

用 SADI 方法求解方形空腔中具有高 Rayleigh 数的非定常自然对流问题

王 璞 阿·卡哈维塔

(中国兰州大学) (加拿大蒙特利尔工学院)

(叶开沅推荐, 1986年2月20日收到)

摘 要

本文用三次样条积分计算了在方形空腔中具有高 Rayleigh 数 $Ra=10^7$ 和 $Ra=2 \times 10^7$ 的非定常自然对流问题。二维 N-S 方程和能量方程是在非均匀网格中用两个交替方向的三次样条公式进行计算的。文中简要讨论了过渡流动的主要特征, 所得结果与理论予估值^[1, 2]吻合很好。 $Ra=10^7$ 时的稳态结果与近期文献中的结果一致。

一、引 言

自 Rubin 和 Graves^[3] 及 Rubin 和 Khosla^[4] 的工作之后, 偏微分方程的三次样条数值积分方法已得到进一步的发展和应。作者在 [5~7] 中已经扩展了 [3, 4] 的结果, 把求解 3×3 矩阵系统的过程转换成为求解仅包含在节点上的函数值, 或一阶导数值, 或二阶导数值的任一三对角形方程组^[8]。

空腔中的对流问题是一个重要的应用研究领域。以往的大量研究工作是对稳态情况做的^[9~11]。由于在很多的应用中, 这种对流可能是非定常的或过渡性的, 所以近年来一些新的工作比较集中于研究过渡状态的流动特性及过渡到稳态解的方式(如 [10])。在上述工作中, 当 $Ra=10^6$ 时的非稳态自然对流问题的过渡流动特征文献^[10]中已报导过。而对于 $Ra \geq 10^7$ 的情况, 其瞬态数值结果还未见到过。

本文介绍了用三次样条方法求解方形空腔中高 Rayleigh 数时的非定常自然对流问题的基本步骤和数值结果。具体计算是对 $Ra=10^7$ 和 $Ra=2 \times 10^7$ 及 Prandtl 数 $Pr=0.71$ 和 $Pr=2.7$ 等进行的。采用的是 SADI (Spline-Alternating-Direction-Implicit) 方法。所得瞬态数值结果与由 R 度分析得到的理论予估值吻合很好; 所达到的最终稳定态时的数值结果与近期文献 [10, 12, 13] 中的数据一致。

本文所得数值结果是令人鼓舞的, 表明用三次样条方法求解大 Ra 数下的自然对流问题是行之有效的; 也说明进一步开展对该方法的研究是值得的。

二、基本方程

设在方形空腔的竖直墙上温度的边界条件是保持为恒定的, 并且分别为 $T_h=0.5$ (热墙) 和 $T_c=-0.5$ (冷墙), 如图 1 所示, 而两个水平方向的墙上则规定 (热墙) 为是绝热的, 描述流体在该空腔中运动的基本方程为:

1. 连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

2. 动量方程

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.2)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v - g \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.3)$$

3. 能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T \quad (2.4)$$

式中 ∇^2 为拉普拉斯算子, β 是体积膨胀系数, ν 是粘性系数, a 是热扩散率, 而 ρ_0 是在参考温度 T_0 时的密度, g 为重力加速度。

对方程 (2.2) 和 (2.3) 交叉微分, 消去压力 P 并进行无量纲化, 则方程 (2.1)~(2.4) 可写成以涡量 Ω , 流函数 ψ 及温度 θ 为变量的方程组:

$$\nabla^2 \psi = -\Omega \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \psi_Y \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \psi_X \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \text{Pr} \nabla^2 \Omega + \text{Pr} \cdot \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \psi_Y \frac{\partial \theta}{\partial X} - \psi_X \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \nabla^2 \theta \quad (2.7)$$

并且 $U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \equiv \psi_Y, V = - \frac{\partial \psi}{\partial X} \equiv -\psi_X$

$$\Omega = - \left(\frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

上式中的无量纲参量分别为:

$$\tau = ta/L^2, U = uL/a, V = vL/a, \theta = (T - T_0)/(T_h - T_c), X = x/L, Y = y/L.$$

