

# 波纹圆薄板的非线性振动\*

王新志 王林祥 胡小方

(甘肃工业大学, 1986年5月26日收到)

## 摘 要

本文首先用最小作用量原理<sup>[1]</sup>推导出波纹圆薄板的变分方程。选取波纹圆薄板中心最大振幅为摄动参数, 采用摄动变分法, 一次近似求得了波纹板线性振动时的固有频率, 继之求得了波纹板的非线性固有频率。通过和线性结果比较, 证实了本文的尝试是可行的。

## 一、引 言

波纹圆薄板在精密仪器的灵敏弹性元件中起着很重要的作用, 而这些弹性元件的动力学问题的研究学者并不多。造成这种状况的原因: 一是板的大变形方程是非线性的, 精确解是难以找出的, 直到现在只是在静平衡状态下求近似解也是不容易的<sup>[2,3,4]</sup>; 二是波纹板本身形体复杂, 参数较多<sup>[5,6]</sup>, 再加上惯性力项, 使问题变得难度更大。本文是在我们文[4,7]基础上进一步考虑动力学问题。我们知道波纹圆薄板在径向和切向有很不相同的刚度, 从结构上讲类似于各向异性圆平板。本文就是以各向异性板来代替波纹板<sup>[6]</sup>, 给出不同参数就可得到正弦波、锯齿波、梯形波等类型板的动力学问题。我们用摄动变分法<sup>[8,9,10,11,12]</sup>, 给出波纹圆薄板非线性固有频率的近似表达式, 且由此结果可给出圆平板的非线性固有频率表达式。

## 二、波纹圆薄板的混合问题

本问题有三种势能<sup>[1]</sup>

$$\text{弯曲势能} \quad V_1 = \int_0^a \frac{1}{2} (M_r K_r + M_\theta K_\theta) 2\pi r dr \quad (2.1)$$

$$\text{薄膜应变能} \quad V_2 = \int_0^a \frac{1}{2} (N_r \varepsilon_r + N_\theta \varepsilon_\theta) 2\pi r dr \quad (2.2)$$

$$\text{载荷所失去的势能} \quad V_3 = - \int_0^a q w 2\pi r dr \quad (2.3)$$

$$\text{板的动能为} \quad T = \frac{1}{2} \int_0^a \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 2\pi r dr \quad (2.4)$$

\* 叶开沅推荐。本文曾在全国第二届振动会议上宣读 (西安, 1984)。

其中:  $a$  为波纹圆薄板的半径,  $\rho$  为板每单位面积体中的质量。

由文[5、6]知:

$$M_r = -Dk_2^{-1} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.5a)$$

$$M_\theta = -Dk_2^{-1} \left( \lambda^2 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (2.5b)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = (k^2 N_r - \mu N_\theta) / E h k_2 \quad (2.6a)$$

$$\varepsilon_\theta = u/r = (N_\theta - \mu N_r) / E h k_2 \quad (2.6b)$$

而 
$$K_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad K_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

其中:  $\lambda^2 = k_1' k_2'$ ,  $k^2 = k_1 k_2$ ,  $D = E h^3 / 12 (\lambda^2 - \mu^2)$ ,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_1'$ 、 $k_2'$  是与波纹板径向, 切向有关的参数。

根据最小作用量原理 (哈密顿原理)

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} (T - V_1 - V_2 - V_3) dt \quad (2.7)$$

应取驻值。

对于振动的波纹圆薄板而言,  $w(r, t)$  应是一个周期函数

$$w(r, t) = y(r) \cos \omega t \quad (2.8)$$

其中  $\omega$  是周期运动的固有频率,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  为频率, 由于相角不影响我们对问题的讨论, 这里取相角为零。

取  $t_1 - t_2$  正好是一个周期  $2\pi/\omega$ , 且令  $\tau = \omega t$ , 则

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} (T - V_1 - V_2 - V_3) d\tau \\ &= \frac{\pi}{\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ \rho \omega^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + 2qw + M_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + M_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. - N_r \varepsilon_r - N_\theta \varepsilon_\theta \right\} r dr d\tau = \frac{\pi}{\omega} \Pi_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

