{M}_m$是事先规定的最小容许极限弹性矩，它的取值大小由使梁能承受问题所需的足够大的剪力而定。

以$\bar{S}(\overline{M})$，$\bar{\varphi}(\overline{M})$分别表示极限弯矩为$\overline{M}$处梁截面的弯曲刚度和单位长的价值，并假定它们具有形式

---

* 本文受国家教育委员会科技资金资助。

$$\bar{S}=\alpha\bar{M}^{\beta} \tag{1.3}$$

和

$$\bar{\varphi}=\gamma\bar{M}^{\delta} \tag{1.4}$$

那么梁的总价值为

$$\bar{\Phi}=\int_{l}\bar{\varphi}(\bar{M})d\bar{x} \tag{1.5}$$

积分展布在整个梁长 l。于是弹性梁的最优设计问题表述为求满足约束(1.1)和(1.2)并使目标函数(1.5)取最小值的设计$\bar{M}(\bar{x})$。若取 $\bar{\varphi}$ 为单位长梁的重量 $\bar{A}$，则上述问题构成求最小重量的弹性设计。对于几种常见截面形式，取$\bar{\varphi}=\bar{A}$，其α，β，γ和δ的值列于表 1。表中E为材料的弹性模量，σ为最大容许弯曲正应力，B为梁宽，H为梁高，ρ为材料重度。

表 1　　几种截面的弯曲刚度和单位长重量与极限弹性矩的关系

截面形式	α	β	γ	δ
等宽变高的矩形截面	$\frac{\sqrt{6}}{2}EB^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{6}\rho B^{\frac{1}{2}}\sigma^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
可变翼厚的理想工字形截面	$\frac{EH}{2\sigma}$	1	$\frac{2\rho}{H\sigma}$	1
圆形截面	$E\left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\sigma^{-\frac{4}{3}}$	$\frac{4}{3}$	$(16\pi)^{-\frac{1}{3}}\rho\sigma^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$

最近本文作者们应用最小余能原理提出了对静不定梁进行等强度设计的解析法和数值法[1],[2]。由于缺乏形为(1.5)式的目标函数，因此不能保证等强度设计是最优设计。事实上，进一步的研究表明在许多情形下等强度设计并非最小总价值设计。在下文中我们首先仍基于最小余能原理来得到梁的弹性最优设计问题的数学形式，并用变分方法得到了最优设计解应满足的必要条件；这些必要条件可用来检验等强度设计（或任一可行设计）的最优性；当等强度设计不是最优设计时，提出了一个寻求最优设计的迭代解法。

二、最优弹性设计的必要条件

我们将以一次静不定梁为例来建立最优弹性设计问题的数学形式并导出最优解所需满足的必要条件。对梁而言，如适当选取多余力（或多余力矩）$\bar{R}$，则满足平衡方程的梁内弯矩分布可以表为$\bar{R}$的函数

$$\bar{m}(\bar{x})=\bar{F}(\bar{x})\cdot\bar{R}+\bar{G}(\bar{x}) \tag{2.1}$$

式中$\bar{F}(\bar{x})$，$\bar{G}(\bar{x})$是具有分段表达式的函数，只决定于梁上的外载荷和梁的支承条件，因而是设计的已知函数。应用最小余能原理容易得到多余力$\bar{R}$应满足的一个积分方程(参见[2])：

$$\int_{l}\frac{\bar{m}}{\bar{S}}\frac{\partial\bar{m}}{\partial\bar{R}}d\bar{x}=0 \tag{2.2}$$

将(2.1)代入上式得

$$\int_{l}\frac{1}{\bar{S}}\bar{F}(\bar{F}\bar{R}+\bar{G})d\bar{x}=0 \tag{2.3}$$

为便于推导和进行数值计算，我们将采用无量纲形式的物理量。以梁长 l，特征力 P，特征弯矩Pl和R_0分别对轴向坐标$\bar{x}$，力，弯矩和R进行无量纲化，即令$x=\bar{x}/l$，$M=\bar{M}/Pl$，$m=\bar{m}/Pl$，$M_m=\bar{M}_m/Pl$，$R=\bar{R}/R_0$(当R为力时取$R_0=P$，当R为力矩时取$R_0=Pl$)；相应地