Pr 是 Prandtl 数, 且 $\text{Pr} = \nu/a$; Ra 是 Rayleigh 数, 有

$$\text{Ra} = g\beta L^3 (T_h - T_c) / a\nu.$$

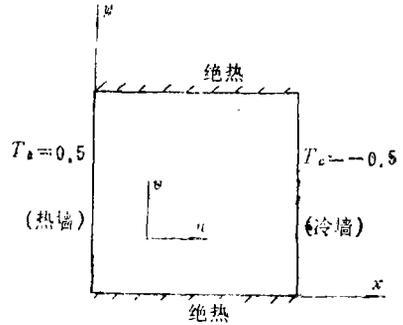


图1 坐标系和方形空腔的边界条件

4. 边界条件

在 $X=0$ 处, $\psi=\psi_x=0$, $\Omega=-\psi_{xx}$, $\theta=0.5$,

在 $X=1$ 处, $\psi=\psi_x=0$, $\Omega=-\psi_{xx}$, $\theta=-0.5$,

在 $Y=0, 1$ 处, $\psi=\psi_y=0$, $\Omega=-\psi_{yy}$, $\frac{\partial\theta}{\partial Y}=0$.

我们注意到, 对于方程(2.6), 其边界条件并不是明显知道的。它们是由方程(2.5)在墙上求值得到的。应用三次样条方法, ψ_{xx} 和 ψ_{yy} 能够由基本关系式直接求得。

三、数值方法

本文应用了SADI方法。在交替方向的每一步中, 先得出样条离散的一般形式, 然后用仅包含在节点上的函数值或一阶导数值的三对角形方程组求解。所用的基本公式已在附录中给出。

1. 涡量方程的计算格式

第一步(在 X 方向)

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j}^{n+1/2} &= \Omega_{i,j}^n + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-(\psi_y^n m^{n+1/2})_{i,j} + (\psi_x^n l^n)_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + \text{Pr} \left(M_{i,j}^{n+1/2} + L_{i,j}^n + \text{Ra} g_{i,j}^{n+1} \right) \right] \\ &= F_{i,j} + R_{i,j} m_{i,j}^{n+1/2} + Q_{i,j} M_{i,j}^{n+1/2}\end{aligned}\quad (3.1)$$

式中 $m=\partial\Omega/\partial X$, $M=\partial^2\Omega/\partial X^2$, $l=\partial\Omega/\partial Y$, $L=\partial^2\Omega/\partial Y^2$, $g=\partial\theta/\partial X$ 。 $F_{i,j}$, $R_{i,j}$ 和 $Q_{i,j}$ 是从上一时间层求得的已知量。

第二步(在 Y 方向):

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j}^{n+1} &= \Omega_{i,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-(\psi_x^n m^{n+1/2})_{i,j} + (\psi_y^n l^{n+1})_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + \text{Pr} \left(M_{i,j}^{n+1/2} + L_{i,j}^{n+1} + \text{Ra} g_{i,j}^{n+1} \right) \right] \\ &= F'_{i,j} + R'_{i,j} l_{i,j}^{n+1} + Q'_{i,j} L_{i,j}^{n+1}\end{aligned}\quad (3.2)$$

式中 $F'_{i,j}$, $R'_{i,j}$ 和 $Q'_{i,j}$ 亦为已知量, 可从 $n+1/2$ 时间层中的量求得。

方程(3.1)和(3.2)是用附录中公式(A.2)求解的。 Ω 在边界上的值可从流函数方程直接求得:

$$\begin{aligned}(\Omega^{n+1/2})_{X=0} &= -(\psi^n_{xx})_{X=0}; & (\Omega^{n+1/2})_{X=1} &= -(\psi^n_{xx})_{X=1} \\ (\Omega^{n+1})_{Y=0} &= -(\psi^n_{yy})_{Y=0}; & (\Omega^{n+1})_{Y=1} &= -(\psi^n_{yy})_{Y=1}\end{aligned}$$