由变分得

$$\delta \Pi = 0 \text{ 或 } \delta \Pi_1 = 0 \quad (2.10)$$

本文只准备找出波纹圆薄板在固定边界条件下的非线性固有振动频率, 在此情况下, 由(2.10)可得:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ Dk_2^{-1} L(w) - q - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right] \delta w r dr d\tau + \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_\theta \right] \delta u r dr d\tau = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

由于  $\delta w$ 、 $\delta u$  具有任意性, 故可得

$$Dk_2^{-1} L(w) = q + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \rho \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) - N_\theta = 0 \tag{2.12b}$$

其中 
$$L = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\lambda^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r}$$

方程(2.12)便是波纹圆板在轴称变形下的非线性动力学方程。

由(2.6a)、(2.6b)、(2.12b)可得协调方程

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rN_r) + \frac{\partial}{\partial r}(rN_r) - \frac{k^2(rN_r)}{r} = -\frac{1}{2}k^2Eh\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{2.13}$$

通常在下面边界条件下求解:

1) 周边固定夹紧

当  $r=a$  时,  $w=0, \partial w/\partial r=0, \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - \mu N_r=0$  (2.14a,b,c)

当  $r=0$  时,  $w, \partial w/\partial r, N_r$  有限 (2.15a,b,c)

2) 周边可移夹紧

当  $r=a$  时,  $w=0, \partial w/\partial r=0, N_r=0$  (2.16a,b,c)

当  $r=0$  时,  $w, \partial w/\partial r, N_r$  有限 (2.17a,b,c)

3) 周边简单支撑

当  $r=a$  时,  $w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, N_r=0$  (2.18a,b,c)

当  $r=0$  时,  $w, \partial w/\partial r, N_r$  有限 (2.19a,b,c)

设  $y_0$  为中心最大振幅, 取初始条件为

$$w(r, 0)=y(r), \quad \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t}=0 \tag{2.20a,b}$$

其中  $y(0)=y_0$ 。

由初始条件(2.20), 在边界条件(2.14)、(2.15)、(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.19)的任意一种情况下来解方程(2.12)都是难办到的。下面我们将找近似解。

### 三、问题的求解

我们从变分方程中去寻求混果问题的近似解。由(2.12b)可知, 要想使(2.11)式成立, 必须使下式成立

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ DK_2^{-1}L(w) - q - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho\omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \delta w r dr d\tau = 0 \tag{3.1}$$

我们的问题就是在边界条件(2.14)、(2.15)下, 求解方程(2.13)、(3.1)。

取  $S=rN_r$ ,

则(2.13)、(3.1)变为

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ DK_2^{-1}L(w) - q - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( S \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho\omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \delta w r dr d\tau = 0 \tag{3.2a}$$

$$r \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{k^2 S}{r} = -\frac{1}{2}k_2 Eh \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \tag{3.2b}$$

固定边界条件为

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{\mu}{r} S=0 \quad (3.3a, b, c)$$

$$\text{当 } r=0 \text{ 时, } w=y_0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0, \quad S=0 \quad (3.4a, b, c)$$

初始条件为

$$w(r, 0)=y(r) \quad \frac{\partial w(r, 0)}{\partial \tau}=0 \quad (3.5a, b)$$

取  $q$  为与时间无关的均布载荷

$$S=N\cos^2\tau \quad (3.6)$$

$$\text{令 } x=\frac{r}{a}, \quad \bar{y}=\frac{y}{h}, \quad \bar{N}=\frac{k_2 a N}{D}, \quad \bar{\rho}=\frac{D}{k_2 a^4} \bar{\rho}$$

由 (3.2) 式可得

$$\int_0^1 \left\{ L_1(\bar{y}) - \bar{\rho} \omega^2 \bar{y} - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{N} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) \right\} \delta \bar{y} x dx = 0 \quad (3.7a)$$

$$L_2(\bar{N}) = -\alpha \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \quad (3.7b)$$

