应用数学和力学，第8卷第3期（1987年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出社版出版

矩形域内二阶椭圆型方程奇异摄动问题的边界层格式

苏煜城

（南京大学，1986年1月5日收到）

摘　　要

利用奇异摄动理论对矩形域内二阶椭圆型奇异摄动方程的 Dirichlet 问题建立了边界层格式，并作出了误差估计。

一、引　　言

在矩形区域 $G+\Gamma$:$(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 内考虑二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题：

$$\mathscr{L}_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\Delta u-\frac{\partial u}{\partial y}-u=f(x,y)\qquad\left((x,y)\in G=\begin{pmatrix}0<x<a\\0<y<b\end{pmatrix}\right)\tag{1.1}$$

$$u|_\Gamma=0\tag{1.2}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数。当 $\varepsilon=0$ 时相应的退化问题是：

$$\mathscr{L}_0w\equiv-\frac{\partial w}{\partial y}-w=f(x,y)\tag{1.3}$$

$$w|_{y=0}=0\tag{1.4}$$

因此摄动问题(1.1)，(1.2)当 $\varepsilon=0$ 退化为问题(1.3)，(1.4)时在 $x=0$，$x=a$ 和 $y=b$ 这三条边上都失去边界条件，在这三条边附近将出现边界层。我们知道，直线 $x=\text{const}$ 是退化方程(1.3)的特征线，所以摄动问题(1.1)，(1.2)属于特征边界问题。根据渐近分析[1]在 $x=0$ 和 $x=a$ 附近将出现抛物边界层。Emelyanov[2],[3]，Miller[4] 曾研究过这一问题的差分解法，建立指数型拟合的差分格式，但他们都排除了产生抛物边界的边界附近，只考虑了 $y=b$ 的附近区域。看来，对于特征边界问题建立指数型拟合差分格式是很困难的。本文按Hsio，Jordan 的工作[5]，考虑到一般边界层、抛物边界层和点 $(0,b)$ 及点 (a,b) 的角层情形建立了摄动问题(1.1)，(1.2)的边界层格式。

假定右端函数 $f(x,y)$ 是 $G+\Gamma$ 内的光滑函数，并且

$$f(0,0)=0,\ f(a,0)=0\tag{1.5}$$

二、渐近解的构造

构造摄动问题(1.1)，(1.2)的渐近解如下：

$$\tilde{u}(x,y,\varepsilon)=w(x,y)+v^{(0)}(\xi_1,y)+v^{(1)}(\xi_2,y)+v^{(2)}(x,\eta)$$
$$+v^{(3)}(\xi_1,\eta)+v^{(4)}(\xi_2,\eta)+O(\varepsilon) \tag{2.1}$$

其中 1°、 $\xi_1=x/\varepsilon,\ \xi_2=(a-x)/\varepsilon,\ \eta=(b-y)/\varepsilon^2$ (2.2)

2°、 $w(x,y)$ 是退化问题(1.3), (1.4)的解

3°、 $v^{(0)}(\xi_1,y)$ 是在边界 $(x=0,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 附近构造的边界层函数，它满足

$$M_0v^{(0)}\equiv\frac{\partial^2v^{(0)}}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}-v^{(0)}=0 \qquad \begin{pmatrix}0<\xi_1<\infty\\ 0<y<b\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{l}v^{(0)}(\xi_1,0)=0,\ v^{(0)}(0,y)=-w(0,y)\\ v^{(0)}(\xi_1,y)\to0\quad(\xi_1\to\infty)\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

这是半无界域上抛物型方程第一边值问题，它的精确解是：

$$v^{(0)}(\xi_1,y)=\frac{\exp(-y)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\xi_1}{(y-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\xi_1^2}{4(y-\tau)}\right]\varphi(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

$$\varphi(\tau)=-\exp(-\tau)w(0,\tau)$$

表达式 (2.5) 可改写为

$$v^{(0)}(\xi_1,y)=\frac{2\exp(-y)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_1}{2\sqrt{y}}}^{\infty}\exp(-s^2)\varphi\left(y-\frac{\xi_1^2}{4s^2}\right)ds \tag{2.6}$$

由条件(1.5)可直接验证 $\partial v^{(0)}/\partial y$, $\partial^2v^{(0)}/\partial y^2$ 在角点 $(0,0)$ 附近是有界的.

