

# 旋转双球和多球的Stokes流动

吴望一 何筱毅

(北京大学力学系, 1985年10月2日收到)

## 摘 要

本文首先导出一类新旋转子的表达式, 利用该旋转子的迭加, 得到了双球和多球同轴旋转时所受的阻力矩, 并证明了阻力矩是各球旋转角速度线性函数的结论。

## 一、引 言

自从七十年代以来, 生物力学及化学工程得到了迅速发展, 低雷诺数流动越来越为人们所重视。近十余年来, 低雷诺数轴对称和三维流动已得到相当进展。Tuck<sup>[1]</sup>, Batchelor<sup>[2]</sup>和Cox<sup>[3]</sup>利用Stokes流子在轴上的连续分布首先得到了细长体Stokes流动的解。Weinbaum, Pfeffer<sup>[4]</sup>等人利用Sampson流子成功地处理了多球的无界轴对称绕流, 无界圆管内圆球串的轴对称绕流, 两板间的三维有界流动等问题。吴望一<sup>[5~10]</sup>等利用在物体内部将Sampson流子离散地或连续地沿某给定线段或某给定曲面分布的方法处理了长、扁球, 长、扁卡西尼卵形体, 红细胞及任意三维物体的Stokes流动问题, 取得了收敛性及精度都十分理想的结果。以上问题都不曾考虑物体的旋转。Chwang和吴耀祖<sup>[11]</sup>利用两个Stokes旋转子得到了哑铃状物体旋转问题的分析解。他在文章中指出, 利用Stokes旋转子, 四极子, 八极子等沿轴向连续分布, 估计能解决任意轴对称体的旋转问题, 但是未具体地付之实现。

对于轴对称体旋转问题, 本文首先导出一类新的Stokes方程的普遍解, 它代表圆球旋转时对流场的扰动, 称之为Sampson旋转子。利用这类新型旋转子的迭加, 本文处理了半径不同的双球在不同间距下的任意旋转问题以及多球的旋转问题, 得到了收敛性及精度都很好的结果。预计本方法还可用来解决任意轴对称旋转问题, 半空间中和圆管内圆球及任意轴对称体的旋转等问题。

## 二、一类新型轴对称旋转子

取 $L$ ,  $U$ ,  $\mu U/L$ 为特征长度, 速度和压力, 其中 $L$ 是问题中出现的特征尺度,  $U$ 是来流速度,  $\mu$ 是粘性系数。于是无量纲形式的Stokes方程为

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

式中 $\mathbf{v}$ 和 $p$ 分别为无量纲速度矢量和压力。

考虑轴对称体旋转时, Stokes 方程的普遍解。在柱坐标系  $(R, z, \phi)$  中, 取旋成体的轴线为  $z$  轴并任选另一正交坐标系  $(q_1, q_2, \phi)$ , 其中  $q_1, q_2$  是  $\phi=0$  的子午面上任意正交的曲线坐标, 拉梅系数为  $H_1, H_2, R$  (图 1)。容易看出, 轴对称体旋转时引起的 Stokes 流动是与  $\phi$  无关的轴对称流动, 但是可以有三个速度分量  $v_1, v_2$  及  $v_\phi$ 。根据连续性方程 (2.2)

$$\frac{\partial(v_1 H_2 R)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 H_1 R)}{\partial q_2} = 0$$

推出存在着无量纲流函数  $\psi$ , 使得

$$v_1 = \frac{1}{RH_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad v_2 = -\frac{1}{RH_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}$$

涡旋矢量  $\Omega$  的表达式为

$$\Omega = \frac{1}{RH_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (Rv_\phi) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{RH_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (Rv_\phi) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{R} D^2 \psi \mathbf{e}_\phi \quad (2.3)$$

其中  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_\phi$  是  $q_1, q_2, \phi$  三个坐标轴上的单位矢量,  $D^2 \psi$  是广义 Stokes 算子, 它在坐标系  $(q_1, q_2, \phi)$  中的表达式为

$$D^2 \psi = \frac{R}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_1 R} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{R H_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right]$$