边界条件为

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \bar{y}=0, \quad d\bar{y}/dx=0, \quad d\bar{N}/dx - \mu \bar{N}=0 \quad (3.8a, b, c)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } \bar{y}=\bar{y}_0, \quad d\bar{y}/dx=0, \quad \bar{N}=0 \quad (3.9a, b, c)$$

其中

$$L_1 = \frac{d^4}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3}{dx^3} - \frac{\lambda^2}{x^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{x^3} \frac{d}{dx}$$

$$L_2 = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{k^2}{x}$$

$$\alpha = 6(\lambda^2 - \mu^2) k_2^2$$

我们给出  $\bar{y}$ 、 $\bar{N}$  和  $\omega^2$  的级数表达式

$$\bar{y} = \bar{y}_1 \bar{y}_0 + \bar{y}_3 \bar{y}_0^3 + \bar{y}_5 \bar{y}_0^5 + \dots \quad (3.10)$$

$$\bar{N} = \bar{N}_2 \bar{y}_0^2 + \bar{N}_4 \bar{y}_0^4 + \bar{N}_6 \bar{y}_0^6 + \dots \quad (3.11)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + m_2 \bar{y}_0^2 + m_4 \bar{y}_0^4 + \dots) \quad (3.12)$$

这里,  $\omega_0$  是线性振动固有频率,  $\omega$  是非线性振动固有频率. 为书写方便, 将字母上的横线去掉. 将 (3.10)、(3.11)、(3.12) 代入 (3.7)、(3.8)、(3.9), 收集  $y_0$  同次幂项可得一系列边值问题:

一次近似边值问题:

$$\int_0^1 [L_1(y_1) - \rho \omega_0^2 y_1] y_1 x dx = 0 \quad (3.13a)$$

$$L_2(N_2) = -\alpha \left( \frac{dy_1}{dx} \right)^2 \quad (3.13b)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y_1=0, \quad dy_1/dx=0, \quad dN_2/dx - \mu N_2=0 \quad (3.14a, b, c)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y_1=1, \quad dy_1/dx=0, \quad N_2=0 \quad (3.15a, b, c)$$

二次近似边值问题:

$$\int_0^1 \left\{ 3[L_1(y_1) - \rho\omega^2 y_1]y_3 + [L_1(y_3) - \rho\omega_0^2 y_3 - \rho m_2 \omega_0^2 y_1 - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( N_2 \frac{dy_1}{dx} \right)] y_1 \right\} x dx = 0 \quad (3.16a)$$

$$L_2(N_4) = -2\alpha \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_3}{dx} \quad (3.16b)$$

当  $x=1$  时,  $y_3=0, dy_3/dx=0, dN_4/dx - \mu N_4=0$  (3.17a, b, c)

当  $x=0$  时,  $y_3=0, dy_3/dx=0, N_4=0$  (3.18a, b, c)

三次近似边值问题:

$$\int_0^1 \left\{ 5[L_1(y_1) - \rho\omega_0^2 y_1]y_6 + 3[L_1(y_3) - \rho\omega_0^2 y_3 - \rho m_2 \omega_0^2 y_1 - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( N_2 \frac{dy_1}{dx} \right)] y_3 + [L_1(y_6) - \rho\omega_0^2 y_6 - \rho m_2 \omega_0^2 y_3 - \rho\omega_0^2 m_4 y_1 - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( N_2 \frac{dy_3}{dx} + N_4 \frac{dy_1}{dx} \right)] y_1 \right\} x dx = 0 \quad (3.19a)$$

$$L_2(N_6) = -\alpha \left( \frac{dy_3}{dx} \right)^2 - 2\alpha \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_6}{dx} \quad (3.19b)$$

当  $x=1$  时,  $y_6=0, dy_6/dx=0, dN_6/dx - \mu N_6=0$  (3.20a, b, c)

当  $x=0$  时,  $y_6=0, dy_6/dx=0, N_6=0$  (3.21a, b, c)

板的基本模式应是板内没有结点线的模式。

(一) 取  $y_1 = (1-x^{2\lambda})^2$

在下面计算中,  $y_1 = (1-x^{2\lambda})^2$  (3.22)