4°、 $v^{(1)}(\xi_2,y)$ 是在边界 $(x=a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 附近构造的边界层函数：

$$v^{(1)}(\xi_2,y)=\frac{2\exp(-y)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_2}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty}\exp(-s^2)\varphi\left(y-\frac{l\xi_2^2}{4s^2}\right)ds \tag{2.7}$$

$$\varphi(\tau)=-\exp(-\tau)w(a,\tau)$$

由条件(1.5)可直接验证 $\partial v^{(1)}/\partial y$, $\partial^2v^{(1)}/\partial y^2$ 在角点 $(a,0)$ 附近是有界的.

因为对任意常数 $k>0$ 都有 $\exp(-s^2)\leqslant\exp(k^2/4)\exp(-ks)=c\exp(-ks)$ 并且 $|\varphi(\tau)|\leqslant c$, 所以由(2.6)和(2.7)得到

$$|v^{(0)}(\xi_1,y)|\leqslant c\exp(-\alpha_1\xi_1)\quad(\alpha_1>0) \tag{2.8}$$

$$|v^{(1)}(\xi_2,y)|\leqslant c\exp(-\alpha_2\xi_2)\quad(\alpha_2>0) \tag{2.9}$$

5°、 $v^{(2)}(x,\eta)$ 是在边界 $(y=b,\ 0\leqslant x\leqslant a)$ 附近构造的边界层函数，它满足

$$Nv^{(2)}(x,\eta)\equiv\frac{\partial^2v^{(2)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial v^{(2)}}{\partial\eta}=0 \tag{2.10}$$

$$v^{(2)}(x,0)=-w(x,b),\ v^{(2)}(x,\eta)\to0\quad(\eta\to\infty), \tag{2.11}$$

其解析表示为

$$v^{(2)}(x,\eta)=-w(x,b)\exp(-\eta) \tag{2.12}$$

并有估计式

$$|v^{(2)}(x,\eta)|\leqslant c\exp(-\eta) \tag{2.13}$$

6°、 $v^{(3)}(\xi_1,\eta)$ 是在角点 $(0,b)$ 附近构造的边界层函数，它满足

$$R_0v^{(3)}\equiv\frac{\partial^2v^{(3)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial v^{(3)}}{\partial\eta}=0 \qquad \begin{pmatrix}0<\xi_1<\infty\\ 0<\eta<\infty\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$v^{(3)}(\xi_1,0)=-v^{(0)}(\xi_1,b),\ v^{(3)}(\xi_1,\eta)\to0\quad(\eta\to\infty) \tag{2.15}$$

其解析表示为

$$v^{(3)}(\xi_1,\eta)=-v^{(0)}(\xi_1,b)\exp(-\eta) \tag{2.16}$$

并有估计式

$$|v^{(3)}(\xi_1,\eta)|\leqslant c\exp(-\alpha_3(\xi_1+\eta)) \tag{2.17}$$

构造 $v^{(3)}(\xi_1,\eta)$ 是因为 $v^{(0)}(\xi_1,y)$ 不满足在 $y=b$ 的边界条件。

7°、 $v^{(4)}(\xi_2,\eta)$ 是在角点 (a,b) 附近构造的边界层函数：

$$v^{(4)}(\xi_2,\eta)=-v^{(1)}(\xi_2,b)\exp(-\eta) \tag{2.18}$$

$$|v^{(4)}(\xi_2,\eta)|\leqslant c\exp(-\alpha_4(\xi_2+\eta)) \tag{2.19}$$

同理，构造 $v^{(4)}(\xi_2,\eta)$ 是因为 $v^{(1)}(\xi_2,y)$ 不满足在 $y=b$ 的边界条件。

如果我们希望渐近解的精度达到 $O(\varepsilon^{n+1})(n\geqslant2)$，则还要考虑 $v^{(2)}(x,\eta)+v^{(3)}(\xi_1,\eta)$ 和 $v^{(2)}(x,\eta)+v^{(4)}(\xi_2,\eta)$ 分别在 $x=0$ 和 $x=a$ 不满足边界条件的情形，而当 $n=0,1$ 时边界条件是满足的（参看 Butuzov[6]）。Butuzov 证明了展开式 (2.1) 在 $G+\Gamma$ 内一致有效成立。若设

$$\tilde{u}(x,y,\varepsilon)=w(x,y)+v^{(0)}(\xi_1,y)+v^{(1)}(\xi_2,y)+v^{(2)}(x,\eta)+v^{(3)}(\xi_1,\eta)+v^{(4)}(\xi_2,\eta) \tag{2.20}$$