将 (2.3) 式代入运动方程 (2.1) 中得

$$\nabla p = \frac{1}{RH_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (D^2 \psi) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{RH_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (D^2 \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{R} D^2 (Rv_\phi) \mathbf{e}_\phi$$

考虑到  $\partial p / \partial \theta = 0$  有

$$\frac{\partial p}{H_1 \partial q_1} = \frac{1}{RH_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (D^2 \psi) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p}{H_2 \partial q_2} = -\frac{1}{RH_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (D^2 \psi) \quad (2.5)$$

$$D^2 (Rv_\phi) = 0 \quad (2.6)$$

从 (2.4) 及 (2.5) 式中消去  $p$  得

$$D^2 (D^2 \psi) = 0 \quad (2.7)$$

方程 (2.7) 的普遍解<sup>[12]</sup> 早已被仔细研究过, 对应的流场表达式为

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z) + D_n F_n^{(2)}(R, z)] \\ v_R &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(5)}(R, z) + D_n F_n^{(6)}(R, z)] \\ \psi &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, z) + D_n F_n^{(4)}(R, z)] \\ p &= p_\infty + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_n^{(1)}(R, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

式中  $p_\infty$  为无穷远处的压力,  $C_n, D_n$  是待定系数,  $F_n^{(k)}$  ( $k=1, \dots, 6$ ) 的表达式为

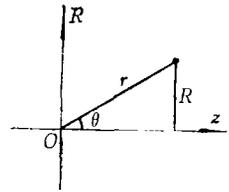


图 1

$$\left. \begin{aligned}
 F_n^{(1)}(R, z) &= r^{-(n+1)} P_n(\xi) \\
 F_n^{(2)}(R, z) &= r^{-(n-1)} [P_n(\xi) + 2J_n(\xi)] \\
 F_n^{(3)}(R, z) &= r^{-(n-1)} J_n(\xi) \\
 F_n^{(4)}(R, z) &= r^{-(n-3)} J_n(\xi) \\
 F_n^{(5)}(R, z) &= (n+1) r^{-n} \frac{1}{R} J_{n+1}(\xi) \\
 F_n^{(6)}(R, z) &= (n+1) r^{-(n-2)} \frac{1}{R} J_{n+1}(\xi) - 2z r^{-(n-1)} \frac{1}{R} J_n(\xi)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ ,  $\xi = \cos\theta = z/r$ ,  $P_n$ ,  $J_n$  分别为  $n$  阶 Legendre 多项式和  $n$  阶  $-1/2$  次 Gegenbauer 多项式。

现在我们在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中求方程 (2.6) 的普遍解。采用分离变量法, 令

$$Rv_\phi = R(r)z(\xi)$$

代入方程组 (2.6) 得确定  $R(r)$  及  $z(\xi)$  的方程为

$$r^2 R'' - (n-1)R = 0, \quad (1-\xi^2)z'' + n(n-1)z = 0$$

解之得

$$Rv_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (k_{1n} r^n + k_{2n} r^{-n+1}) (k_{3n} J_n(\xi) + k_{4n} H_n(\xi))$$

其中  $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_{4n}$  为待定常数,  $J_n(\xi), H_n(\xi)$  是第一类和第二类  $n$  阶  $-1/2$  次 Gegenbauer 函数。因  $H_n(\xi)$  在  $\xi = \pm 1$  处有奇性, 一般不采用, 于是有

$$v_\phi = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n+1}) J_n(\xi)$$

根据  $J_0(\xi) = 1, J_1(\xi) = -\xi$ ,  $v_\phi$  在  $n=0, 1$  时在  $\xi = \pm 1$  处有奇性, 因此  $n$  应从 2 开始, 最后我们得到  $v_\phi$  的级数形式的解为

$$v_\phi = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n+1}) J_n(\xi) \quad (2.10)$$

若所考虑的区域包括无穷远处, 则不取  $\sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n$ ; 若所考虑的区域包括原点, 则不取  $\sum_{n=2}^{\infty} B_n r^{-n+1}$ 。

