应用数学和力学，第8卷第5期（1987年5月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

Boltzmann方程的精确解*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1986年3月13日收到）

摘 要

本文建立了非线性Boltzmann输运方程与线性AKNS方程之间的直接联系，从而以不同于Chapman，Enskog和Grad的方式，使Boltzmann方程化归为Dirac方程的求解。在没有其他外场作用的情形中，Boltzmann方程的精确解可以用逆散射方法来求得。

一、前 言

AKNS方程[1~2]是逆散射换变理论[3~5]中的基本方程。原始意义上的AKNS方程，由于其本征值是二元旋量，因而它实际上是二元Dirac方程[6~10]。这种原始意义上的AKNS方程，统一或归纳了经典流体动力学，等离子体动力学，基本粒子物理学，非线性光学，固体物理学，晶格力学和工程学中的一些非线性弥散问题。文[11]将这种原始意义上的AKSN方程延拓成四元旋量方程，用以解决非线性弹性力学中的大挠度问题。这样的四元旋量AKNS方程，实际上是四元Dirac方程。本文将四元Dirac方程的应用范围扩大到非均匀气体的粘性、热传导和扩散问题中去，建立了非均匀气体的Boltzmann方程与四元旋量AKNS方程即四元Dirac方程的直接联系，从而将非线性Boltzann方程的精确解问题，化成线性Dirac方程（AKNS方程）的逆散射（通解）问题。

L．Boltzmann是被H．Haken[12]称为“上一世纪出现的两个伟人”之一（另一位是生物学家Ch．Darwin）。非线性Boltzmann输运方程，或Boltzmann微分-积分方程（L．Boltzmann，1872）[13]，在流体动力学中具有举足轻重的地位[14]。它甚至可以提供流体动力学方程组（例如Navier-Stokes方程或其推广[15]）的理论依据。早在1879年，J．C．Maxwell就证明了，在温度不均匀的甚稀薄静止气体中，还存在着另外一些应力，它们在Mavier-Stokes方程中尚未计入[16]。由于这一缘故，许多流体力学的经典著作[14]，都要在进入正文之前，讲一讲Boltzmann方程和它的解。Boltzmann方程在气体分子运动论[17~22]，经典非平衡态统计热力学[23~24]，以及等离子体物理学和固体物理学[25]中也起看头等重要的作用。对于Boltzmann方程的求解，从来就是力学理论工作者的本职工作。

Boltzmann方程的基本思想，最先是由Maxwell(1866)[16]提出来的，而后由Boltzmann加以公式化的[26~27]。为了强调Maxwell的先导工作，D．Hilbert[28]曾将此方程称之为Maxwell-Boltzmann方程。Boltzmann方程在用之于稀薄气体时，是相当精确的[23]。这说

* 钱伟长推荐。

明了该方程在某种程度上反映了客观真理。但是，Boltzmann 方程的适用范围仅此而已。到目前为止，对 Boltzmann 方程所作的任何不适当的推广，均以失败而告终[23]。此外，按照标准的统计力学观点，由于 Boltzmann 方程不可能描述"涨落"[20]，因此它实际上被排斥在统计力学经典理论之外。近代统计力学中，起主导作用的方程是 Liouville方程[17~24,29]，而 Boltzmann 方程只在其中扮演着不十分显眼的小角色。对 Boltzmann 方程的这种不公正态度，使得一些忿忿不平的作者[16]，坚决拥戴 Boltzmann 方程举行"起义"，要它从统计力学王国中独立出来自成体系，并认为"对于这一点是无需多加解释的"。

Boltzmann 方程的解，最早系由 S. Chapman 和 D. Enskog 在大约一年时间里（1916～1917）各自独立地求得的[16]。Chapman 和 Enskng 的方法[20]，是不直接求解 Boltzmann 方程，而是将分布函数视为宏观分子数密度、宏观平均速度和宏观温度等可观测量的函数，而宏观分子数密度、宏观平均速度和宏观温度等可观测量，则由流体动力学方程组求得。流体动力学方程组是三维坐标空间的微分方程，比较六维 μ 空间的 Boltzmann 微分-积分方程来说，是简单了一些。其中，Chapman 的理论体系偏于直观，而不太注意系统性和演绎性。反之，Enskog 的论述则更注重于数学形式和风格。他们所用的方法，无论是思路还是细节，都不大相同；可是给出的结果却完全一样。

后起之秀 H. Grad(1949)[30]发现了一种全新的解 Boltzmann 方程的方法。他的结果适用于象激波内部那样的条件，即几率分布函数随空间和时间作迅速变化的情况。在 Grad 的理论中，热通矢量和应力张量，与其他的未知量如压强、密度、温度和速度等，处于同等地位。Grad 的方法最接近于 Enskog 的方法，两者的主要差别在于对时间导数的讨论。Grad 的解较之 Enskog解，具有更为普遍的形式。钱学森[14]认为，Grad 的理论在稀属气体动力学中有着特别重要的应用。