为了计算一阶导数 $m_{i,j}^{n+1/2}$ 和 $l_{i,j}^{n+1}$ 的值, 利用样条基本关系式, 可直接求解包含一阶导数值的三对角方程组。而 $M_{i,j}^{n+1/2}$ 和 $L_{i,j}^{n+1}$ 是从方程(3.1)和(3.2)直接求得的, 如

$$M_{i,j}^{n+1/2} = \left[\Omega_{i,j}^{n+1/2} - F_{i,j} - R_{i,j} m_{i,j}^{n+1/2} \right] / Q_{i,j}$$

2. 能量方程的计算格式

第一步在 X 方向用隐式并利用附录中的公式(A.2)和给定的边界条件:

$$\theta_{x=0} = 0.5, \quad \theta_{x=1} = -0.5$$

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{n+1/2} &= \theta_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2} \left(-(\psi_Y g^{n+1/2})_{i,j} + (\psi_X k)_{i,j}^n + G_{i,j}^{n+1/2} + K_{j,i} \right) \\ &= F_{i,j} + R_{i,j} g_{i,j}^{n+1/2} + Q_{i,j} G_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.3a)$$

式中

$$G = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad k = \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \quad K = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}$$

第二步在 Y 方向用隐式, 可得

$$\theta_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}'' + R_{i,j}'' k_{i,j}^{n+1} + Q_{i,j}'' K_{i,j}^{n+1} \quad (3.3b)$$

所用的是附录中的公式(A.3), 因为给出的是绝热边界条件, 即 $(k)_{Y=0}^{n+1} = (k)_{Y=1}^{n+1} = 0$. 而 $\theta_{i,j}^{n+1}$ 可由下述递推关系式求得(下标中 i 已省略)

$$\theta_j^{n+1} = \frac{d_j - a_j \theta_{j-1}^{n+1}}{b_j}$$

而

$$\theta_0^{n+1} = \frac{d_0 b_1 - d_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}$$

式中

$$a_0 = 1 + 6Q_0''/h_1^2; \quad b_0 = 1 - a_0$$

$$d_0 = F_0'' + R_0'' k_0^{n+1} - Q_0'' \left(\frac{2k_1^{n+1} + 4k_0^{n+1}}{h_1} \right)$$

$$a_j = -6Q_j''/h_j^2; \quad b_j = 1 - a_j$$

$$d_j = F_j'' + R_j'' k_j^{n+1} + Q_j'' \left(\frac{2k_{j-1}^{n+1} + 4k_j^{n+1}}{h_j} \right)$$

$$h_j = Y_j - Y_{j-1} \text{ (网格距)}$$

3. 流函数方程的计算格式

流函数方程可以改写成Cauchy-Kowaleska方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi + \Omega$$

我们仍采用SADI方法求解, 其第一步为

$$\psi_{i,j}^{n+1/2} = \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} (L_{i,j}^n + \Omega_{i,j}^n) + \frac{\Delta t}{2} M_{i,j}^{n+1/2} = T_{i,j} + w_{i,j} M_{i,j}^{n+1/2} \quad (3.4)$$

而第二步为

$$\psi_{j,i}^{n+1} = \psi_{j,i}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} (M_{i,j}^{n+1/2} + \Omega_{i,j}^n) + \frac{\Delta t}{2} L_{i,j}^{n+1} \quad (3.5)$$

方程(3.4)和(3.5)可用类似于能量方程中的两步法求解. 因为相应的边界条件已经给出, 求解没有困难. 为了得到稳态解, 重复迭代直到收敛是必要的. 因为SADI方法对计算流函数

方程是无条件稳定的, 能够用大的时间步长。至于过程中的瞬态结果是无需表示出来的。

4. Nusselt数的计算

$$\bar{Nu}(X) = -\frac{\partial\theta}{\partial X} + U\theta \quad (3.6)$$

$$\bar{Nu}(X) = \int_0^1 Nu(X) dY \quad (3.7)$$

方程(3.6)中的第一项表示由传导引起的热输运, 第二项代表了由对流而产生的热输运, 它随着Ra的增大而增大。理论上讲, 在稳定状态之下, $\bar{Nu}(X)$ 是与X无关的, 并且就等于在竖直墙上所计算的值。但在数值近似求解中, 这个性质通常是不能被满足的, 也正是因为这样, $\bar{Nu}(X)$ 之间的最大差值又被利用来作为检验计算方法精度的一种手段。