则

$$u(x,y,\varepsilon)-\tilde{u}(x,y,\varepsilon)=O(\varepsilon)\qquad((x,y)\in G+\Gamma) \tag{2.21}$$

三、差分格式的建立和误差估计

1. 退化问题的差分格式

我们用改进 Euler 方法解退化问题 (1.3)，(1.4)。设 h 和 k 分别是 x 方向和 y 方向的步长，$x=x_i=ih$，$y=y_j=jk$，$(i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,J)$，$Nh=a$，$Jk=b$。现建立如下的格式：

$$\frac{1}{k}\left[w^{(h,k)}(x,y+k)-w^{(h,k)}(x,y)\right]+\frac{1}{2}[w^{(h,k)}(x,y+k)+w^{(h,k)}(x,y)]$$

$$=\frac{-1}{2}[f(x,y)+f(x,y+k)] \tag{3.1}$$

$$w^{(h,k)}(x,0)=0 \tag{3.2}$$

这是一个二阶格式：

$$|w(x,y)-w^{(h,k)}(x,y)|=O(k^2)\qquad(0\leqslant x_i\leqslant a;\ 0\leqslant y_j\leqslant b) \tag{3.3}$$

2. 边界层方程的差分格式

在所讨论的问题中求边界层方程都是在半无界区域内进行的，如果用差分方法直接去解，在小参数 ε 十分小的情况下将需要很大的工作量。但我们从奇异摄动理论中知道，边界层函数也只是在边界层内部有明显影响，而远离边界层是可以忽略的。按[5]我们只在有限域内用通常的差分方法解这些方程。为此，需要对原来的边界层方程的问题加以变形。

1) 问题(2.3)，(2.4)的变形。求 $\tilde{v}^{(0)}(\xi_1,y)$：

$$M_0\tilde{v}^{(0)}\equiv\frac{\partial^2\tilde{v}^{(0)}}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}}{\partial y}-\tilde{v}^{(0)}=0\qquad\begin{pmatrix}0<\xi_1<m_1\\0<y\leqslant b\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{v}^{(0)}(\xi_1,0)=0 & (0\leqslant\xi_1\leqslant m_1)\\ \tilde{v}^{(0)}(0,y)=-w(0,y),\ \tilde{v}^{(0)}(m_1,y)=0 & (0\leqslant y\leqslant b)\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

其中常数 $m_1>0$ 待定。

已知，问题(2.3)，(2.4)的解(2.5)是边界层函数，并有估计式(2.8)。我们确定 m_1 使得 $\exp(-\alpha_1 m_1)\leqslant\varepsilon$，即

$$m_1\geqslant-\frac{1}{\alpha_1}\ln\varepsilon \tag{3.6}$$

可以证明，这样选取的 m_1 不会产生高于 $O(\varepsilon)$ 的误差，即有

$$|v^{(0)}(\xi_1,y)-\tilde v^{(0)}(\xi_1,y)|=O(\varepsilon) \tag{3.7}$$

问题(3.4)，(3.5)是有限区域内抛物型方程的第一值问题，我们对它可以构造 Crank-Nicolson 格式：

$$M_0^{(\tilde h_1,k)}\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}\equiv\frac{1}{2}\Big[\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}_{\xi_1\bar\xi_1}(\xi_1,y+k)+\tilde v^{(\tilde h_1,k)}_{\xi_1\bar\xi_1}(\xi_1,y)\Big]$$

$$-\tilde v_y^{(0)(\tilde h_1,k)}(\xi_1,y)-[\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(\xi_1,y+k)+\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(\xi_1,y)]/2=0 \tag{3.8}$$

$$\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(\xi_1,0)=0,\quad \tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(0,y)=-w^{(h,k)}(0,y)$$
$$\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(m_1,y)=0 \tag{3.9}$$

其中 $\xi_1=\xi_{1,i}=i\tilde h_1$，$y=y_j=jk$，$\tilde h_1=m_1/N_1$，$k=b/J$，$\tilde v_{\xi_1\bar\xi_1}^{(0)(\tilde h_1,k)}$是二阶中心差，$\tilde v_y^{(0)(\tilde h_1,k)}=$