此外，Grad[31~32]，Kihara[33]，Waldmann[34]，Balescu[35] 及 Hirschfelder，Curtiss 和 Bird[36]，Cercignani[37~40]等人[41~43] 在解 Boltzmann 方程方面也作了许多工作。但这些论文和专著都没有文[16, 30]出名，因为方法是老的。

所有以上这些解法，都是 Boltzmann 方程的近似解。由于数学上的困难，早在上一世纪 L. Boltzmann 就说过[16]，人们几乎应该对求出这个方程的一般解放弃希望。

现在我们知道，在非线性方程中，以现有的力量，只有很少一些方程（例如 Butgers 方程及其推广[4]）才能凭借数学变换求得其通解。大部分非线性方程到目前为止还只能求得其精确特解。Boltzmann 方程是一个非线性的微分-积分方程；我们稍加思索，就可以发现它还是比较整齐的。因此，我们完全有可能利用先进的数学方法求得其精确解。这里所指的先进数学方法，就是开头所提到的逆散射变换理论。

为了利用逆散射变换理论求得 Boltzmann 方程的精确解，首先必须建立非线性 Boltzmann 方程与线性 Dirac 方程之间的联系。四元旋量的 AKNS 方程，正如所说，就是四元 Dirac 方程。本文的主要工作和目的，就是建立它们之间的联系。

Dirac 方程是有着广泛适用范围的重要方程。它是自然界中为数不多的基本方程之一。本文将非线性 Boltzmann 方程纳入 Dirac 方程的范畴，不仅使非线性问题变得易于解决，而且使自然界显得更加和谐和协同[44]，使描述自然现象的语言变得更加简单和归一。因此，本文所提供的方法，不仅有方法论上的意义，而且具有哲学上的意义。

在利用逆散射变换理论求解 Boltzmann 方程之前，还要注意使用这种理论的先决条件，即几率分布函数在远处必须急剧减少或满足周期性边界条件[3~5]。前者对我们所要研究的问

题来说是十分显然的，因而总能满足。（顺便提一句，在利用逆散射变换理论来求解非线性大挠度问题 von Kármán 方程[11,45~47]的时候，也有同样的问题。这时候使用这种理论的先决条件也可以满足或可以设法满足。）

需要注意的是，由于利用逆散射变换理论求解 Boltzmann 方程所能得到的解是精确解而不是通解，因而当我们建立非线性 Boltzmann 方程与线性 Dirac 方程（AKNS方程）的联系时，用不着要求每前进一步都必须是充分必要的，而只要求后面得到的方程是前面方程的充分条件即可。当然，精确解在"精确"的程度上是有差别的。这就要求人们在演绎过程中把握充分条件的分寸。为了提高解的精确性，我们应当尽量少略去一些因素并尽可能晚些时候将初、边值条件代入方程。但是，仍有一些因素为了方便起见被略去是不可避免的。在本文中，为方便起见我们采用所谓"Maxwell 假设"，即散射截面与分子相对动量无关的假设[20]。按照这一假设，一些次要因素被忽略了。Maxwell 在计算分子间相互作用力正比于 r^{-5}（r 为分子间距离）情况下的几率分布函数时，曾经用到过这个假设[48~50]。Maxwell 假设实际上是 Boltzmann 方程的一个最简单的附加条件。没有这样那样的附加条件，Boltzmann 方程是无法求解的。

类似的逆散射方法，可以同样用来求解等离子体物理学中的 Vlasov 方程[20]。该Vlasov 方程实际上是稠密气体理论中的 BBGKY 方程（Bogoliubov[51]-Born-Green[50,52]-Kirkwood[53]-Yvon[54]方程）的特例。有关这一问题的论述与本文大同小异，不再赘述。

本文中凡重复愧标，按 Einstein 约定求和。

二、Boltgmann方程与非线性Schrödiner方程的关系

Boltzmann 方程所描述的物理事件处于六维 μ 空间之中。一般的六维 μ 空间，指的是三维坐标空间和三维速度空间的直和[20]。但更方便的是六维正则 μ 空间，它是三维坐标空间和三维动量空间的直和。按文[19]。我们将 Boltzmann 方程写成

$$\frac{df}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{Coll.}} \tag{2.1}$$