本文考虑包括无穷远处在内的外流问题。因此根据 (2.8) 式及 (2.10) 式, 轴对称体旋转时 Stokes 方程的轴对称普遍解应为

$$\left. \begin{aligned}
 v_z &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z) + D_n F_n^{(2)}(R, z)] \\
 v_R &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(5)}(R, z) + D_n F_n^{(6)}(R, z)] \\
 v_\phi &= \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} B_n F_n^{(8)}(R, z) \\
 p &= p_\infty + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{4} F_{n-1}^{(1)}(R, z)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

如果物体不动, 只考虑 $z$ 轴的均匀来流绕轴对称体的Stokes流动, 则根据物面上 $v_\phi|_{\text{物面}}=\omega R$ , 及 $F_n^{(3)}$ 的线性无关性导出 $B_n=0$ 。由表达式(2.8)表出的普遍解就是人们熟知的 Sampson 流子, 代表圆球对流动所产生的扰动。若没有均匀来流, 只考虑轴对称体在静止流体中绕 $z$ 轴旋转, 则根据物面上的粘附条件 $v_z|_{\text{物面}}=0$ ,  $v_R|_{\text{物面}}=0$ 及 $F_n^{(k)}$  ( $k=1, 2, 5, 6$ )的线性无关性导出 $C_n=0$ ,  $D_n=0$ 。于是(2.11)简化为

$$v_\phi = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} B_n F_n^{(8)}(R, z), \quad v_R = v_z = 0, \quad p = p_\infty \quad (2.12)$$

它代表圆球旋转时对流动产生的扰动, 这是一类新的普遍解, 我们称之为 Sampson 旋转子。既有均匀来流, 又有轴对称体的旋转, 它的解可由原点处的Sampson流子和旋转子的迭加来代表。

众所周知,  $z$ 轴向的Sampson流子只产生 $z$ 轴方向的阻力, 而不产生阻力矩, 阻力 $F_z$ 的公式为

$$F_z = 4\pi D_2 \quad (2.13)$$

而Sampson旋转子只产生 $z$ 方向的阻力矩, 而不产生阻力。 $z$ 方向的阻力矩 $M_z$ 的公式可推导如下:

$$\begin{aligned} M_z &= \oint_A \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p}_n \times \mathbf{k}) dA = \oint_A (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{k} dA \\ &= \oint_A R \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial n} - \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial R}{\partial n} \right) dA \end{aligned}$$

其中 $A$ 为以原点为心, 半径为 $a$ 的球面,  $\mathbf{n}$ 是表面 $A$ 的法线方向,  $\mathbf{r}$ 为矢径,  $\mathbf{k}$ 为 $z$ 方向单位矢量,  $\mathbf{p}_n$ 是以 $\mathbf{n}$ 为法线的表面上所受到的应力。将 $v_\phi$ 的表达式(2.12)代入上式经过一定运算后得

$$M_z = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} B_n a^{-(n-2)} (n+1) \int_{-1}^1 J_n(\xi) d\xi$$

因为

$$\int_{-1}^1 J_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 2/3, & n=2 \\ 0, & n \neq 0, 2 \end{cases}$$

所以

$$M_z = 4\pi B_2 \quad (2.14)$$

而阻力矩系数则为

$$C_M = \frac{M_z}{8\pi} = B_2/2 \quad (2.15)$$

### 三、双球同轴旋转所受阻力矩的计算

考虑球心都在 $z$ 轴的两个球绕 $z$ 轴旋转时引起的 Stokes 流动。在两个球的球心分别布置上述旋转子, 则得本问题无量纲形式的级数解为

$$v_\phi = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=2}^{\infty} B_{nj} F_n^{(8)}(R, z-z_j), \quad v_z = v_R = 0, \quad p = p_\infty \quad (3.1)$$

这里, 我们任取一个球的半径 $a$ , 线速度 $\omega_1 a$ ,  $\mu\omega_1$ 为特征长度, 特征速度和特征压力.  $B_{nj}$ 是待定的系数,  $z_1=0$ ,  $z_2=D$ . 其中 $D$ 是无量纲形式两球心之间的距离. 在(3.1)的无穷级数中截取 $N$ 项, 则得

$$v_\phi = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=2}^{N+1} B_{nj} F_n^{(s)}(R, z-z_j) \quad (3.2)$$