取 $F=\bar{F}\Big/\left(\frac{Pl}{R_0}\right)$，$G=\bar{G}/Pl$；并令无量纲的弯曲刚度，价值函数和总价值分别为$S=\bar{S}/S_0$，$\varphi=\bar{\varphi}/\varphi_0$，$\Phi=\bar{\Phi}/\varphi_0 l$，其中$S_0=\alpha(Pl)^\beta$，$\varphi_0=\gamma(Pl)^\delta$；则对方程(1.1)，(1.2)，(1.5)，(2.1)和(2.3)而言只要去掉物理量上的“—”就为对应的无量纲形式，而方程(1.3)和(1.4)简化为

$$S=M^\beta \tag{2.4}$$

和

$$\varphi=M^\delta \tag{2.5}$$

采用无量纲形式后弹性优化问题可写为如下的数学形式：

求$M(x)$，使最小化 $$\Phi=\int_l \varphi(M)dx \tag{2.6}$$

并满足约束 $$(FR+G)^2\leqslant M^2 \tag{2.7}$$

$$M_{\rm m}\leqslant M \tag{2.8}$$

和 $$\int_l \frac{1}{S}F(FR+G)dx=0 \tag{2.9}$$

为避免使用绝对值，我们用(2.7)式代替形为(1.1)的约束。(2.6)～(2.9)为具有不等式约束的优化问题，可以用变分法进行研究。关于变分法的一般原理可参阅有关著作 如[3]，关于不等式约束的处理可参阅[4]的第一章。

对不等式约束(2.7)和(2.8)分别引入非负的松弛函数 $Y(x)$和 $Z(x)$使之转化成等式约束

$$(FR+G)^2+Y-M^2=0 \tag{2.10}$$

和

$$M_{\rm m}+Z-M=0 \tag{2.11}$$

应用拉格朗日乘子法可形成如下拉格朗日函数

$$L=\int_l\Big\{\varphi(M)+\mu\frac{1}{S}F(FR+G)+\lambda[(FR+G)^2+Y-M^2]$$
$$+\tau(M_{\rm m}+Z-M)\Big\}dx \tag{2.12}$$

式中μ，$\lambda=\lambda(x)$，$\tau=\tau(x)$分别为相应于约束(2.9)，(2.10)和(2.11)的拉格朗日乘子。将拉格朗日函数L对μ，λ 和 τ 进行变分给出约束方程(2.9)～(2.11)；L对 R，M，Y 和Z的变分给出了如下一组极值的必要条件

$$\int_l\left[2\lambda F(FR+G)+\mu\frac{F^2}{S}\right]dx=0 \tag{2.13}$$

$$\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)-2\lambda M-\tau=0 \tag{2.14}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda=0 & \text{当 } Y>0\\ \lambda\geqslant 0 & \text{当 } Y=0\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\tau=0 & \text{当 } Z>0\\ \tau\geqslant 0 & \text{当 } Z=0\end{array}\right\} \tag{2.16}$$

设$M(x)$是一个满足约束(2.9)～(2.11)的可行解，且满足极值必要条件(2.13)～(2.16)，则梁长 l 可以分为三部分之和$l=l_1+l_2+l_3$，使得在l_1上有$M=|FR+G|$，在l_2上有$M=M_{\rm m}$，在 l_3 上有$M>|FR+G|$和$M>M_{\rm m}$。用约束(2.10)，(2.11)和条件(2.14)～(2.16)可以得到极值解在各部分梁上应满足的关系式，它们可列成表2。在梁的l_3部分将$\lambda=\tau=0$ 代入(2.14)得

$$\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)=0$$

将(2.4)和(2.5)代入上式并解出M可以得到最优设计M在梁的l_3部分所应有的表达式为（亦见表 2）：

$$M=M_3\equiv\left[\frac{\beta}{\delta}\mu F(FR+G)\right]^{\frac{1}{\beta+\delta}} \qquad (x\in l_3) \tag{2.17}$$

显然根据l_3的定义如下不等式应成立

$$M_3>|FR+G| \text{ 和 } M_3>M_m \qquad (x\in l_3)$$

此外多余力R和乘子μ还必须使约束(2.9)和极值条件(2.13)得以满足。

表 2 最优解（或极值解）应满足的关系式

l_i	Y	Z	λ	τ	M
l_1	0	>0	$\frac{1}{2M}\left[\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)\right]\geq 0$	0	$\|FR+G\|$
l_2	>0	0	0	$\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)\geq 0$	M_m
l_3	>0	>0	0	0	$\left[\frac{\beta}{\delta}\mu F(FR+G)\right]^{\frac{1}{\beta+\delta}}$