式中

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{x}^k\frac{\partial f}{\partial x^k}+\dot{p}^k\frac{\partial f}{\partial p^k}\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{m}p^k\frac{\partial f}{\partial x^k}+F^k\frac{\partial f}{\partial p^k}\qquad(k=1,\ 2,\ 3)\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{Coll}}=\iint\sigma d\Omega(f'f_1'-ff_1)|g|d^3p_1 \tag{2.3}$$

g 为相对动量

$$g=p-p_1,\qquad |g|=\sqrt{(p^k-p_1^k)^2} \tag{2.4}$$

而 $\sigma=\sigma(|g|,\ \theta)$ 为散射截面，θ 为 g 的折射角，$d\Omega$为立体角元，m 为分子质量，p^k为动量分量，F^k 为外场力分量。此时外场力不仅包括外界的约束力，而且包括分子之间的相互作用力[16]。同时，f 为几率分布函数，且

$$\left.\begin{aligned}f&=f(p^k),\qquad &f_1&=f(p_1^k)\\f'&=f(p^k),\qquad &f_1'&=f(p_1^k)\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中p^k，p_1^k 为散射前的动量分量，而 p^k，p_1^k 为散射后的动量分量($k=1, 2, 3$)。

Boltzmann 方程（2.1）式是不可逆的方程。当进行 $t\to -t$ 的操作时，$p^k\to -p^k$，$F^k\to F^k$，此时方程(2.1)式的等号左端改变符号，而右端符号不变。

散射项(2.3)式的原始表达式由于 Jacobian $\frac{\partial(p^k,p_1^k)}{\partial(p^k,p_1^k)}=1$ 而可写为[20]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{Coll.}}=f'\int\sigma d\Omega\int f_1'|g|d^3p_1-f\int\sigma d\Omega\int f_1|g|d^3p_1 \tag{2.6}$$

即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{Coll.}}=\mathrm{Re}[-(f-if')\int\sigma d\Omega\int(f_1-if_1')|g|d^3p_1] \tag{2.7}$$

式中Re 表示取实部。

我们设

$$\psi=\frac{1}{2}(f-if'),\qquad \psi_1=\frac{1}{2}(f_1-if_1') \tag{2.8}$$

式中f，f_1，f' 和 f_1' 的自变量除 t，x^k 外，还分别有 p^k，p_1^k，p^k 和 p_1^k，而 ψ 和 ψ_1 的自变量除 t，x^k 外，还分别有 p^k 和 p_1^k。(2.8)式中自变量之间的变换关系，一如Boltzmann方程原式。这时，方程(2.1)式可以写为

$$\mathrm{Re}\ \frac{d\psi}{dt}=2\mathrm{Re}[-\psi\int\sigma d\Omega\int\psi_1|g|d^3p_1] \tag{2.9}$$

方程(2.9)式要成立的充分条件（可以证明，实际上是充分必要条件）是

$$\frac{d\psi}{dt}=-2\psi\int\sigma d\Omega\int\psi_1|g|d^3p_1 \tag{2.10}$$

即

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\dot{x}^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+\dot{p}^k\frac{2\psi}{\partial p^k}=-2\psi\int\sigma d\Omega\int\psi_1|g|d^3p_1\qquad(k=1, 2, 3) \tag{2.11}$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{m}p^k\frac{\partial\psi}{\partial x}+F^k\frac{\partial\psi}{\partial p^k}=-2\psi\int\sigma d\Omega\int\psi_1|g|d^3p_1\qquad(k=1, 2, 3) \tag{2.12}$$

我们引入积分算子$\hat{J}$

$$\hat{J}=-i\int\sigma d\Omega\int d^3p_1|g| \tag{2.13}$$

注意，积分算子 $\hat{J}$ 是复的。由于(2.13)式，可将Boltzmann方程(2.11)式和(2.12)式简记为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\dot{x}^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+\dot{p}^k\frac{\partial\psi}{\partial p^k}=-2i\psi(\hat{J}\psi) \tag{2.14}$$

和

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{m}p^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}+F^k\frac{\partial\psi}{\partial p^k}=-2i\psi(\hat{J}\psi) \tag{2.15}$$

式中

$$\hat{J}\psi=-i\int\sigma d\Omega\int\psi_1|g|d^3p_1 \tag{2.16}$$

另外，我们记

$$\hat{L}=-i\dot{x}^k\frac{\partial}{\partial x^k}-i\dot{p}^k\frac{\partial}{\partial p^k}+2\nu \tag{2.17}$$

$$\nu=\hat{J}\psi$$

则可以将 Boltzmann 方程(2.11)式写成 Schrödinger 方程的形式：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{L}\psi \tag{2.18}$$