$\frac{1}{k}[\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(x,y+k)-\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(x,y)]$。

我们知道，(3.8)，(3.9)是一个二阶格式，即有

$$|\tilde v^{(0)(\tilde h_1,k)}(\xi_1,y)-\tilde v^{(0)}(\xi_1,y)|=O(\tilde h_1^2+k^2) \tag{3.10}$$

但在边界条件(3.9)中我们取的是 $-w^{(h,k)}(0,y)$ 而不是 $-w(0,y)$，因此有误差。根据(3.3) $|w(0,y)-w^{(h,k)}(0,y)|=O(k^2)$。应指出，这里的 $\xi_1=\xi_{1,i}$ 是与 x_i 相应的，即 $\xi_{1,i}=x_i/\varepsilon$。

2) 确定 $v^{(1)}(\xi_2,y)$ 的微分问题的变形 求 $\tilde v^{(1)}(\xi_2,y)$：

$$M_1\tilde v^{(1)}(\xi_2,y)\equiv\frac{\partial^2\tilde v^{(1)}}{\partial\xi_2^2}-\frac{\partial\tilde v^{(1)}}{\partial y}-\tilde v^{(1)}=0\qquad\begin{pmatrix}0<\xi_2<m_2\\0<y<b\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde v^{(1)}(\xi_2,0)=0 &&(0\leqslant\xi_2\leqslant m_2)\\&\tilde v^{(1)}(0,y)=-w(a,y),\quad \tilde v^{(1)}(m_2,y)=0 &&(0\leqslant y\leqslant b)\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

其中常数 $m_2>0$ 待定。已知，$\tilde v^{(1)}(\xi_2,y)$ 有类似的估计(2.9)。同理，可定出 m_2：

$$m_2\geqslant-\frac{1}{\alpha_2}\ln\varepsilon \tag{3.13}$$

并且

$$|v^{(1)}(\xi_2,y)-\tilde v^{(1)}(\xi_2,y)|=O(\varepsilon) \tag{3.14}$$

对问题(3.11)，(3.12)亦可构造 Crank-Nicolson 格式：

$$M_1^{(\tilde h_2,k)}\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}\equiv\frac{1}{2}[\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}_{\xi_2\bar\xi_2}(\xi_2,y+k)+\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}_{\xi_2\bar\xi_2}(\xi_2,y)]$$

$$-\tilde v_y^{(1)(\tilde h_2,k)}(\xi_2,y)-\frac{1}{2}[\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}(\xi_2,y+k)+\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}(\xi_2,y)]=0 \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}(\xi_2,0)=0\\&\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}(0,y)=-w^{(h,k)}(a,y),\quad\tilde v^{(1)(\tilde h_2,k)}(m_2,y)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

其中 $\xi_2=\xi_{2,i}=i\tilde{h}_2$，$y_j=jk$，$N_2\tilde{h}_2=m_2$，$Jk=b$。在边界条件(3.16)中由于我们取的是 $-w^{(h,k)}(a,y)$，因此有误差。同理，由(3.3) $|w(a,y)-w^{(h,k)}(a,y)|=O(k^2)$。从而我们有

$$|\tilde{v}^{(1)}(\xi_2,y)-\tilde{v}^{(1)(\tilde{h},k)}(\xi_2,y)|=O(\tilde{h}_2^2+k^2) \tag{3.17}$$

这里 $\xi_2=\xi_{2,i}=(a-x_i)/\varepsilon$。

3) 问题(2.10)，(2,11)的变形 求 $\tilde{v}^{(2)}(x,\eta)$：

$$N\tilde{v}^{(2)}(x,\eta)\equiv\frac{\partial^2\tilde{v}^{(2)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\tilde{v}^{(2)}}{\partial\eta}=0 \qquad \begin{pmatrix}0<x<a\\0<\eta<s\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$\tilde{v}^{(2)}(x,0)=-w(x,b),\quad \tilde{v}^{(2)}(x,s)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{3.19}$$