由(3.13a)可得

$$\omega_0^2 = \frac{8\lambda^3}{\rho} \left[ \frac{5\lambda-1}{4\lambda-1} - \frac{\lambda-1}{2\lambda-1} \right] / \left[ \frac{1}{2(4\lambda+1)} - \frac{2}{3\lambda+1} \right] + \frac{3}{2\lambda+1} - \frac{2}{\lambda+1} + \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

这就是波纹圆薄板线性固有频率的近似值。

取  $k_2=1, \lambda=1$  时, 可得

$$\omega_0 = 10.33\alpha^{-2} \sqrt{D/\rho} \quad (3.24)$$

这便是圆薄板在周边夹紧固定条件下的最低固有频率的近似值, 和文[8]结果完全一致。

将  $y_1$  代入(3.13b)由边界条件(3.14c)、(3.15c)可得

$$N_2 = -16\alpha\lambda^2 [A_1 x^{3\lambda-1} - A_2 x^{3\lambda-1} + A_3 x^{4\lambda-1} + A_4 x^2] \quad (3.25)$$

其中  $A_1 = \frac{1}{(8\lambda-1)^2 - k^2}$       $A_2 = \frac{2}{(6\lambda-1)^2 - k^2}$       $A_3 = \frac{1}{(4\lambda-1)^2 - k^2}$

$$A_4 = -\frac{8\lambda-1-\mu}{k-\mu} A_1 + \frac{6\lambda-1-\mu}{k-\mu} A_2 - \frac{4\lambda-1-\mu}{k-\mu} A_3$$

将  $y_1$ 、 $N_2$  代入(3.16a), 其它没取的  $y_3$ 、 $N_4$  视为零, 可得

$$\begin{aligned} m_2 \omega_0^3 = & \frac{3}{4} \left\{ 64\alpha\lambda^3 \left[ 2A_1(6\lambda-1) \left( \frac{1}{16\lambda-2} - \frac{2}{14\lambda-2} + \frac{1}{12\lambda-2} \right) \right. \right. \\ & - 2(A_1+A_2)(5\lambda-1) \left( \frac{1}{14\lambda-2} - \frac{2}{12\lambda-2} + \frac{1}{10\lambda-2} \right) \\ & + 2(A_2+A_3)(4\lambda-1) \left( \frac{1}{12\lambda-2} - \frac{2}{10\lambda-2} + \frac{1}{8\lambda-2} \right) \\ & - 2A_3(3\lambda-1) \left( \frac{1}{10\lambda-2} - \frac{2}{8\lambda-2} + \frac{1}{6\lambda-2} \right) \\ & + A_4(k+4\lambda-1) \left( \frac{1}{8\lambda-1+k} - \frac{2}{6\lambda-1+k} + \frac{1}{4\lambda-1+k} \right) \\ & \left. \left. - A_4(k+2\lambda-1) \left( \frac{1}{6\lambda-1+k} - \frac{2}{4\lambda-1+k} + \frac{1}{2\lambda-1+k} \right) \right] \right\} / \\ & \left[ \rho \left( \frac{1}{8\lambda+2} - \frac{4}{6\lambda+2} + \frac{6}{4\lambda+2} - \frac{4}{2\lambda+2} + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

将(3.23)、(3.26)代入(3.12)得到非线性固有频率的二次近似值

$$\omega^2 = \omega_0^2 + m_2 \omega_0^3 y_0^2 \quad (3.27)$$

(二) 取  $y_1 = (1-x^{2\lambda})^2$ ,  $y_3 = x^{2\lambda}(1-x^{2\lambda})^2$

在下面计算中

$$y_1 = (1-x^{2\lambda})^2, \quad y_3 = x^{2\lambda}(1-x^{2\lambda})^2 \quad (3.28a, b)$$

同样将  $y_1$  代入(3.13a), (3.13b)可得(3.23), (3.25).