可以证明，方程(2.18)式不仅具有 Schrödinger 方程的形式，而且其中的 $\hat{L}$ 算子与 Schrödinger 方程中的能量算子一样是 Hermitian 算子。为此，我们采用符号

$$l_{mn}=\int\bar{G}_m(\hat{L}G_n)dpdx \tag{2.19}$$

式中 G_m 与 G_n 是 p 和 x 的任意函数。它们对相空间是可积的；$\bar{G}_m$ 为 G_m 的复共轭。而 Hermitian 性的条件为

$$l_{mn}=\bar{l}_{nm} \tag{2.20}$$

(2.20)式意味着对角元素 l_{mn} 均为实数。这个证明是直截了当的。通过分部积分，并且联想到 G_m 与 G_n 在边界上等于 0，接着就得出

$$\begin{aligned}l_{mn}&=\int\bar{G}_m(\hat{L}G_n)dpdx\\&=i\int\bar{G}_m\left[-\dot{x}^k\frac{\partial}{\partial x^k}-\dot{p}^k\frac{\partial}{\partial p^k}-2i\nu\right]G_ndpdx\\&=-i\int G_n\left[-\dot{x}^k\frac{\partial}{\partial x^k}-\dot{p}^k\frac{\partial}{\partial p^k}-2i\nu\right]\bar{G}_mdpdx=\bar{l}_{nm}\end{aligned} \tag{2.21}$$

从而，Boltzmann 方程(2.14)式或(2.15)式可以成为标准的非线性 Schrödinger 方程。但要注意，方程(2.18)式的归一性与量子力学中 Schrödinger 方程的归一性不同。在 Boltzmann 方程中

$$\int fd^3p=n(x^k,\ t) \tag{2.22}$$

$$\int n(x^k,\ t)d^3x=N \tag{2.23}$$

式中 n 为 t 时刻 x^k ($k=1,\ 2,\ 3$) 点每单位体积内分子数，N 为气体的总分子数。因而，方程(2.18)式的归一性成为

$$\int(\psi+\bar{\psi})d^3pd^3x=N \tag{2.24}$$

由于(2.18)式中的散射势函数为

$$\nu=\hat{J}\psi \tag{2.25}$$

因此方程(2.18)式是非线性 Schrödinger 方程的形式。

三、Boltzmann 方程的散射势

在 Maxwell 假设条件下，Boltzmann 方程(2.18)式的散射势

$$\nu=\hat{J}\psi \tag{3.1}$$

可以还原为方程

$$\nabla_p^4\nu=A\psi \tag{3.2}$$

式中 A 为任意常数，而

$$\nabla_p=\left(\frac{\partial}{\partial p^1},\ \frac{\partial}{\partial p^2},\ \frac{\partial}{\partial p^3}\right) \tag{3.3}$$

方程(3.2)式是由经典数理方程得到的。在经典数理方程中[55]，n 维 m 重调和方程

$$\Delta^m u=0 \tag{3.4}$$

的基本解为

$$v(x^k,\ x_1^k)=\begin{cases} cr^{2m-n}\ln r & (2m\geqslant n,\ n\text{ 为偶数}) \\ cr^{2m-n} & (\text{其余情况}) \end{cases} \tag{3.5}$$

式中

$$r=\sqrt{(x^k-x_1^k)^2} \tag{3.6}$$

从而，n 维 m 重 Poisson 方程

$$\Delta^m u=w \tag{3.7}$$

在(3.5)式中第二种情况下的特解为

$$u=c\int w(x_1^k)r^{2m-n}d^3x_1 \tag{3.8}$$

将方程(3.8)式与方程(3.1)式对照，现在我们的问题中

$$n=3,\qquad m=2 \tag{3.9}$$

而

$$x^k\to p^k\qquad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{3.10}$$

因此可以直接由(3.7)式推出(3.2)式。

四、Boltzmann 方程的 Schrödinger 表象

由于 Boltzmann 方程(2.1)式在(2.8)式的变换下可以写成 Schrödinger 方程(2.18)式的形式，因此它完全可以化为本征值问题。Schrödinger 表象的本征函数一般可以写为

$$\psi=\exp[i(p^kx^k-Et)]\qquad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{4.1}$$

如果对(4.1)式等号左右两端同时作用算子$\left(-i\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)$，则有

$$-i\frac{\partial}{\partial x^k}\psi=p^k\psi$$

从而在 Schrödinger 坐标表象中，成立下列等式

$$\hat{p}^k=-i\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{4.2a}$$

此外，由量子力学的动量表象[56]可知

$$\hat{x}^k=i\frac{\partial}{\partial p^k} \tag{4.2b}$$

现在，我们回过头来重新研究方程(2.18)式。我们注意到方程(2.18)式的自变量除时间 t 外是共轭力学量 x^k 和 p^k $(k=1,\ 2,\ 3)$。其次，由于 f 从而 ψ 表示几率分布函数，利用它们可以算出其他的力学量，因而也可以将它们理解为算子。综合上述两条理由，我们可以认为，方程(2.18)式尽管具有 Schrödinger 方程的形式，但都可同时理解为 Heisenberg 表象的算子方程。

将 Heisenberg 表象的算子方程化为 Schrödinger 表象的本征方程，可以利用等式(4.21)式。为了谨慎起见，我们采用现成的方法[56]进行演绎。

