应用数学和力学，第8卷第3期（1987年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

宾汉流体与塞流的衔接问题*

蔡 树 棠

（中国科学技术大学；上海市应用数学和力学研究所）

蒋 贻 安

（杭州师范学院物理系）

摘　要

宾汉体在流动时候，离边壁远的地方经常会产生塞流现象。由于塞流没有明确的本构关系式，所以在有些问题中，得到的解可能会存在不确定性。本文讨论了环孔流动和管流，利用剪应力的解析性质，得到了唯一的解，并且和石油工程中泥浆流动时压力降的常用公式进行比较，表达式的形状是完全一样的。

一、引　言

在石油开采工程中，泥浆是一种必须用的介质，这样的泥浆有时可以作为宾汉体来处理。宾汉体在流动时，在离边界远的地方将出现塞流现象，这样就将出现宾汉体和塞流的衔接问题。由于塞流的本构关系式是不明确的，所以有可能出现解的不确定性。本文针对环孔流动和管流种两情形，利用交界面上流速相等和应力相等这样的边界条件，就可以得到流动的唯一的解。根据这一个解，在屈服应力比较小和环孔半径差比较小的近似条件下，可以求出泥浆流动压力降的公式。这公式和石油开采工程中常用公式的表达形式是完全一致的。

二、几种宾汉流体和塞流的衔接问题

（a） 环孔间的流动

这时的运动方程式为

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz})=0 \tag{2.1}$$

式中p为压力，σ_{rz}为剪应力，(r,θ,z)为柱坐标。积分后得到

$$\sigma_{rz}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial p}{\partial z}r+\frac{c}{r} \tag{2.2}$$

式中c为积分常数。

对宾汉流体，令τ_0为屈服应力，η为刚度系数，v_z为轴向的流速，则

$$\sigma_{rz}=\left(\frac{\tau_0}{|dv_z/dr|}+\eta\right)\frac{dv_z}{dr} \tag{2.3}$$

在内柱体的边界面上，$r=R_1$，$v_z=0$；在外柱体的边界面上，$r=R_2$，$v_z=0$

在塞流和宾汉体里面的衔接点上　　$r=R_1^0$，$v_z=v_z^0$，$dv_z/dr=0$，$\sigma_{rz}^P=\sigma_{rz}^B$

---

*　1985年12月4日收到。

在塞流和宾汉体外面的衔接点上 $r=R_2^0$，$v_z=v_z^0$，$\dfrac{dv_z}{dr}=0$，$\sigma_{rz}^P=\sigma_{rz}^B$

式中v_z^0为塞流的速度，σ_{rz}^P表示交界面上塞流的剪应力，σ_{rz}^B表示交界面上宾汉流体的剪应力。由于塞流和宾汉流体压力梯度是相同的，交界面上半径也是相同的，所以从交界面上剪应力相等，可以得出三个区域里面，积分常数c完全一样。这样，我们就有

$$\tau_0 R_1^0-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(R_1^0)^2=-\tau_0 R_2^0-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(R_2^0)^2$$

化简得到 $$R_2^0-R_1^0=2\tau_0/(-\partial p/z\partial) \tag{2.4}$$

解方程(2.2)和(2.3)得到在接近内柱体宾汉流体区域内

$$\eta v_z=\frac{-1}{4}\frac{\partial p}{\partial z}(R_1^2-r^2)+\left(R_1^0\tau_0-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(R_1^0)^2\right)\ln\frac{r}{R_1}-\tau_0(r-R_1) \tag{2.5}$$

在接近外柱体的宾汉流体区域内

$$\eta v_z=-\frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial z}(R_2^2-r^2)+\left(-R_2^0\tau_0-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(R_2^0)^2\right)\ln\frac{r}{R_2}-\tau_0(R_2-r) \tag{2.6}$$