四、数值结果与讨论

1. 瞬态流动

对于Pr=0.71到Pr=10的不同Prandtl数的情况, 我们实现了方形空腔中在Ra=10⁷和2×10⁷时的瞬态对流状态的数值计算(由条件Ra>Pr¹⁶知, 当Pr=2.7时, 流动仍属于状态Ⅶ, 但已接近其界限值)。所规定的初始条件是U=V=Ω=θ=0。为了在靠近墙的“边界层”区域中得到高精度的解, 我们应用了非均网格。对于21×21的网格, 从墙到中心线的空间网格距为h_{i+1}/h_i=1.28, 而对于31×31的网格, 我们取h_{i+1}/h_i=1.18。在涡量和能量方程中, 时间步长Δτ=10⁻⁵; 对于流函数方程, 虚设时间步长Δt=0.05。

按照Patterson^[2]的论述, 流体从零条件开始到稳定状态被分成为4个过渡区域, 其时间尺度和主要流动特性如下:

时间尺度		主要流动特征
$\tau_1 = Ra^{-0.5}$	(4.1)	热边界层和惯性入侵形成。
$\tau_2 = 1/(Pr^{1/3}Ra^{5/12})$	(4.2)	水平惯性入侵抵达对面墙, 内波运动开始。
$\tau_3 = Ra^{-0.25}$	(4.3)	空腔被水平层充满, 内波运动呈现。
$\tau_\infty = Rr^{-1}$	(4.4)	内波运动衰减到稳态。速度和温度边界层可区分, 流动由惯性主导, 热输运由对流主导。

而内波运动的周期为

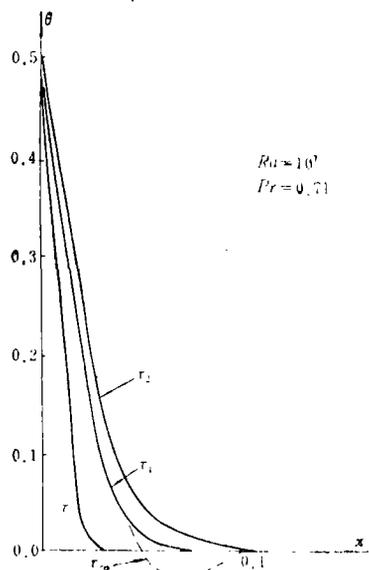
$$P = 2\pi\sqrt{2/Ra \cdot Pr} \quad (4.5)$$

对于Ra=10⁷, Pr=0.71的情况, 几种典型的瞬态流动特征如图2(a)~2(d)所示。瞬态对流特征非常类似于用分步样条方法所得到的结果。详细的讨论可参看[12]。

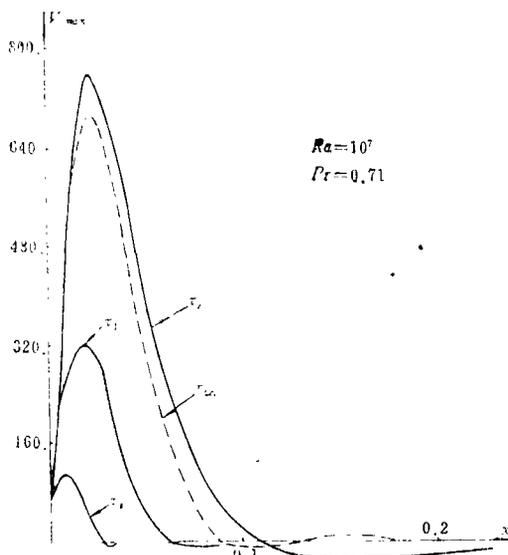
图2(a)给出了在水平中央面上的瞬态温度剖面。水平中央面上的速度剖面在图2(b)中给出, 在τ₀=0.0001时, 空腔的中心可看作是静止的, 随着时间的增长, 对流效应和中心部份的运动变得非常强烈。平均对流量对时间的依赖关系在图2(c)中给出, 它被定义为:

$$q_{cv} = \int_0^1 U\theta dY$$

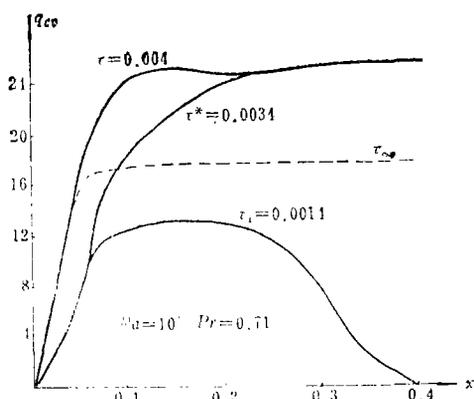
在热墙上和空腔中央面上的Nusselt数 \bar{Nu}_w 和 \bar{Nu}_c 随时间的变化规律已在图2(d)中给出。τ₂的值也标出在图上。可以看出, 用尺度分析结果来予估内波运动开始的时间是可行的。数值计算所得到内波运动的周期值(p=0.0038)与理论予估值(p=0.00334)也是吻合比较好的。



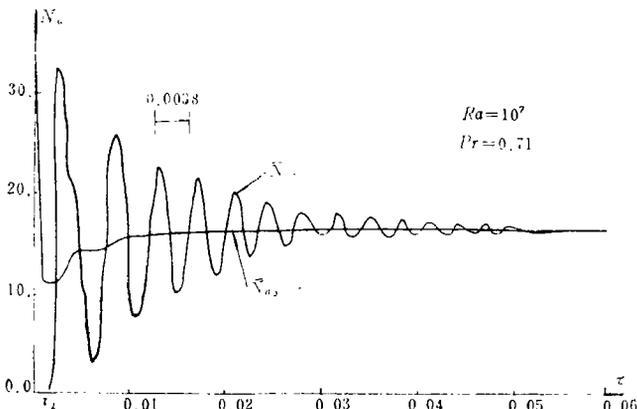
(a) 水平中央面上的温度剖面



(b) 水平中央面上的竖直速度剖面



(c) 平均对流热通量



(d) $\bar{N}u_c$ 和 $\bar{N}u_w$ 随时间的变化规律

图 2

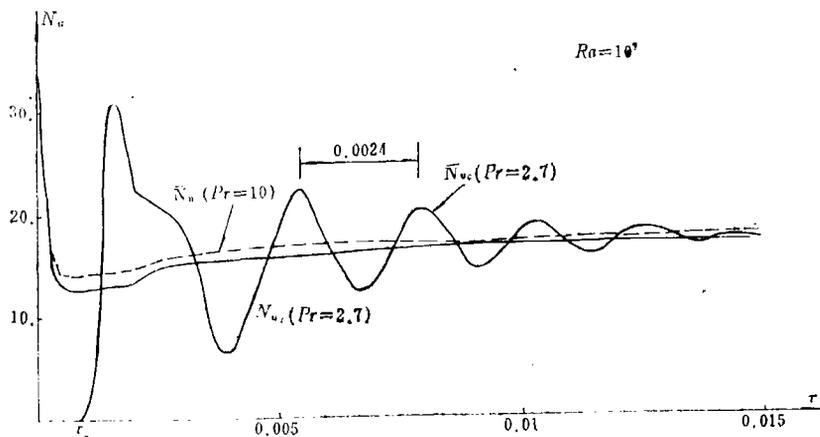


图 3 $\bar{N}u_c$ 随Pr的变化情况

图 3 给出了对于不同的Pr值随时间变化的状况。结合图2(d), 可以明显的看到, 随着Pr的增加, 内波运动的周期减小(比例系数约为: $p_2/p_1 = (Pr_1/Pr_2)^{0.5}$)。这也同理论予估值一致。而对于Pr=10(此时 $Pr^{16} \gg Pa$), $\overline{Nu_c}$ 随时间增长已不出现上述的振荡。而对于Pr=3的情况, 其流动状态与Pr=2.7时很类同(图中未画出), 尽管此时 $Pr^{16} > Ra$ 。这表明判别属于区域IV的条件, $Pr^{16} < Ra$, 并不是一个确切的界限, 拟是一个量级的限制。