式中 $B_{nj}$ 是 $2N$ 个待定的系数, 在每个球上按极角等分原则各选取 $N$ 个配置点, 令(3.2)式在这些点上满足粘附条件, 得到 $2N$ 个线性代数方程组, 利用计算机可轻易地求出系数 $B_{nj}$ . 速度, 压力及力矩系数分别由(3.2)式及下式给出

$$C_{Mj} = B_{2j}/2 \quad (j=1, 2) \quad (3.3)$$

系数矩阵在 $\xi_1=1, 0$ 及 $\xi_2=1, 0$ 处有奇性, 应设法避开它们而改取其邻近的点(参看[5]).

对于双球同轴旋转, 须要研究角速度比 $\omega=\omega_2/\omega_1$ , 半径比 $a=a_2/a_1$ 及球心间距 $D$ 这三个参数对阻力矩系数的影响.

a)  $C_M$ 是 $\omega$ 的线性函数

现在证明 $C_M$ 是 $\omega$ 的线性函数. 由(3.2)式知

$$v_\phi = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=2}^{N+1} B_{ni} F_n^{(s)}(R, z-z_i)/R$$

在两个球上各选取 $N$ 个配置点, 令其上满足粘附条件得

$$AX = E \quad (3.4)$$

其中 $A$ 为 $2N \times 2N$ 矩阵, 其分量为 $a_{ij} = F_i^{(s)}(R_j, z_j - z_i)/R_j$ . 带下标 $j$ 的量为第 $j$ 个配置点上的量.  $X$ 为 $1 \times 2N$ 矩阵,  $X = (B_{21}, \dots, B_{n+1,1}, B_{22}, \dots, B_{n+1,2})$ .  $E$ 为 $2N \times 1$ 矩阵,  $E = (R_1, \dots, R_N, \omega R_{N+1}, \dots, \omega R_{2N})^T$ ,  $T$ 表示转置,  $R_i$ 为 $i$ 个配置点距旋转轴的距离. 将(3.4)式的两边对 $\omega$ 求导并考虑到 $A$ 与 $\omega$ 无关得

$$A \frac{dX}{d\omega} = E' \quad (3.5)$$

其中 $F' dE/d\omega = (0, \dots, 0, R_{N+1}, \dots, R_{2N})^T$ 是与 $\omega$ 无关的常数矩阵. 解(3.5)式得

$$X = C_1 + C_2 \omega$$

式中 $C_1, C_2$ 是常数矩阵. 根据(3.3)式两球的阻力矩系数为

$$C_{M1} = B_{21}/2 = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{21}\omega) = A_1 + B_1\omega$$

$$C_{M2} = B_{22}/2 = \frac{1}{2}(C_{1,n+1} + C_{2,n+1}\omega) = A_2 + B_2\omega$$

其中 $A_1, B_1, A_2, B_2$ 为常数. 显然不管 $N$ 取什么值, 上述证明过程都成立. 令 $N \rightarrow \infty$ 得下述结论: 两球同轴旋转时,  $C_M$ 是转速比 $\omega$ 的线性函数.

b) 方法收敛性的数值检验

表1, 2, 3列出了 $\omega_2/\omega_1=1, a_2/a_1=1$ ;  $\omega_2/\omega_1=2, a_2/a_1=1$ ;  $\omega_2/\omega_1=1.0, a_2/a_1=2.0$ 三种情形下, 当 $D$ 取不同值时, 阻力矩系数的收敛情况. 第一种情形, 因两球所受阻力矩相同, 故只引出一个球的结果. 这三个表表明, 不管那种情况, 本方法都有很好的收敛性. 即使两球接触这一干扰极强的情况, 只要 $N=15$ 也能保证收敛到四位至五位有效数字. 随着 $D$ 的增加, 阻力矩系数趋于单球所受的阻力矩系数, 而且收敛速度越来越快. 例如在 $\omega_2/\omega_1=1, a_2/a_1=1, D=10$ 的情况下,  $N=4$ 时阻力矩系数就收敛到五位有效数字.