将  $y_1$ ,  $y_3$ ,  $N_2$  代入(3.16a)求得

$$\begin{aligned} m_2 \omega_0^3 = & \left\{ 4\lambda(3\lambda-1) \left[ 3(5\lambda-1)(11\lambda-3) \left( \frac{1}{5\lambda-1} - \frac{2}{4\lambda-1} + \frac{1}{3\lambda-1} \right) \right. \right. \\ & - 2(23\lambda^2-20\lambda+5) \left( \frac{1}{4\lambda-1} - \frac{2}{3\lambda-1} + \frac{1}{2\lambda-1} \right) \\ & \left. \left. + (\lambda-1)^2 \left( \frac{1}{3\lambda-1} - \frac{2}{2\lambda-1} \right) + \lambda-1 \right] \right. \\ & - 4\rho\omega_0^3 \left( \frac{1}{5\lambda+1} - \frac{4}{4\lambda+1} + \frac{6}{3\lambda+1} - \frac{4}{2\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \\ & + 48\alpha\lambda^3 \left[ 2A_1(6\lambda-1) \left( \frac{1}{8\lambda-1} - \frac{2}{7\lambda-1} + \frac{1}{6\lambda-1} \right) \right. \\ & - 2(A_1+A_2)(5\lambda-1) \left( \frac{1}{7\lambda-1} - \frac{2}{6\lambda-1} + \frac{1}{5\lambda-1} \right) \\ & \left. \left. + 2(A_2+A_3)(4\lambda-1) \left( \frac{1}{6\lambda-1} - \frac{2}{5\lambda-1} + \frac{1}{4\lambda-1} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2A_3(3\lambda-1)\left(\frac{1}{5\lambda-1}-\frac{2}{4\lambda-1}+\frac{1}{3\lambda-1}\right) \\
 & +2A_4(k+4\lambda-1)\left(\frac{1}{8\lambda-1+k}-\frac{2}{6\lambda-1+k}+\frac{1}{4\lambda-1+k}\right) \\
 & -2A_4(k+2\lambda-1)\left(\frac{1}{6\lambda-1+k}-\frac{2}{4\lambda-1+k}+\frac{1}{2\lambda-1+k}\right)\Bigg\}/ \\
 & \left[\rho\left(\frac{1}{4\lambda+1}-\frac{4}{3\lambda+1}+\frac{6}{2\lambda+1}-\frac{4}{\lambda+1}+1\right)\right] \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

将  $y_1$ 、 $y_3$  代入 (3.16b) 可得

$$L_2(N_4) = -16\alpha\lambda^2(3x^{10\lambda-2} - 7x^{8\lambda-2} + 5x^{6\lambda-2} - x^{4\lambda-2}) \quad (3.30)$$

根据边界条件 (3.17c)、(3.18c) 解得

$$N_4 = -16\alpha\lambda^2(A_5x^{10\lambda-1} - A_6x^{8\lambda-1} + A_7x^{6\lambda-1} - A_8x^{4\lambda-1} + A_9x^k) \quad (3.31)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \frac{3}{(10\lambda-1)^2-k}, & A_6 &= \frac{7}{(8\lambda-1)^2-k^2} \\
 A_7 &= \frac{5}{(6\lambda-1)^2-k^2}, & A_8 &= \frac{1}{(4\lambda-1)^2-k^2} \\
 A_9 &= \frac{10\lambda-1-\mu}{\mu-k} A_5 - \frac{8\lambda-1-\mu}{\mu-k} A_6 + \frac{6\lambda-1-\mu}{\mu-k} A_7 - \frac{4\lambda-1-\mu}{\mu-k} A_8
 \end{aligned}$$