表 2 中的极值关系式可以用来检验任一满足约束的可行设计的最优性，并以此为依据建立寻找最优解的迭代方法。

三、求最优设计的迭代方法

1. 检验等强度设计的最优性

设$M(x)$为梁的等强度设计，R为与M相应的多余力，显见梁l仅有l_1和l_2两部分组成。将表 2 中λ的关系式代入极值方程(2.13)得到

$$\int_{l_1}\frac{1}{M}\left[\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)\right]F(FR+G)dx+\mu\int_{l}\frac{F^2}{S}dx=0$$

利用(2.4)和(2.5)式对上式进行简化运算，并解得μ的显式表达式为

$$\mu=\delta\int_{l_1}\frac{\varphi F}{FR+G}dx\Big/\left(\beta\int_{l_1}\frac{F^2}{S}dx-\int_{l}\frac{F^2}{S}dx\right) \tag{3.1}$$

将S的表达式(2.4)，等强度解$M(x)$和R代入上式右端，积分后可算得相应的μ值，进而根据表 2 可算得λ和τ，若下述两不等式

$$\lambda=\frac{1}{2M}\left[\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)\right]\geq 0 \qquad (\text{当 } x\in l_1) \tag{3.2}$$

和

$$\tau=\varphi'-\mu\frac{S'}{S^2}F(FR+G)\geq 0 \qquad (\text{当 } x\in l_2) \tag{3.3}$$

成立，则可断言等强度设计$M(x)$满足所有的约束方程和极值必要条件，因而是一个可能的最优设计。当λ在l_1部分或τ在l_2部分不全取非负值时，等强度设计不满足极值条件。在此情形下可用如下方法求问题的最优解。

2. 迭代法求最优设计

在由等强度解所算得的拉格朗日乘子λ和τ不全满足非负条件(3.2)和(3.3)式时，由前

节的论证知等强度设计不可能是最优设计，或者说对问题的最优解而言，梁内必定有既非满应力又不取最小允许极限弹性矩M_m的部分存在，即最优梁的l_3部分非空。数学上很明显，梁内不满足极值条件(3.2)和(3.3)的部分在寻求最优解的下一步迭代中应作为l_3考虑，而梁的其余部分仍应按求等强度设计方式处理。这样从λ和τ的计算结果出发可以得到一个改进设计$M^{(1)}$，其方法如下：以$l_3^{(1)}$表等强度梁内使λ和τ取负值的部分，按上述分析和前节论证，在梁的$l_3^{(1)}$部份$M^{(1)}$的表达式应由(2.17)给出，而在梁的其余部分$M^{(1)}$应取内弯矩的绝对值和M_m中的较大者，因而它又可分为由内弯矩决定的$l_1^{(1)}$和等于M_m的$l_2^{(1)}$两部分。此外为保证在迭代过程中所得的每一中间设计都是满足约束的可行设计，在$l_3^{(1)}$部分还应将由(2.17)式算得的弯矩值与内弯矩的绝对值和M_m作比较，取最大者为$M^{(1)}$。上述思想用数学公式表达为

$$M^{(1)}(x)=\begin{cases}|FR^{(1)}+G| & (x\in l_1^{(1)})\\ M_m & (x\in l_2^{(1)})\\ \max\left\{\left[\dfrac{\beta}{\delta}\mu F(FR^{(1)}+G)\right]^{\frac{1}{\beta+\delta}},\ |FR^{(1)}+G|,\ M_m\right\} & (x\in l_3^{(1)})\end{cases} \tag{3.4}$$

上式中$R^{(1)}$是与$M^{(1)}(x)$相应的多余力，应指出的是$R^{(1)}$的值以及$l_1^{(1)}$和$l_2^{(1)}$的划分是通过将(3.4)表出的$M^{(1)}(x)$代入(2.4)和(2.9)并对(2.9)进行数值求解得到。

至此，我们从等强度设计出发得到第一次迭代解$M^{(1)}(x)$和$R^{(1)}$，以后的迭代基本重复上述过程：将$M^{(1)}$，$R^{(1)}$代入(3.1)～(3.3)得到新的$\mu^{(1)}$，$\lambda^{(1)}$和$\tau^{(1)}$；使$\lambda^{(1)}$，$\tau^{(1)}$取负值的部分应计入$l_3^{(2)}$中，但由于对应设计$M^{(1)}$梁现在划分为三个部分，所以在$l_3^{(2)}$中还应包括在$l_3^{(1)}$中$M^{(1)}(x)$的值由表达式(2.17)决定的部分．这样我们建立了下一个迭代解$M^{(2)}(x)$的表达式，它有(3.4)的形式，只须将所有的上标“1”换成“2”并将μ换成$\mu^{(1)}$。应用$M^{(2)}(x)$的表达式对(2.9)进行数值求解，可得第二次迭代解$M^{(2)}(x)$，$R^{(2)}$以及关联的$l_1^{(2)}$和$l_2^{(2)}$。如此迭代循环，当$R^{(n)}\to R^*$，$\mu^{(n)}\to\mu^*$收敛时可保证$M^{(n)}(x)$收敛，且其收敛解$M^*(x)$满足所有约束和极值必要条件，因而是一个可能的最优设计。