表1

 $\omega_2/\omega_1=1, a_2/a_1=1$ 时阻力矩系数

$N$	$D=2$	$D=3$	$D=4$	$D=5$	$D=6$	$D=7$	$D=8$	$D=9$	$D=10$
2	0.89106	0.96304	0.98392	0.99171	0.99520	0.99699	0.99799	0.99859	0.99897
3	0.88935	0.96363	0.98439	0.99198	0.99535	0.99707	0.99804	0.99862	0.99900
4	0.89236	0.96412	0.98455	0.99204	0.99538	0.99709	0.99805	0.99863	0.99900
5	0.89367	0.96428	0.98459	0.99205	0.99539	0.99709	0.99805	0.99863	
6	0.89389	0.96433	0.98461	0.99206	0.99539				
7	0.89379	0.96435	0.98461	0.99206					
8	0.89368	0.96437							
9	0.89362	0.96437							
10	0.89358								
11	0.89357								
12	0.89356								
13	0.89355								
14	0.89355								

表2

 $\omega_2/\omega_1=2, a_2/a_1=1$ 时阻力矩系数

$N$	慢 速 球					快 速 球				
	$D=2$	$D=3$	$D=4$	$D=6$	$D=7$	$D=2$	$D=3$	$D=4$	$D=6$	$D=7$
2	0.8023	0.93003	0.96931	0.99076	0.99417	1.883	1.9622	1.9841	1.9953	1.9970
3	0.7693	0.92718	0.96889	0.99076	0.99417	1.929	1.9669	1.9850	1.9954	1.9971
4	0.7697	0.92754	0.96902	0.99076		1.941	1.9668	1.9850	1.9954	1.9971
5	0.7657	0.92763	0.96903	0.99076		1.947	1.9668	1.9850		
6	0.7643	0.92766	0.96904			1.949				
7	0.7638	0.92767	0.96904			1.950				
8	0.7635	0.92767				1.951				
9	0.7633					1.951				
10	0.7630					1.952				
11	0.7528					1.952				
12	0.7526									
13	0.7524									
14	0.7523									
15	0.7523									

表2和表3还表明慢速球和小球的收敛速度较快速球及大球慢些。

c) 半径相同的双球在不同 $\omega$ 和 $D$ 下的阻力矩系数

在两球半径相同的条件下对 $D=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$ 和 $\omega=\pm 1, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4,$

表3  $\omega_2/\omega_1=1.0, a_2/a_1=2.0$  时阻力矩系数

N	小 球					大 球				
	D=3	D=4	D=5	D=6	D=8	D=3	D=4	D=5	D=6	D=8
2	0.74032	0.88033	0.93702	0.96220	0.98429	7.6915	7.8583	7.9294	7.9602	7.9887
3	0.73882	0.87884	0.93668	0.96314	0.98440	7.7946	7.8919	7.9408	7.9647	7.9892
4	0.74184	0.87909	0.93680	0.96319	0.98441	7.8027	7.8927	7.9405	7.9645	7.9892
5	0.74096	0.87899	0.93680	0.96320	0.98441	7.8093	7.8935	7.9406	7.9645	
6	0.73944	0.87894	0.93680	0.96320		7.8096	7.8933	7.9406		
7	0.73833	0.87891				7.8104	7.8933			
8	0.73777	0.87891				7.8104				
9	0.73758									
10	0.73758									

表4 第一球所受的阻力矩系数

$\omega$	D=2	D=3	D=4	D=5	D=6	D=7	D=8	D=10
-1.0	1.20003	1.03910	1.01593	1.00807	1.00465	1.00293	1.00196	1.00100
-0.8	1.16736	1.03168	1.01280	1.00647	1.00373	1.00234	1.00157	1.00080
-0.6	1.13780	1.02425	1.00967	1.00487	1.00280	1.00176	1.00118	1.00060
-0.4	1.10824	1.01682	1.00655	1.00327	1.00188	1.00118	1.00079	1.00040
-0.2	1.07867	1.00939	1.00342	1.00167	1.00095	1.00059	1.00039	1.00020
-0.1	1.06389	1.00569	1.00186	1.00087	1.00049	1.00030	1.00020	1.00010
0	1.05090	1.00196	1.00030	1.00007	1.00002	1.00001	1.00000	1.00000
0.1	1.03433	0.998245	0.998733	0.999272	0.999560	0.999717	0.999809	0.999901
0.2	1.01955	0.994530	0.997170	0.998472	0.999097	0.999426	0.999613	0.999801
0.4	0.989994	0.987101	0.994044	0.996872	0.998171	0.998843	0.999223	0.999601
0.6	0.960434	0.979672	0.990918	0.997272	0.998245	0.998260	0.998832	0.999401
0.8	0.930873	0.972243	0.987792	0.993672	0.996320	0.997677	0.998441	0.999201
1.0	0.893544	0.964377	0.984618	0.992062	0.995391	0.997092	0.998050	0.999000