将  $y_1$ 、 $y_3$ 、 $N_2$ 、 $N_4$  代入 (3.19a)，经计算可得

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 m_4 &= \left\{ 3 \left[ 12\lambda(3\lambda-1)(5\lambda-1)(7\lambda-1) \left( \frac{1}{6\lambda-1} - \frac{2}{5\lambda-1} + \frac{1}{4\lambda-1} \right) \right. \right. \\
 & - 16\lambda(2\lambda-1)(3\lambda-1)(5\lambda-1) \left( \frac{1}{5\lambda-1} - \frac{2}{4\lambda-1} + \frac{1}{3\lambda-1} \right) \\
 & \left. \left. + 4\lambda(\lambda-1)^2(3\lambda-1) \left( \frac{1}{4\lambda-1} - \frac{2}{3\lambda-1} + \frac{1}{2\lambda-1} \right) \right] \right. \\
 & - 3\rho\omega_0^2 \left( \frac{1}{6\lambda+1} - \frac{4}{5\lambda+1} + \frac{6}{4\lambda+1} - \frac{4}{3\lambda+1} + \frac{5}{2\lambda+1} \right) \\
 & - 4\rho\omega_0^2 m_2 \left( \frac{1}{5\lambda+1} - \frac{4}{4\lambda+1} + \frac{6}{3\lambda+1} - \frac{4}{2\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \\
 & + 24\alpha\lambda^3 \left[ 2(57A_1\lambda - 9A_1 + 14A_6\lambda - 2A_6) \left( \frac{1}{9\lambda-1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{8\lambda-1} + \frac{1}{7\lambda-1} \right) - 2(54A_1\lambda - 10A_1 + 48A_2\lambda - 9A_2 \right. \\
 & \left. + 12A_6\lambda - 2A_6 + 12A_6\lambda - 2A_6) \left( \frac{1}{8\lambda-1} - \frac{2}{7\lambda-1} + \frac{1}{6\lambda-1} \right) \right. \\
 & \left. + 2(5A_1\lambda - A_1 + 44A_2\lambda - 10A_2 + 39A_3\lambda - 9A_3 + 10A_6\lambda \right. \\
 & \left. - 2A_6 + 10A_7\lambda - 2A_7) \left( \frac{1}{7\lambda-1} - \frac{2}{6\lambda-1} + \frac{1}{5\lambda-1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(4A_2\lambda - A_2 + 34A_3\lambda - 10A_3 + 8A_7\lambda - 2A_7 \\
& + 8A_8\lambda - 2A_8) \left( \frac{1}{6\lambda-1} - \frac{2}{5\lambda-1} + \frac{1}{4\lambda-1} \right) \\
& + 2(3\lambda-1)(A_3 + 2A_3) \left( \frac{1}{5\lambda-1} - \frac{2}{4\lambda-1} + \frac{1}{3\lambda-1} \right) \\
& + 6(14\lambda + 3k - 3)A_4 \left( \frac{1}{10\lambda-1+k} - \frac{2}{8\lambda-1+k} + \frac{1}{6\lambda-1+k} \right) \\
& - 4(14A_4\lambda + 5A_4k - 5A_4 - 4A_9\lambda - A_9k + A_9) \\
& \cdot \left( \frac{1}{8\lambda-1+k} - \frac{2}{6\lambda-1+k} + \frac{1}{4\lambda-1+k} \right) + 2(2\lambda-1+k)(A_4 - 2A_9) \\
& \cdot \left( \frac{1}{6\lambda-1+k} - \frac{2}{4\lambda-1+k} + \frac{1}{2\lambda-1+k} \right) \Big] / \\
& \left[ \rho \left( \frac{1}{4\lambda+1} - \frac{4}{3\lambda+1} + \frac{6}{2\lambda+1} - \frac{4}{\lambda+1} + 1 \right) \right] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

由上面可得非线性固有频率三次近似特征关系式

$$\omega^2 = \omega_0^2 + m_2 \omega_0^2 y_0^2 + m_4 \omega_0^2 y_0^4 \quad (3.33)$$

当取  $\lambda = k_2 = k = 1$  时, 就可得到等厚度圆薄板的非线性固有频率, 由式(3.26)可得

$$m_2 \omega_0^2 = \frac{5Eh(23-9\mu)}{42\rho a^4(1-\mu)} = \frac{10(1+\mu)(23-9\mu)D}{7\rho a^4 h^2} \quad (3.34)$$

这样, 由(3.24)、(3.34)可得周边固定圆薄板的非线性固有频率二次近似特征关系式

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{3(1+\mu)(23-9\mu)}{224} \bar{y}_0^2 \right] \quad (3.35)$$

其中  $\bar{y}_0 = y_0/h$ .