四、算　　例

在按前节建立的方法进行迭代求解时我们将采用离散化的数值解法，即将梁等分为N段，把一维连续变量x的已知或未知函数$F(x)$，$G(x)$，$M(x)$，$S(x)$，$\varphi(x)$，$\lambda(x)$，$\tau(x)$等用在分点上的函数值代替；迭代中所有的积分用被积函数在分点上的值通过数值积分法得到；连续变量x的极值关系式(3.2)和(3.3)用分点上的极值关系式近似。在N充分大时离散化引起的误差可以忽略。在下面的例子中所有物理量都已经过无量纲化后用无量纲值表出。所举两例均在$IBM\ \ PC$微机上用FORTRAN语言计算，计算时间分别是1分10秒和45分25秒。

例1　长$l=1$的外伸连续梁受集中力$P=1$和线性分布载荷

$$q(x)=3\times0.8^{-1}(x-0.2)\qquad(x\geqslant0.2)$$

的作用．梁的受载情况，约束反力和几何尺寸见图1。采用固定宽度，可变高度的矩形截面，取最小容许极限弹性矩$\dot{M}_m=0.01$，取价值函数为单位长梁的重量。由表

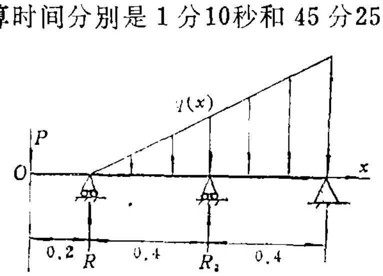

图 1

1知$\beta=1.5$，$\delta=0.5$，梁内弯矩为

$$m(x)=-x+R(x-0.2)\{x-0.2\}^o$$
$$-\frac{5}{8}(x-0.2)^3\{x-0.2\}^o+R_2(x-0.6)\{x-0.6\}^o \tag{4.1}$$

式中使用了形为$\{x-a\}^o$的Heaviside函数，定义为

$$\{x-a\}^o=\begin{cases}0 & (x<a)\\ 1 & (x\geqslant a)\end{cases}$$

由$m(1)=0$的边界条件解得$R_2=3.3-2R$，代入(4.1)式可得

$$m(x)=F(x)R+G(x) \tag{4.2}$$

式中
$$F(x)=(x-0.2)\{x-0.2\}^o-2(x-0.6)\{x-0.6\}^o$$
$$G(x)=3.3(x-0.6)\{x-0.6\}^o-\frac{5}{8}(x-0.2)^3\{x-0.2\}^o-x \tag{4.3}$$

应用文[2]中的等强度设计法，将梁等分为100段，对本问题可求得等强度解为

$$M(x)=\begin{cases}0.01 & (0\leqslant x\leqslant 0.01,\ 0.59\leqslant x\leqslant 0.64,\ 0.98\leqslant x\leqslant 1)\\ F(x)R+G(x) & (0.01<x<0.59,\ 0.64<x<0.98)\end{cases} \tag{4.4}$$

式中$R=1.583$，F，G由(4.3)式给出．对应等强度解的结构重量$\Phi=0.2401$．由(3.1)算得$\mu=-2.369\times10^{-3}$，代入(3.2)和(3.3)算得所有$\lambda(x)$，$\tau(x)$在分点上的值都大于或等于零，因此本问题的等强度设计是最优设计．$M(x)$的分布形式示于图2．