其中常数 s 待定。

已知，问题(2.10)，(2.11)的解有估计式(2.13)。从而可定出 s：

$$s\geqslant-2\ln\varepsilon \tag{3,20}$$

并有

$$|\tilde{v}^{(2)}(x,\eta)-v^{(2)}(x,\eta)|=O(\varepsilon^2) \tag{3,21}$$

问题(3.18)，(3.19)是常微分方程二点边值问题，现建立如下差分格式：

$$N^{(h,\tilde{k})}\tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}\equiv\tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}_{\eta\bar{\eta}}-\tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}_{\hat{\eta}}=0 \tag{3.22}$$

$$\tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}(x,0)=-w^{(h,k)}(x,b),\quad \tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}(x,s)=0 \tag{3.23}$$

其中 $\eta=\eta_j=j\tilde{k}$，$\tilde{J}\tilde{k}=s$，$x=x_i=ih$，$Nh=a$。以 $-w(x,b)^{(h,k)}$ 代替 $-w(x,b)$，由(3.3) $|w(x,b)-w^{(h,h)}(x,b)|=O(k^2)$。从而有

$$|\tilde{v}^{(h,\tilde{k})}(x,\eta)-\tilde{v}(x,\eta)|=O(k^2+\tilde{k}^2) \tag{3,24}$$

这里 $\eta=\eta_j=(b-y_j)/\varepsilon^2$。

4) 问题(2.14)，(2.15)的变形 求 $\tilde{v}^{(3)}(\xi_1,\eta)$：

$$R_0\tilde{v}^{(3)}\equiv\frac{\partial^2\tilde{v}^{(3)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\tilde{v}^{(3)}}{\partial\eta} \qquad \begin{pmatrix}0<\eta<s\\0<\xi_1<m_1\end{pmatrix} \tag{3.25}$$

$$\tilde{v}^{(3)}(\xi_1,0)=-v^{(0)}(\xi_1,b),\quad \tilde{v}^{(3)}(\xi_1,s)=0 \quad (0\leqslant\xi_1\leqslant m_1) \tag{3.26}$$

已知，问题(2.14)，(2.15)的解(2.16)有估计式(2.17)。只要适当选取 α_3，由(3.6)和(3.20)定出的 m_1 和 s 对此问题仍可适用，并有

$$|v^{(3)}(\xi_1,\eta)-\tilde{v}^{(3)}(\xi_1,\eta)|=O(\varepsilon^2) \tag{3.27}$$

现对(3.25)，(3.26)建立如下的差分格式：

$$R_0^{(\tilde{h}_1,\tilde{k})}\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}\equiv\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}_{\eta\bar{\eta}}+\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}_{\hat{\eta}}=0 \tag{3.28}$$

$$\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}(\xi_1,0)=-\tilde{v}^{(0)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}(\xi_1,b),\quad \tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}(\xi_1,s)=0 \tag{3.29}$$

其中 $\eta=\eta_j=j\tilde{k}$，$\xi_1=\xi_{1,i}=i\tilde{k}_1$，$\eta_j=(b-y_j)/\varepsilon^2$，$\xi_{1,i}=x_i/\varepsilon$。在边界条件(3.29)中是以 $-\tilde{v}^{(0)(\tilde{h}_1,k)}(\xi_1,b)$ 代替 $-v^{(0)}(\xi_1,b)$，因此有误差 $|v^{(0)}(\xi_1,b)-\tilde{v}^{(0)(\tilde{h}_1,k)}(\xi_1,b)|=O(\varepsilon)+O(\tilde{k}_1^2+k^2)$。从而有

$$|\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}(\xi_1,\eta)-\tilde{v}^{(3)}(\xi_1,\eta)|=O(\tilde{k}^2)+O(\tilde{k}_1^2+k^2)+O(\varepsilon) \tag{3.30}$$

5) 确定 $v^{(4)}(\xi_2,\eta)$ 的微分问题的变形 求 $\tilde{v}^{(4)}(\xi_2,\eta)$：

$$R_1\tilde{v}^{(4)}\equiv\frac{\partial^2\tilde{v}^{(4)}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\tilde{v}^{(4)}}{\partial\eta}=0 \qquad \begin{pmatrix}0<\xi_2<m_2\\0<\eta<s\end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$\tilde{v}^{(4)}(\xi_2,0)=-v^{(1)}(\xi_2,b),\ \tilde{v}^{(4)}(\xi_2,s)=0 \qquad (0\leqslant\xi_2\leqslant m_2) \tag{3.32}$$