我们将方程(2.12)式同时乘上 Hilbert 空间中的态矢：左矢$(bra)\langle\alpha_h|$和右矢$(ket)|\beta_h\rangle$，并将方程(2.18)式中的ψ改记为ψ^h，ψ_1改记为ψ_1^h；角标h表示 Heisenberg 表象。其中$\langle|$和$|\rangle$为 Dirac 符号[7]。这时有矩阵元方程

$$\langle\alpha_h|i\frac{\partial\psi^h}{\partial t}|\beta_h\rangle+\langle\alpha_h|\left(i\frac{1}{m}p^k\frac{\partial}{\partial x^k}+iF^k\frac{\partial}{\partial p^k}\right)\psi^h|\beta_h\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_h|\psi^h\int\sigma d\Omega\int\psi_1^h|g|d^3p_1|\beta_h\rangle \tag{4.3}$$

令

$$\psi^h=\exp[iHt]\psi^s\exp[-iHt] \tag{4.4}$$
$$|\alpha_h\rangle=|\alpha_s(0)\rangle=\exp[iHt]|\alpha_s(t)\rangle \tag{4.5}$$

式中H为总 Hamilton 量，角标s表示 Schrödinger 表象；H中不显含时间t，且对确定的ψ来说，H是确定的。

将(4.4)式和(4.5)式代入方程(4.3)式，其等号右端成为

$$-2i\langle\alpha_h|\psi^h\int\sigma d\Omega\int\psi_1^h|g|d^3p_1|\beta_h\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt]\psi^s\exp[-iHt]\int\sigma d\Omega$$
$$\cdot\int\exp[iH_1t]\psi_1^s\exp[-iH_1t]|g|d^3p_1|\beta_s(0)\rangle \tag{4.6}$$

式中$p_1^k(k=1,2,3)$这时将只有参量的意义；而

$$\begin{aligned}H&=H(x^k,\ -i\partial^k)\\ H_1&=H(x_1^k,\ -i\partial_1^k)\end{aligned} \tag{4.7}$$

由于能量守恒，有

$$H_1=H \tag{4.8}$$

因而

$$-2i\langle\alpha_h|\psi^h\int\sigma d\Omega\int\psi_1^h|g|d^3p_1|\beta_h\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt]\psi^s\exp[-iHt]\int\sigma d\Omega$$
$$\cdot\int\exp[iHt]\psi_1^s\exp[-iHt]|g|d^3p_1|\beta_s(0)\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s(0)|(\exp[iHt]\psi^s\exp[-iHt])(\exp[iHt]\int\sigma d\Omega$$
$$\cdot\int\psi_1^s|g|d^3p_1\exp[-iHt])|\beta_s(0)\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt][\psi^s\int\sigma d\Omega\int\psi_1^s|g|d^3p_1]\exp[-iHt]|\beta_s(0)\rangle \tag{4.9}$$

从而(4.3)式成为

$$\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt]i\frac{\partial\psi^s}{\partial t}\exp[-iHt]|\beta_s(0)\rangle$$
$$+\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt]\left(i\frac{1}{m}p^k\frac{\partial}{\partial x^k}+iF^k\frac{\partial}{\partial p^k}\right)\psi^s\exp[-iHt]|\beta_s(0)\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt][\psi^s\int\sigma d\Omega\int\psi_1^s|g|d^3p_1]\exp[-iHt]|\beta_s(0)\rangle \tag{4.10}$$

因为：

$$\left.\begin{aligned}&|\alpha_s(t)\rangle=\exp[-iHt]|\alpha_s(0)\rangle\\&\langle\alpha_s(t)|=\langle\alpha_s(0)|\exp[iHt]\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

并计及(4.2)式，故可将(4.10)式写成

$$\langle\alpha_s|\,i\frac{\partial\psi^s}{\partial t}\,|\beta_s\rangle+\langle\alpha_s|\left(\frac{1}{m}\nabla^2-2V\right)\psi^s|\beta_s\rangle$$
$$=-2i\langle\alpha_s|\,\psi^s\int\sigma d\Omega\int\psi_1^s|g|d^3p_1|\beta_s\rangle\tag{4.12}$$

式中 V 为 Clausius Virial[57~58]

$$V=-\frac{1}{2}F^kx^k\qquad(k=1,\ 2,\ 3)\tag{4.13}$$

这一点，是与量子力学有所不同的。

由于等式(4.12)式对所有的$\langle\alpha_s|$和$|\beta_s\rangle$都成立，故有

$$i\frac{\partial\psi^s}{\partial t}=\left(-\frac{1}{m}\nabla^2+2V\right)\psi^s-2i\psi^s\int\sigma d\Omega\int\psi_1^s|g|d^3p_1\tag{4.14}$$

略去角标 s，并仍沿用积分算子(2.13)式；算子中的 p_1^k ($k=1,\ 2,\ 3$) 仅仅表示参数。我们有

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{1}{m}\nabla^2+2V\right)\psi+2\psi(\hat{J}\psi)\tag{4.15}$$