两个衔接点的位置R_1^0和R_2^0是不知道的，但它们之间除(2.4)式以外，还有一个关系式，即

$$\begin{aligned}\eta v_z^0&=-4^{-1}\partial p/\partial z(R_2^2-(R_2^0)^2-2(R_2^0)^2\ln[R_2/R_2^0])-\tau_0(R_2-R_2^0-R_2^0\ln[R_2/R_2^0])\\&=-4^{-1}\partial p/\partial z(R_1^2-(R_1^0)^2+2(R_1^0)^2\ln[R_1^0/R_1])-\tau_0(R_1^0-R_1-R_1^0\ln[R_1^0/R_1])\end{aligned} \tag{2.7}$$

两个未知数 R_1^0 和 R_2^0，满足关系式(2.4)和(2.7)，所以它们的值原则上是可以解出的。这时，流量Q和平均速度$\bar v_z$为

$$Q\equiv(\pi R_2^2-\pi R_1^2)\bar v_z=\int_{R_1}^{R_1^0}2\pi r dr v_z+\pi[(R_2^0)^2-(R_1^0)^2]v_z^0+\int_{R_2^0}^{R_2}2\pi r dr v_z \tag{2.8}$$

化简以后，得到

$$\begin{aligned}\eta Q=&-\frac{\pi}{8}\frac{\partial p}{\partial z}[(R_2^2-(R_2^0)^2)^2-((R_1^0)^2-R_1^2)^2]\\&+\frac{\pi\tau_0}{6}[-2R_2^3-2R_1^3-(R_2^0)^3-(R_1^0)^3+3R_2^0R_2^2+3R_1^0R_1^2]\end{aligned} \tag{2.9}$$

(b) 管流

这时运动方程式仍旧为(2.1)式，即

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz})=0$$

积分以后，仍旧为(2.1)式，即

$$\sigma_{rz}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}r+\frac{c}{r}$$

σ_{rz}的表达式仍旧是

$$\sigma_{rz}=\left(\frac{\tau_0}{|dv_z/dr|}+\eta\right)\frac{dv_z}{dr}$$

边界条件为 $r=R$，$v_z=0$

在宾汉体和塞流的衔接点R^0上

$$r=R^0,\ v_z=v_z^0,\ dv_z/dr=0,\ \sigma_{rz}^P=\sigma_{rz}^B$$

所以两个区域里，积分常数c是一样的。但是在塞流区域内，σ_{rz}的值必须为有限，所以c必须为零。也就是

$$-\tau_0=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}R^0+\frac{c}{R^0}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}R^0 \tag{2.10}$$

化简得到 $R_0=2\tau_0/-(\partial p/\partial z)$ (2.10)′

在宾汉流体区域

$$\eta v_z=\frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2-R^2)+\tau_0(r-R) \tag{2.11}$$

流量Q和平均速度$\bar{v}_z$为

$$\eta Q\equiv\eta\pi R^2\bar{v}=\int_{R_0}^{R}2\pi r\left[\frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2-R^2)+\tau_0(r-R)\right]dr$$

$$+\pi(R^0)^2\left[\frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial z}(R_0^2-R^2)+\tau_0(R^0-R)\right]$$

$$=-\frac{\pi}{8}\frac{\partial p}{\partial z}(R^2-(R^0)^2)^2+\frac{\pi}{6}\tau_0(-2R^3-(R^0)^3+3R^2R^0) \tag{2.12}$$

(c) 平面槽流

这时的运动方程式为

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{rz}=0 \tag{2.13}$$

积分得到

$$\sigma_{xy}=\frac{\partial p}{\partial x}y+c \tag{2.14}$$

对宾汉流体区域，σ_{xy}的表达式为

$$\sigma_{xy}=\left(\frac{\tau_0}{|dv_x/dy|}+\eta\right)\frac{dv_x}{dy} \tag{2.15}$$