由估计式(2.19)，适当选取 α_4，由(3.13)，(3.20)所确定的 m_2 和 s 对此问题仍可适用，并有

$$|\tilde{v}^{(4)}(\xi_2,\eta)-v^{(4)}(\xi_2,\eta)|=O(\varepsilon^2) \tag{3.33}$$

现对问题(3.31)，(3.32)建立如下的差分格式：

$$R_1(\tilde{h}_2,\tilde{k})\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}\equiv\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}_{\eta\bar{\eta}}+\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}_{\hat{\eta}}=0 \tag{3.34}$$

$$\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}(\xi_2,0)=-\tilde{v}^{(1)(\tilde{h}_2,k)}(\xi_2,b),\ \tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}(\xi_2,s)=0 \tag{3.35}$$

其中 $\eta=\eta_j=j\tilde{k}$，$\xi_2=\xi_{2,i}=i\tilde{h}_2$，$\eta_j=(b-y_j)/\varepsilon^2$，$\xi_{2,i}=(a-x_i)$。在边界条件(3.35)中是以 $-\tilde{v}^{(1)(\tilde{h}_2,k)}(\xi_2,b)$ 代替 $-v^{(1)}(\xi_2,b)$，因此有误差 $|v^{(1)}(\xi_2,b)-\tilde{v}^{(1)(\tilde{h}_2,k)}(\xi_2,b)|=O(\tilde{h}_2^2+k^2)+O(\varepsilon)$。从而有

$$|\tilde{v}^{(4)}(\xi_2,\eta)-\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}(\xi_2,\eta)|=O(\tilde{k}^2)+O(\tilde{h}_2^2+\bar{k}^2)+O(\varepsilon) \tag{3.36}$$

我们分别解差分问题(3.1)，(3.2)；(3.8)，(3.9)；(3.11)，(3.12)；(3.22)，(3.23)；(3.28)，(3.29)和(3.34)，(3.35)即得到渐近解(2.1)中各项的数值逼近，从而得到摄动问题(1.1)，(1.2)的数值结果：

$$u^{(h,k)}(x,y,\varepsilon)=\begin{cases} w^{(h,k)}(x,y) & \begin{pmatrix}\varepsilon m_1\leqslant x\leqslant a-\varepsilon m_2\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix} \\ w^{(h,k)}(x,y)+\tilde{v}^{(0)(\tilde{h}_1,k)}(\xi_1,y) & \begin{pmatrix}0\leqslant\xi_1\leqslant m_1\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix},\ x=\varepsilon\xi_{1,i} \\ w^{(h,k)}(x,y)+\tilde{v}^{(1)(\tilde{h}_2,k)}(\xi_2,y) & \begin{pmatrix}0\leqslant\xi_2\leqslant m_2)\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix},\ x=\varepsilon\xi_{2,i} \\ w^{(h,\bar{k})}(x,y)+\tilde{v}^{(2)(h,\tilde{k})}(x,\eta) & \begin{pmatrix}\varepsilon m_1\leqslant x\leqslant a-\varepsilon m_2\\ 0\leqslant\eta\leqslant s\end{pmatrix},\ y=b-\varepsilon^2\eta_j \\ w^{(\bar{h}_1,\bar{k})}(x,y)+\tilde{v}^{(3)(\tilde{h}_1,\tilde{k})}(\xi_1,\eta) & \begin{pmatrix}0\leqslant\xi_1\leqslant m_1\\ 0\leqslant\eta\leqslant s\end{pmatrix},\ \begin{matrix}x=\varepsilon\xi_{1,i}\\ y=b-\varepsilon^2\eta_j\end{matrix} \\ w^{(\bar{h}_2,\bar{k})}(x,y)+\tilde{v}^{(4)(\tilde{h}_2,\tilde{k})}(\xi_2,\eta) & \begin{pmatrix}0\leqslant\xi_2\leqslant m_2\\ 0\leqslant\eta\leqslant s\end{pmatrix},\ \begin{matrix}x=a-\varepsilon\xi_{2,i}\\ y=b-\varepsilon^2\eta_j\end{matrix} \end{cases} \tag{3.37}$$

这里

$$\bar{k}=\varepsilon^2\tilde{k},\ \bar{h}_1=\varepsilon\tilde{h}_1,\ \bar{h}_2=\varepsilon\tilde{h}_2 \tag{3.38}$$

h，k，$\tilde{k}$，$\tilde{h}_1$，$\tilde{h}_2$ 分别由 $h=a/N$，$k=b/J$，$\tilde{k}=s/\tilde{J}$，$\tilde{h}_1=m_1/N_1$，$\tilde{h}_2=m_2/N_2$ 确定。