至此，我们已将 Boltzmann 方程(2.1)式完全化成为非线性 Schrödinger 方程。演绎的全过程都是充分必要的。我们这里得到的非线性 Schrödinger 方程(4.15)式与量子力学中的非线性 Schrödinger 方程只在两处有所区别：其一是归一化条件只满足(2.24)式，而不是 $\int\bar{\psi}\psi d\tau=1$；其二是方程中出现了外场的 Clausius Virial，而不是外场势函数，即气体分子的能量和动量的关系变得复杂起来。

另外要注意的是，方程(4.15)式中，由于算子 $\hat{J}$ 是复的。故而该方程仍然是不可逆的。方程(4.15)式相当于复能量的 Schrödinger 方程[56]。这种复能量的 Schrödinger 方程，也是一种不可逆的方程。

下面，我们将由此求出 Boltzmann 方程的精确解，为了方便起见，我们暂时假设分子所受到的外力为 0，因而 Virial $V=0$。

五、Boltzmann 方程的精确解

设分子质量 $m=1$，并暂时略去外场 Virial，这时 Boltzmann 方程(2.1)式等价于

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla^2\psi-2\psi(J\psi)=0\tag{5.1}$$

式中省去了算子 $\hat{J}$ 上的 ∧ 号。

将方程(5.1)式等号左右两端同时作用算子 J，我们有

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}J+\nabla^2J-2(J\psi)J\right]\psi=0\tag{5.2}$$

注意，第二次作用算子 J 于 ψ 上时，$|g|=\sqrt{(p_2^k-p^k)^2}$。

取(5.2)式的复共轭，我们又有

$$\left[t\frac{\partial}{\partial t}\bar{J}-\nabla^2\bar{J}+2(\bar{J}\bar{\psi})\bar{J}\right]\bar{\psi}=0 \tag{5.3}$$

现在，我们可以将方程(5.1)式和(5.3)式写成如下形式：

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+\nabla^2 q-2qrq=0 \tag{5.4a}$$

$$i\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}-\nabla^2\bar{r}+2\bar{r}\bar{g}\bar{r}=0 \tag{5.4b}$$

式中

$$q=\psi; \qquad r=J \tag{5.5}$$

方程(5.4a)式和(5.4b)式之间遵循如下规则：将方程(5.4a)式中的 q 与 r 互换，然后对整个方程取复共轭，即得(5.4b)式。反之亦然。

方程(5.4)式与 AKNS 方程（Dirac 方程）的可积性条件十分吻合。AKNS 方程系指方程（线性方程）

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}=\hat{N}\phi\ (\text{时间发展方程})\ ;\ \hat{M}\phi=\zeta\gamma_4\phi\ (\text{本征值方程}) \tag{5.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\hat{M}=\begin{bmatrix} i\sigma_k\partial_k & -iu \\ -iv & i\sigma_k\partial_k\end{bmatrix} \qquad (k=1,\ 2,\ 3)\\ &\hat{N}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

$\sigma_k(k=1,\ 2,\ 3)$为 Pauli 矩阵，$\gamma_4=\sigma_3\otimes\sigma_4$ 为 Dirac 矩阵，σ_4 为 2×2 单位矩阵，ζ 为本征值且 $\partial\zeta/\partial t=0$。在(5.7)式中，凡不带 σ_k 的项，均约定其已直乘上 2×2 单位矩阵 σ_4。以外，$\otimes$表示直乘（Krönecker 积）。

当取 A、B、C 为

$$\begin{cases} A=2\zeta^2+vu \\ B=2iu\zeta-\sigma_k\partial_k u \qquad (k=1,\ 2,\ 3) \\ C=2iv\zeta+\sigma_k\partial_k v\end{cases} \tag{5.8}$$

时，AKNS 方程(5.6)式的可积性条件为

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla^2 u-2uvu=0 \tag{5.9a}$$

$$i\frac{\partial v}{\partial t}-\nabla^2 v+2vuv=0 \tag{5.9b}$$

在 u、v 为实函数的情况下，方程(5.9a)式中的 u 和 v 经过互换，然后对整个方程取复共轭，即成为(5.9b)式。反之亦然。

只要将 AKNS 方程(5.6)式中的有关函数解析延拓到复平面，换言之，只要将方程(5.6)式中的能量变成复的，(5.9)式就与(5.4)式完全相同。这样，非线性 Boltzmann 微分-积分方程最终可以归结为线性 Dirac 微分-积分方程的求解。

复能量的含义与前面所述一样，它表示线性 Dirac 微分-积分方程仍然是不可逆的。注意，在方程(4.15)式和方程(5.6)式这种不可逆方程中，其耗散系数[59]永远等于 1。