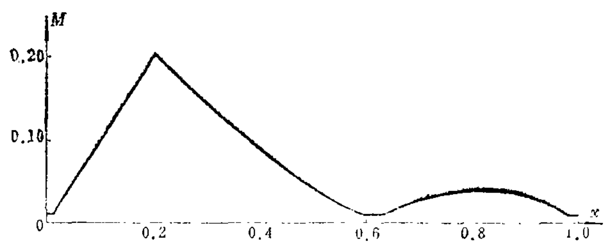

图 2

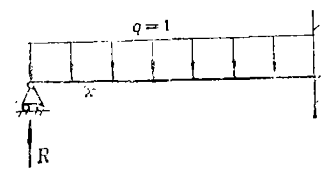

图 3

例2 长$l=1$，一端简支一端固定梁．外载为密度$q=1$的均布载荷(图3)．采用固定宽度，高度可变的矩形截面，$M_m=0.02$，取价值函数$\varphi=M^2$，如此$\beta=1.5$，$\delta=2$．以简支端支座反力R为多余力，梁内弯矩为

$$m(x)=xR-x^2/2 \tag{4.5}$$

将梁分成500等分进行数值计算得等强度设计为

$$M(x)=\begin{cases}0.02 & (0\leqslant x\leqslant 0.066,\ 0.596\leqslant x\leqslant 0.718)\\ |0.3312x-0.5x^2| & (0.066<x<0.596,\ 0.718<x\leqslant 1)\end{cases} \tag{4.6}$$

相应的结构总价值$\Phi=3.815\times10^{-3}$．由(3.2)和(3.3)求得的乘子λ和τ在$0.038\leqslant x\leqslant 0.66$区域内取负值，因此该等强度设计不是最优设计．应用前节的迭代方法，从设计(4.6)出发，经过8次迭代得到满足极值条件(3.2)和(3.3)的最优解为

$$M^*(x)=\begin{cases}0.02 & (0\leqslant x<0.060,\ 0.712<x\leqslant 0.768)\\ |0.3591x-0.5x^2| & (0.060\leqslant x\leqslant 0.536,\ 0.768<x\leqslant 1)\\ [0.000975x^2(0.3591-0.5x)]^{\frac{1}{3}} & (0.536<x\leqslant 0.712)\end{cases} \tag{4.7}$$

相应的结构总价值$\Phi^*=3.387\times10^{-3}$，与等强度设计的总价值相比，最优解得到的梁的总价

表 3 例 2 最优解的收敛过程

迭代次数	R	μ	Φ
0（等强度解）	0.3312	3.718×10^{-3}	3.815×10^{-3}
1	0.3645	1.179×10^{-3}	3.654×10^{-3}
2	0.3573	1.389×10^{-3}	3.389×10^{-3}
3	0.3601	1.252×10^{-3}	3.387×10^{-3}
4	0.3584	1.350×10^{-3}	3.387×10^{-3}
5	0.3597	1.319×10^{-3}	3.387×10^{-3}
6	0.3593	1.308×10^{-3}	3.387×10^{-3}
7	0.3591	1.302×10^{-3}	3.387×10^{-3}
8	0.3591	1.300×10^{-3}	3.387×10^{-3}

值减少为 11.2%。R，μ 和 Φ 的迭代收敛过程列于表 3，等强度解(4.6)和最优解(4.7)的比较画于图4。

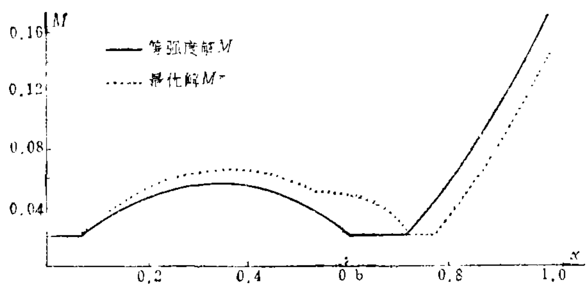

图 4

参考文献

[1] 唐燮黎、叶开沅，静不定梁的等强度设计，应用数学和力学，6，12（1985），1053—1060.

[2] 叶开沅、唐燮黎，具有非零最小弯曲刚度梁在多载荷情况作用下的等强度设计，应用数学和力学（待发表）.

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》（上册），科学出版社（1980）.

[4] Rozvany, G. I. N., *Optimal Design of Flexural Systems* (1976).

Optimal Elastic Design of Beams

Tang Xie-li

(Hehai University, Nanjing)

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

According to the principle of minimum complementary energy a mathematical statement of optimal strength design problem for elastic beams is formulated in this research, which is an extremum problem of functionals with equality and inequality constraints. Further the application of the Lagragian multiplier method yields the necessary conditions for extrema. A set of relations that must be satisfied for the optimal solution follows afterwards. This set of relations can be used to verify the optimality of a uniform strength design or any feasible elastic design. An iterative numerical method to find the optimal solution when the uniform strength design is not optimal is also presented in this paper.