由渐近展开式(2.1)和估计式(3.3)，(3.7)，(3.10)，(3.14)，(3.17)，(3.21)，(3.24)，(3.27)，(3.30)，(3.33)，(3.36)，(3.37)和(3.38)易得如下的估计。

$$u(x,y,\varepsilon)-u^{(h,k)}(x,y,\varepsilon)=\begin{cases} O(k^2)+O(\varepsilon) & \begin{pmatrix}\varepsilon m_1\leqslant x\leqslant a-\varepsilon m_2\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix} \\ O(\tilde{h}_1^2+k^2)+O(\varepsilon) & \begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant \varepsilon m_1\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix} \\ O(\tilde{h}_2^2+k^2)+O(\varepsilon) & \begin{pmatrix}a-\varepsilon m_2\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant b-\varepsilon^2 s\end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.39}$$

$$
\begin{cases}
O(\tilde{k}^2)+O(\varepsilon) & \left(\begin{matrix} \varepsilon m_1\leqslant x\leqslant a-\varepsilon m_2 \\ b-\varepsilon^2 s\leqslant y\leqslant b \end{matrix}\right) \\
O(\tilde{h}_1^2+\tilde{k}^2)+O(k^2)+O(\varepsilon) & \left(\begin{matrix} 0\leqslant x\leqslant \varepsilon m_1 \\ b-\varepsilon^2 s\leqslant y\leqslant b \end{matrix}\right) \\
O(\tilde{h}_2^2+\tilde{k}^2)+O(k^2)+O(\varepsilon) & \left(\begin{matrix} a-\varepsilon m_2\leqslant x\leqslant a \\ b-\varepsilon^2 s\leqslant y\leqslant b \end{matrix}\right)
\end{cases}
$$

综合上述我们得到下面的定理.

定理　设右端函数 $f(x,y)$ 在 $G+\Gamma$ 内充分光滑并满足条件(1.5)，则 1)摄动问题(1.1)，(1.2)的解 $u(x,y,\varepsilon)$ 有渐近展开式(2.1)；　2)摄动问题的数值解由差分问题(3.1)，(3.2)；(3.8)，(3.9)；(3.15)，(3,16)；(3.22)，(3.23)；(3.28)，(3.29) 和 (3.34)，(3.35) 确定，并有误差估计(3.39)。

注 1　以上结果不难推广到更一般的方程：

$$\mathscr{L}_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\Delta u-A(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}-k^2(x,y)u=f(x,y)$$

其中 $A(x,y)>0$，$k(x,y)>0$，$f(0,0)=0$，$f(a,0)=0$.

注 2　若 $A(x,y)<0$，则要求 $f(0,b)=0$，$f(a,b)=0$.

参 考 文 献

[1] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科技出版社（1983）.

[2] Emelyanov, K. V., A difference scheme for the equation $\varepsilon\Delta u+au_{x1}=f$, *Difference Methods for the Solution of Boundary Problems and Discontinuous Boundary Data*, ed. G. I. Shishkin, Sverdlovsk (1976), 19—37.

[3] Emelyanov, K. V., On a difference scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Num. Meth. Mech. Cont. media*, 1, 5 (1970).

[4] Miller, J. J. H., Construction of an FEM for a singularly perturbed problem in two dimensions, *ISNM* Vol.31, Birkhäuser Verlag, Basel (5976), 165—169.

[5] Hsio, G. C. and K. E. Jordan, *Solution to the Difference Equations of Singular Perturbation Problem in NASPP*, P. W. Hemker and J. J. H. Miller, eds., Academic Press, London (1979), 433—440.

[6] Butuzov, V. F., On asymptotic of solutions of the singularly perturbed equations of elliptic type in rectangle, *Differential Equations*, 11, 6 (1975).

The Boundary Layer Scheme for a Singularly Perturbed Problem for the Second Order Elliptic Equation in the Rectangle

Su Yu-cheng
(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

Using singularly perturbation theory is constructed the boundary layer scheme for a Dirichlet problem for the second order singularly perturbed equation of elliptic type in the rectangle. The error estimate is given.