如果在我们所讨论的问题中存在外场力，这时外场力的 Virial，可以通过经典的方法加到方程(5.6)式中去。

Dirac 方程除了在量子电动力学中的正统应用外，在非线性波动理论中，它统一了[4] Kdv 方程，非线性 Schrödinger 方程、Sine-Gordon 方程、Bloch 方程，Lamb 方程和三波相互作用方程。除此之外，Dirac 方程还被用来求解弹性力学中的 Navier-Lamé方程[60~61]，弹性板壳理论中的 Love-Kirchhoff 方程[62,46]和 von Kármán 方程[11,45,47]以及 von Kármán-Vlasov 方程[46]等弥散问题。现在，通过引入复能量的方法，我们又将 Dirac 方程的应用范围扩大到求解气体运动论中的 Boltzmann 方程这类不可逆问题中。Dirac 方程的深刻内涵，正在逐渐被人们所认识。

参 考 文 献

[1] Ablowitz, M., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Letters*, **30** (1973), 1262—1264.

[2] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup., A. C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Letters*, **31** (1973), 125—127.

[3] Eckhaus, W. and A. van Harten, 《逆散射变换和孤立子理论》，黄迅成译，上海科学技术文献出版社 (1984).

[4] 谷内俊弥、西原功修，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社 (1981).

[5] Захаров В. Е., С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, 《孤子理论(逆问题方法)》，彭启才译，科学出版社 (1985).

[6] Dirac, P. A. M., 《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965).

[7] Dirac, P. A. M., 《物理学的方向》，张宜宗、郭应焕译，科学出版社 (1981).

[8] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, vol. 4 (2nd ed.), Quantum Electrodynamics, (ed. by V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii) Trans. from Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell, Pergamon (1982).

[9] Feynman, R. P,. 《量子电动力学讲义》，张邦固译，科学出版社 (1985).

[10] Bjorken, J. D. and S. D. Drell, *Relativistie Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1964); 中译本，《相对论量子力学》，纪哲锐等译，科学出版社 (1984).

[11] 沈惠川，再论弹性大挠度问题 von Kármán 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系，应用数学和力学 (待发表).

[12] Haken, H., 协同学——物理学、化学和生物学中的自组织过程，物理，**14**, 10 (1985), 604—613.

[13] Boltzmann, L., Weitere studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen, wien. Ber., **66** (1872); **81** (1880); **84** (1881).

[14] 钱学森，《气体动力学诸方程》(气体动力学基本原理 A 编，H. W. Emmons 总编)，徐华舫译，科学出版社 (1966).

[15] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, *Наука*, Москова (1970); 中译本，《粘性不可压缩流体动力学的数学问题》，张开明译，上海科学技术出版社 (1985).

[16] Chapman, S. and T. G. Cowling, 《非均匀气体的数学理论》，刘大有、王伯懿译，科学出版社 (1985).

[17] Landau, L, D. and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon, Oxford (1969); 中译本,《统计物理学》, 杨训恺译, 人民教育出版社 (1964).

[18] Landau, L. D. and. E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, vol. 10, Physical Kinematics, (ed. by E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii), Pergamon(1982); 日译本,《物理の運動学》, 井上健男、石橋善弘、柳下崇訳, 東京図書株式会社 (1982).

[19] 湯川秀樹,《理論物理学の基礎》(第二版) vol. 5,《统計物理学》,(户田盛和、久保亮五编), 岩波書店 (1978)

[20] 吴大猷,《理论物理》, 第五册, 热力学、气体运动论及统计力学, 科学出版社 (1983).

[21] ter Haar, D.,《统计力学基础》, 丁厚昌等译, 上海科学技术出版社 (1983).

[22] 王竹溪,《统计物理学导论》, 人民教育出版社 (1956).

[23] Prigogine, I.,《非平衡态统计力学》, 陆全康译, 上海科学技术出版社 (1984).

[24] de Groot, S. R. and P. Mazur,《非平衡态热力学》, 陆全康译, 上海科学技术出版社 (1981).

[25] 程开甲,《固体物理学》, 人民教育出版社 (1959).

[26] Boltzmann, L., Vorlesungen über gastheorie, Leipzig (1896—1898).

[27] Boltzmann, L., *Lectures on Gas Theory*, University of California Press, Berkeley (1964).

[28] Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen*, Teubner (1912), 269.

[29] Зубарев Д. Н.,《非平衡统计热力学》, 李沅柏、郑哲洙译, 高等教育出版社 (1982).

[30] Grad, H., On the kinetic theory of rarefied gases, *Commum. on Pure and Appl. Math*. **2** (1949), 331—407.

[31] Grad, H., Solution of the Boltzmann equation in an unbounded domain, *Commum. on Pure and Appl. Math.*, **18** (1965), 345—354.

[32] Grad, H., Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equation, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. on Appl. Math.*, **17**, AMS, Providence. R. I. (1965), 154—183.

[33] Kihara, T., *Imperfect Gases*, Asakura Bookstore, Tokyo, (1949), English translation by U. S. Office of Air Research, Wright-Patterson Air Base.