边界条件为

在槽壁 $y=\pm h,\quad v_x=0$

在和塞流的交界面上，$y=\pm b$，$v_x=v_x^0$，$dv_x/dy=0$，$\sigma_{xy}^P=\sigma_{xy}^B$，所以在两个宾汉流体区和塞流区，常数$c$是相同的。这样

$$-\tau_0=\frac{\partial p}{\partial x}b+c,\quad \tau_0=-\frac{\partial p}{\partial x}b+c$$

解出 $c=0,\qquad b=\dfrac{\tau_0}{-\partial q/\partial x}$ (2.16)

这时在宾汉流体区的流速分布为

$$y\geqslant b,\quad \eta v_x=-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(h^2-y^2)+\frac{\partial p}{\partial x}b(h-y)$$

$$y\leqslant -b,\quad \eta v_x=-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(h^2+y^2)+\frac{\partial p}{\partial x}b(h+y)$$

流量和平均速度为

$$\eta Q \equiv 2\eta h \bar{v}_x = 2\int_b^h -\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}[h^2-y^2-2b(h-y)]dy$$

$$+2b\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\right)[h^2-b^2-2b(h-b)]$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{2}{3}h^3+\frac{1}{3}b^3-bh^2\right] \tag{2.17}$$

三、几种特殊情形的近似解式

令

$$\lambda \equiv \frac{\tau_0}{-\partial p/\partial z}\quad\left(\text{或}\frac{\tau_0}{-\partial p/\partial x}\right) \tag{3.1}$$

(a) 环孔间的流动

这时确定R_1^0和R_2^0的方程式为

$$\begin{cases} R_2^2-(R_2^0)^2-2(R_2^0)^2\ln\dfrac{R_2}{R_2^0}-4\lambda\left(R_2-R_2^0-R_2^0\ln\dfrac{R_2}{R_2^0}\right) \\ \quad =R_1^2-(R_1^0)^2+2(R_1^0)^2\ln\dfrac{R_1^0}{R_1}-4\lambda\left(R_1^0-R_1-R_1^0\ln\dfrac{R_1^0}{R_1}\right) & (3.2) \\ R_2^0-R_1^0=2\lambda & (3.3) \end{cases}$$

在求解(3.2)和(3.3)之前，先考考牛顿流体时候的情形。这时R_1^0和R_2^0重合，成速度最大值的半径R_m。这时R_m所满足的方程式为

$$R_2^2-R_m^2-2R_m^2\ln\frac{R_2}{R_m}=R_1^2-R_m^2+2R_m^2\ln\frac{R_m}{R_1} \tag{3.4}$$

解出得到

$$R_m=\sqrt{\frac{R_2^2-R_1^2}{2\ln(R_2/R_1)}} \tag{3.5}$$

令

$$R_2^0=R_m+k_2\lambda,\quad R_1^0=R_m-k_1\lambda \tag{3.6}$$

这样

$$k_1+k_2=2 \tag{3.7}$$

当λ很小时候，我们可以略去λ的高次项，我们求解(3.2)和(3.3)，就得到

$$\left.\begin{aligned} k_1&=\left(\frac{R_1+R_2}{R_m}-2+\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\Big/\ln\frac{R_2}{R_1} \\ k_2&=\left(\ln\frac{R_2}{R_1}+2-\frac{R_1+R_2}{R_m}\right)\Big/\ln\frac{R_2}{R_1} \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

为了和石油工程中常用式子比较，$R_2-R_1 \ll R_1$时，我们可以得到

$$\eta Q \equiv \eta\pi(R_2^2-R_1^2)\bar{v}_z \approx -\frac{\pi}{8}\frac{\partial p}{\partial z}[(R_2^2-R_m^2)^2-(R_m^2-R_1^2)^2]$$

$$+\frac{\pi}{6}\tau_0[-2R_2^3-2R_1^3-R_m^3(2-3k_2-3k_1)$$

$$+3R_mR_2^2(1-k_2)+3R_mR_1^2(1-k_1)] \tag{3.9}$$

而有

$$\left.\begin{aligned}&R_m=\sqrt{\frac{R_2^2-R_1^2}{2\ln(R_2/R_1)}}\approx\sqrt{\frac{R_1(R_1+R_2)}{2}}\left(1+\frac{1}{4}\ \frac{R_2-R_1}{R_1}\right)\\&\quad\approx R_1\left(1+\frac{1}{2}\ \frac{R_2-R_1}{R_1}\right)\approx\frac{1}{2}(R_1+R_2)\\&2R_m^2\approx\frac{1}{2}(R_1+R_2)^2,\ \ k_1\approx k_2\approx 1\\&R_2^2+R_1^2-2R_m^2\approx\frac{1}{2}(R_2-R_1)^2\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