下面给出

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{3(1+\mu)(23-9\mu)}{224} \bar{y}_0^2}$$

的特征曲线。取  $\mu = 0.3$ , 可得

$$\omega/\omega_0 = \sqrt{1 + 0.3534375 \bar{y}_0^2} \quad (3.36)$$

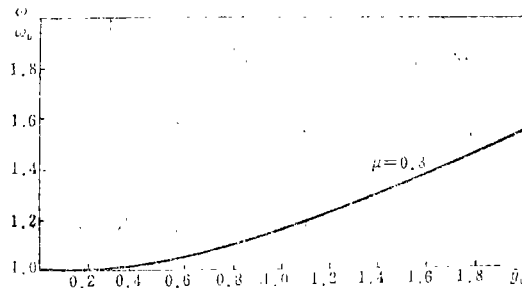


图 1

由图 1 我们看出, 非线性固有频率随最大振幅增长而增长。当  $\bar{y}_0 = 1$  时, 即  $y_0 = h$  时,  $\omega$  超过了由线性理论计算得到的固有频率的 13.6%, 由此我们得出, 对于薄板变形较大的动力问题考虑非线性是很必要的。



## 四、讨 论

目前用正规和奇异摄动理论研究离散系统动力学问题较多,对于连续介质系统很少有人研究,当然对弹性结构的非线性固有频率研究的就更少,工程中有实际意义的是低固有频率。波纹板、圆薄板在谐振压力传感器中应用较广,为了工程上的需要、我们用摄动变分法进行了初步探讨。由本文(3.24)、(3.29)、(3.32)式取 $\lambda=k_2=k=1$ 还可以得到圆薄板固有频率改善的三次近似值。取不同的 $\lambda$ 、 $k_2$ 、 $k$ 值还可以得到不同类型的波纹板的非线性固有频率的改善近似值。工程上可参考本文提供的非线性固有频率特征关系式。

### 参 考 文 献

- [1] 钱伟长,《变分法及有限元》,上册,科学出版社(1980)。
- [2] 刘人怀,波纹圆板的特征关系式,力学学报,1(1978)。
- [3] 陈山林,浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征,应用数学和力学,1,2(1980)。
- [4] 王新志,波纹圆板在均布载荷下的弹性特征,全国第六届弹性元件学术论文集(1981)。
- [5] B. N. 费奥多谢夫,《精密仪器弹性元件的理论与计算》,科学技术出版社(1963)。
- [6] Бурмистров Е. Ф., *Инженерный Сборник*, 27(1960)。
- [7] 叶开沅、王新志、胡小方,波纹板在非均匀温度场内的非线性问题(待发表)。
- [8] S. 铁摩辛柯等著,《工程中的振动问题》,人民铁道出版社(1978)。
- [9] A. C. 沃耳密尔著,《柔韧板与柔韧壳》,科学出版社(1959)。
- [10] 谢志诚等,在材料非线性问题中的摄动有限元法,应用数学和力学,4,1(1983),123—134。
- [11] Arun, K. N. and L. M. Bernard, A perturbation solution of rectangular orthotropic plates, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 16, 5/6(1981), 401—408。
- [12] Pen, L. Z. and S. Wang, A perturbation-variational solution of the large deflection of rectangular plates under uniform load, *Proceedings of ICNM.*, Science Press, Beijing, China(1985)。

## Non-Linear Vibration of Circular Corrugated Plates

Wang Xin-zhi Wang Lin-xiang Hu Xiao-fang

(Gansu University of Technology, Lanzhou)

### Abstract

In this paper, first by using Hamilton principle, we derive the variational equation of circular corrugated plates. Taking the central maximum amplitude of circular corrugated plates as the perturbation parameter and adopting the perturbation variational method, in the first-order approximation, we obtain the natural frequency of linear vibration of circular corrugated plates and then the non-linear natural frequency of the corrugated plates. By comparing with the linear results, the attempt of this paper is proved feasible.