[34] Waldmann, L., *Proc. Int. Seminar on Transport Properties of Gases*, Brown univ. Providence. R. I. (1964).

[35] Balescu, R., *Statistical mechanics of Charged Particles*, Interscience, New York, to appear (1962).

[36] Hirschfelder, J. O., C. F. Curtiss. and R. B. Bird, *The Molecular Theory of Gases and Liquids*, with the assistance of the staff of the Univ. of Wisconsin Naval Research Laboratory, Wiley, New York (1954).

[37] Cercignani, C., (ed.) *Kinetic Theories and the Boltzmann Equation*, Springer-Verlag (1981)

[38] Cercignani, C., *Theory and Applications of the Boltzmann Equation*, Scottish Acad. Press, Edinburgh (1975).

[39] Cercignani, C., *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum (1969).

[40] Cercignani, C., Solution of the Boltzmann equation, *The Boltzmann Equation*, Ch. 4. Studies in Statistical Mechanics, vol. 10, (ed. by E. W. Montroll and J. L. Lebowitz.) North-Holland (1983).

[41] Ernst, M. H., Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation and related kinetic equations, *The Boltzmann Equation*, Ch. 3, Studies in Statistical Mechanics, vol. 10, (ed. by E. W. Montroll and J. L. Lebowitz), North-Holland (1983).

[42] Goodman, F. D., and H. Y. Wachman, *Dynamics of Gas-Surface Scattering*, Acad. Press (1976).

[43] Lebowitz, J. L. and E. W. Montroll, Nonequilibrium phenomena I, *The Boltzmann Equation*, Studies in Statistical Mechanics, vol. 10., (ed. by E. W. Montroll and J. L. Lebowitz.) North-Holland, (1983).

[44] Haken, H., *Synergetics*, (2nd ed.), Springer (1979); 中译本, 《协同学》, 徐锡申等译, 原子能出版社 (1984).

[45] 沈惠川, 弹性大挠度问题 von Kármán 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系, 应用数学和力学, 6, 8 (1985) 711—723.

[46] 沈惠川, 薄壳理论中的 Schrödinger 方程, 应用数学和力学, 6, 10 (1985), 887—900.

[47] 沈惠川, 正交各向异性板壳理论中的 Schrödinger 方程, 应用数学和力学, (待发表).

[48] Ehrenfest, P. and T., *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. Ⅶ, pt. 32, Leipzig-Berlin (1911), 36.

[49] Jeans, J. H., *Dynamical Theory of Gases*, Cambridge Univ. Press., Cambridge (1921).

[50] Born, M. and H. S. Green, *A General Kinetic Theory of Liquids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1949).

[51] Bogoliubov, N. N., *Problems of a Dynamical Theory in Statistical Physics*, State technical Press, Moscow (1946), English translation by E. K. Gora in Studies in Statistical Mechanics, vol. 1 (ed. by J. de Boer and G. E. Uhlenbeck), (1962).

[52] Green, H. S., *The Molecular Theory of Fluids*, North-Holland, Amsterdam (1952).

[53] Kirkwood, J. G. and J. Ross, *Proceedings of the International Symposium on Transport Processes in Statistical Mechanics*, Brussels (1956); Inter. Science, New York (1958).

[54] Yvon, J., *La Théorie des Fluides et de l'équation d'état*, Hermann et cie, Paris (1935).

[55] Courant, R. and D. Hilbert, 《数学物理方法》, 钱敏、郭敦仁译, 科学出版社 (1958), (1977).

[56] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, 《理论物理教程》, 第三卷, 量子力学（非相对论理论）, 严肃译, 高等教育出版社 (1980).

[57] Goldstein, H., 《经典力学》, 汤家镛、陈为恂译, 科学出版社 (1981).

[58] Greenwood, D. T., 《经典动力学》, 孙國锟译, 科学出版社 (1982).

[59] 沈惠川, 耗散力学和非线性耗散型方程的精确解——耗散力学原理和应用(Ⅰ), 应用数学和力学, 7, 12 (1986), 1061—1075.

[60] 沈惠川, 弹性动力学的通解, 应用数学和力学, 6, 9 (1985), 791—796.

[61] 沈惠川, 单色弹性波谱的分裂, 应用数学和力学, 5, 4 (1984), 541—551.

[62] 沈惠川, 弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲, 应用数学和力学, 5, 6 (1984), 817—827.

Exact Solution of the Boltzmann Equation

Shen Hui-chuan

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

We build up immediate connection between the nonlinear Boltzmann transport equation and the linear AKNS equation, and classify the Boltzmann equation as the Dirac equation by a new method for solving the Boltzmann equation out of keeping with the Chapman. Enskog and Grad's way in this paper. Without the effect of other external fields, the exact solution of the Boltzmann equation can be obtained by the inverse scattering method.