对于 $Ra=2 \times 10^7$ 的情形, 图 4 给出了当Pr=2.7时 Nusselt 数随时间 τ 变化的状况。

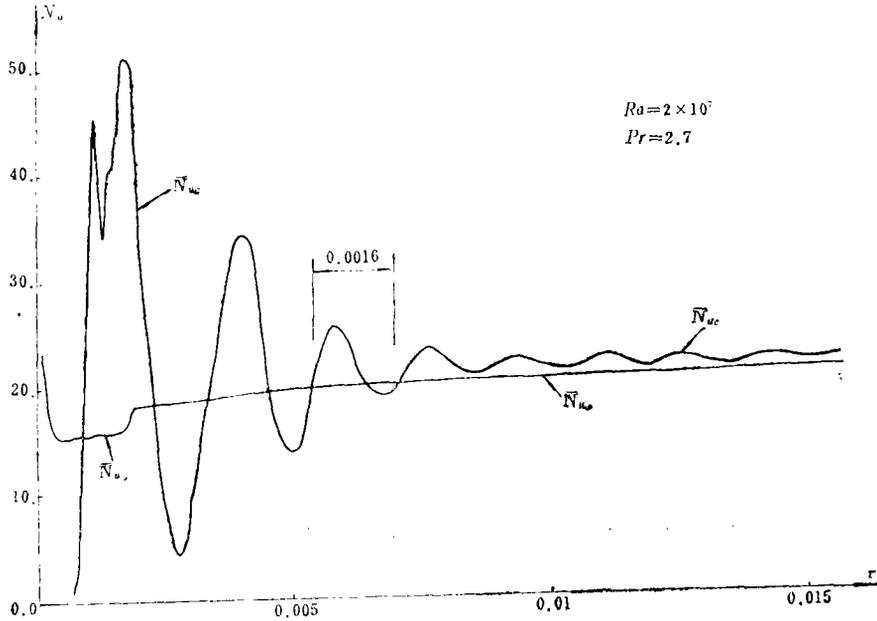


图 4 Nusselt 数随时间的变化规律

表 1 中给出了对应于 $Ra=10^7$ 和 $Pr=0.71$ 的稳态结果, 并与Upson^[13]用有限元方法求解相应的定常方程所得结果(引自[10]), Lauriat^[10]采用扩大能量方程计算时间步长所得结果(此时已无真正的瞬态解)及用分步样条方法^[12]求得的结果做了比较。

表 1 稳态数值结果比较 (Ra=10⁷, Pr=0.71)

网格点	ψ_c	V_{max}	U_{max}	Nu_w	Nu_c	Nu_{min}	Nu_{max}
31×31	29.48	710.27 X=0.0192	149.68 Y=0.873	16.73	16.68	1.425 Y=1	40.00 Y=0.0192
[12] 31×31	30.08	710.77 X=0.0192	150.16 Y=0.873	16.70	16.77	1.448 Y=1	39.00 Y=0.0192
[10] 31×31	29.08	697.28 X=0.0215	144.49 Y=0.860	16.66	16.34	1.387 Y=1	40.42 Y=0.017
[13]	—	728.23 X=0.0237	147.56 Y=0.888	16.34	—	1.416 Y=1	36.50 Y=0.011

表 2 给出了对应于 $Ra=2 \times 10^7$ 的稳态结果, 尚无公开发表的结果比较。表中 V_{max} 为水平中央面上的最大竖直速度; U_{max} 为竖直中央面上的最大水平速度; Nu_{min} 表示竖直墙上最小Nusselt数, Nu_{max} 为其最大值。 ψ_c 为中心处的流函数值。

表2

稳态数值结果

 $(Ra=2 \times 10^7, Br=2.7)$

网格点	ψ_c	V_{max}	U_{max}	Nu_w	Nu_c	Nu_{min}	Nu_{max}
21×21	41.28	1121.73 $X=0.030$	229.58 $Y=0.848$	21.49	22.16	1.742 $Y=-1$	49.88 $Y=0.030$

五、几点结论

对于 $Ra=10^7$ 和 $Ra=2 \times 10^7$, 瞬态对流数值解已得到. 该结果与理论予估值吻合很好.