利用(3.10)，把(3.9)式化简以后，得到

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{16\eta\bar{v}_z}{(R_2-R_1)^2}+\frac{4\tau_0}{R_2-R_1}\tag{3.11}$$

把R用直径D代替，得到

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{64\eta\bar{v}_z}{(D_2-D_1)^2}+\frac{8\tau_0}{D_2-D_1}\tag{3.11$'$}$$

(b) 管流

当λ很小时候，略去λ的高次项以后，我们得到

$$\eta Q\equiv\eta\pi R^2\bar{v}_z\approx-\frac{\pi}{8}\ \frac{\partial p}{\partial z}R^4-\frac{\pi}{3}\tau_0R^3\tag{3.12}$$

化简以后，得到

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{8\eta\bar{v}_z}{R^2}+\frac{8}{3}\ \frac{\tau_0}{R}\tag{3.13}$$

把半径R用直径D代替，就得到

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{32\eta\bar{v}_z}{D^2}+\frac{16}{3}\ \frac{\tau_0}{D}\tag{3.13$'$}$$

(c) 平面槽流

当λ很小时，略去λ高次项以后，我们有

$$\eta Q\equiv 2h\eta\bar{v}_x=-\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{2}{3}\ h^3-\lambda h^2\ \right]=-\frac{2}{3}\ h^3\frac{\partial p}{\partial x}-\tau_0h^2\tag{3.14}$$

化简以后，得到

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{3\eta\bar{v}_x}{h^2}+\frac{3\tau_0}{2h}\tag{3.15}$$

四、和常用公式的比较

在石油工业中，刚度系数常用粘度计读数表示，屈服应力也用粘度计读数表示。粘度计读数用θ表示，θ_{600}就是每分钟600转时粘度计的读数，θ_{300}就是每分钟300 转时粘度计的读数。

刚度系数$(pv)=\theta_{600}-\theta_{300}$。屈服应力$y=\theta_{300}-(pv)$。对环孔流动，常用的压强降公式为

$$p=\frac{(pv)\bar{v}l}{60000(D_h-D_p)^2}+\frac{yl}{200(D_h-D_p)} \tag{4.1}$$

式中D_h为外管直径，D_p为内管直径，$\bar{v}$为平均速度，l为井深，P为压力降。(4.1)式和(3.11)′式在形式上完全一样。

对管流的情形，常用的应力降公式为[1]

$$p=\frac{(pv)\bar{v}l}{90000D^2}+\frac{yl}{225D} \tag{4.2}$$

(4.2)式也是和(3.13)′在形式上是完全一样的。

参 考 文 献

[1] Moore, P. L., *Drilling Practices Manual*, The Petroleum Publishing Co., U. S. A. (1974).

On the Linking up between Bingham Fluid and Plugged Flow

Tsai Shu-tang

(Department of Modern Mechanics, China University of Science and Technology, Hefei; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Jiang Yi-an

(Department of physics, Hangzhou Normal College, Hangzhou)

Abstract

When Bingham fluid is in motion, plugged flow often occurs at places far from the boundary walls. As there is not a decisive formula of constitutive relation for plugged flow, in some problems the solutions obtained may be indefinite. In this paper, annular flow and pipe flow are discussed, and unique solution is obtained in each case by utilizing the analytic property of shear stress. The solutions are identical in form with the commonly used formula for the pressure drop of mud flow in petroleum engineering.