SADI 方法是求解在高 Rayleigh 数情况下的方形空腔中非定常自然对流问题的一个有效方法. 三次样条近似的主要好处是:

(1) 所得到的支配矩阵系总是三对角形的.

(2) 由于一阶导数样条近似的截断误差是三阶的(对非均匀网格), 因此在数值计算中, 即使选用非均匀网格, 它也不引入数值粘性.

(3) 因为一阶导数和二阶导数可以直接求值, 包含导数的边界条件能够直接纳入到求解过程之中, 所以避免了常用有限差分格式在处理该类边界条件时所遇到的困难.

附 录

本节介绍文献 [8] 中的某些常用的公式结果. 例如, 当得到形如方程 (3.1) 的离散方程之后, 籍助于样条公式, 可以把方程 (3.1) 转换成仅包含在节点上的函数值, 或一阶导数值, 或者二阶导数值的三对角形方程组.

考虑如下的方程组:

$$u_i^{n+1} = F_i^{n+1} + R_i^{n+1} m_i^{n+1} + Q_i^{n+1} M_i^{n+1} \quad (\text{A.1})$$

(1) 可以把 (A.1) 转换成仅包含在节点上的函数值(时间层标记 $n+1$ 被省略, 下同)

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i \quad (i=1, N) \quad (\text{A.2})$$

式中

$$A_i = \frac{e_i h_i}{6c_i} - \frac{1}{h_i}$$

$$B_i = \frac{d_i h_i}{6c_i} + \frac{e_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{R_{i+1}(h_{i+1}^2 + 3R_i h_{i+1} - 6Q_i)}{36c_{i+1}} + \frac{h_1 + h_{i+1}}{h_i h_{i+1}}$$

$$C_i = \frac{d_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{R_i(2h_{i+1}^2 - 3R_{i+1} h_{i+1}) - 6Q_i(h_{i+1})}{36c_{i+1}} - \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$D_i = \frac{a_i h_i}{6c_i} + \frac{a_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3c_{i+1}} - \frac{F_{i+1}(2R_i h_{i+1}^2 - 6Q_i h_{i+1}) + F_i R_{i+1} h_{i+1}^2}{36c_{i+1}}$$

以及

$$a_i = \frac{F_i R_{i-1} h_i}{6} + F_{i-1} \left(\frac{R_i h_i}{3} + Q_i \right)$$

$$c_i = \frac{R_i R_{i-1} h_i^2}{36} - \frac{(R_i h_i + 3Q_i)(R_{i-1} h_i - 3Q_{i-1})}{9}$$

$$d_i = R_{i-1} \left(\frac{h_i}{6} - \frac{R_i}{2} - \frac{Q_i}{h_i} \right)$$

$$e_i = R_i \left(\frac{h_i}{3} + \frac{R_{i-1}}{2} \right) + Q_i \left(1 + \frac{R_{i-1}}{h_i} \right)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

(2) 仅包含一阶导数值的方程是:

$$A_i m_{i-1} + B_i m_i + C_i m_{i+1} = D_i \quad (i=1, N) \quad (\text{A.3})$$

式中

$$A_i = \frac{1}{3h_i} - \frac{2Q_i + 4Q_{i-1} - R_{i-1}h_i}{h^3_i \Delta_i}$$

$$B_i = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{2Q_{i+1} + 4Q_i - R_i h_{i+1}}{h^3_{i+1} \Delta_{i+1}} - \frac{2Q_{i-1} + 4Q_i + R_i h_i}{h^3_i \Delta_i}$$

$$C_i = \frac{1}{3h_{i+1}} - \frac{2Q_i + 4Q_{i+1} + R_{i+1}h_{i+1}}{h^3_{i+1} \Delta_{i+1}}$$

$$D_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h^2_{i+1} \Delta_{i+1}} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h^2_i \Delta_i}$$

$$\Delta_i = 1 + 6 \left(\frac{Q_i + Q_{i-1}}{h^2_i} \right)$$

(3) 仅包含二阶导数值的方程是:

$$A_i M_{i+1}^{n+1} + B_i M_i^{n+1} + C_i M_{i-1}^{n+1} = D_i \quad (i=1, N) \quad (\text{A.4})$$

式中

$$A_i = \frac{h_i}{6} + \frac{R_i + 2R_{i-1}}{6\Delta_i} - \frac{Q_{i-1}}{h_i \Delta_i}$$

$$B_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3} - \frac{R_{i+1} + 2R_i}{6\Delta_{i+1}} + \frac{2R_i + R_{i-1}}{6\Delta_i} + Q_i \left(\frac{1}{\Delta_{i+1} h_{i+1}} + \frac{1}{\Delta_i h_i} \right)$$

$$C_i = \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{2R_{i+1} + R_i}{6\Delta_{i+1}} - \frac{Q_{i+1}}{h_{i+1} \Delta_{i+1}}$$

$$D_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta_{i+1} h_{i+1}} - \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta_i h_i}$$

$$\Delta_i = 1 - \frac{R_i - R_{i-1}}{h_i}$$

参 考 文 献

- [1] Patterson, J. and J. Imberger, Unsteady natural convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.*, 100 (1980), 65—86.
- [2] Patterson, J. C., On the existence of an oscillatory approach to steady natural convection in cavities, *ASME Journal of Heat Transfer*, 106 (1984), 104—108.
- [3] Rubin, S. G. and R. A. Graves, Viscous flows solutions with a cubic spline approximation, *Computer and Fluids*, 3 (1975), 1—36.
- [4] Rubin, S. G. and P. K. Khosla, Higher order numerical solutions using cubic splines, *AIAA Journal*, 14 (1976), 851—858.
- [5] Wang, P. and R. Kahawita, Numerical integration of partial differential equations using cubic splines, *Int. J. Computer Math.*, 13 (1983), 271—286.
- [6] 王璞, R. Kahawita, Burgers 方程的立方样条数值解法, *空气动力学学报*, 2 (1984), 11—18.
- [7] 王璞, 样条Lax-Wandroff格式和样条跳蛙格式, *空气动力学学报*, 3 (1985), 90—95.
- [8] Wang, P. and R. Kahawita, A two-dimensional model of estuarine circulation using cubic splines, *Can. J. Civil Eng.*, 10 (1983), 116—124.
- [9] De Vahl Davis, G., Natural convection of air, a square cavity; an accurate numerical solution, *Report FMT/1, University of N. S. W.*, Kensington, Australia (1981).
- [10] Lauriat, G., Accurate solutions of natural convection flow in square cavities at high

- Rayleigh numbers with a cubic spline approximation, ASME Winter Annual Meeting, Phoenix, Arizona (1982).
- [11] Wang, P. and R. Kahawita, The numerical solution of the natural convection flow in a square cavity, *Proc. of 4th Int. Conf. on Mathematical Modelling in Science and Technology*, Zurich, Aug. 24—26 (1983), 640—645.
- [12] 王璞, 方形空腔中关于 $Ra=10^7$ 的非定常自然对流的样条数值模拟, 力学学报(待发表).
- [13] Upson, C. D., P. M. Greho and R. L. Lee, Finite element simulations of thermally induced convection in an enclosed cavity, *Report UCID 18602*, Lawrence Livermore Laboratory, Mars (1980).

The Numerical Solution of the Unsteady Natural Convection Flow in a Square Cavity at High Rayleigh Number Using SADI Method

Wang Pu

(Lanzhou University, Lanzhou)

R. Kahawita

(Ecole Polytechnique de Montreal, Canada)

Abstract

The unsteady natural convection flow in a square cavity at high Rayleigh number $Ra=10^7$ and 2×10^7 has been computed using cubic spline integration. The required solutions to the two dimensional Navier-Stokes and energy equations have been obtained using two alternate numerical formulations on non-uniform grids. The main features of the transient flow have been briefly discussed. The results obtained by using the present method are in good agreement with the theoretical predictions^(1,2). The steady state results have been compared with accurate solutions presented recently for $Ra=10^7$.