±0.2, ±0.1, 0 等几种情形计算了两球所受的阻力矩。因为通过更改参考速度,  $1 \leq |\omega| < \infty$  的情形可转换为  $|\omega| \leq 1$  的情形, 所以  $\omega$  只需计算 -1 到 1 之间的数值就可以代表所有情况。不管那种情形, 数值计算的收敛性能都很好。一般地只需在每个球上取 8 个配置点即可得收敛到六位有效数字的结果。即使两球紧贴的情形, 也只需取 15 个配置点就能取得上述精度。计算数据列在表 4 和表 5 中。从表中可以看出, 随着  $D$  的增加, 两球所受的阻力矩都趋于单球旋转时的数值。

为了更详细地研究阻力矩系数随  $D$  和  $\omega$  的关系, 取  $D=2.0$  与  $D=3.0$  两组数据绘制  $C_M$  与  $\omega$  的曲线 (见图 2)。根据本节 a) 知  $C_M$  是  $\omega$  的线性函数, 即  $C_{M1} = A_1 + B_1\omega, C_{M2} = A_2 + B_2\omega$ 。其

表5 第二球所受的阻力矩系数

$\omega \backslash D$	2	3	4	5	6	7	8	10
-1.0	-1.20003	-1.03910	-1.01593	-1.00807	-1.00465	-1.00292	-1.00196	-1.00100
-0.8	-0.986853	-0.838713	-0.815868	-0.808059	-0.804648	-0.802923	-0.801959	-0.801001
-0.6	-0.777008	-0.63832	-0.615809	-0.608044	-0.604644	-0.602921	-0.601956	-0.601001
-0.4	-0.567162	-0.437929	-0.415749	-0.408631	-0.404639	-0.402919	-0.401955	-0.401000
-0.2	-0.357317	-0.237537	-0.215690	-0.208015	-0.204634	-0.202917	-0.201954	-0.201000
-0.1	-0.252394	-0.137341	-0.115660	-0.108008	-0.104632	-0.102916	-0.101953	-0.101000
0	-0.147472	-0.037145	-0.015631	-0.008001	-0.004630	-0.002915	-0.001953	-0.001000
0.1	-0.042549	0.063051	0.084399	0.092007	0.095373	0.097085	0.098049	0.099000
0.2	0.062374	0.163246	0.184429	0.192014	0.195375	0.197086	0.198048	0.199000
0.4	0.272219	0.363638	0.384488	0.392028	0.395380	0.397088	0.398048	0.399000
0.6	0.482065	0.564030	0.584547	0.592043	0.595384	0.597090	0.598049	0.599001
0.8	0.691910	0.764422	0.784606	0.792057	0.795389	0.797092	0.798050	0.799001
1.0	0.893544	0.964377	0.984618	0.992062	0.995391	0.997092	0.998050	0.999000

中 $A_1, A_2, B_1, B_2$ 均为球心间距 $D$ 的函数。此外, 根据 $\omega=1, -1$ 时 $C_{M_1}$ 与 $C_{M_2}$ 有对称性和反对称性

$$C_{M_1}(1)=C_{M_2}(1), C_{M_1}(-1)=-C_{M_2}(-1)$$

推出  $A_1+B_1=A_2+B_2, A_1-B_1=-(A_2-B_2)$  即 $A_1=B_2, A_2=B_1$ 。

于是

$$C_{M_1}=A+B\omega, \quad C_{M_2}=B+A\omega \quad (3.6)$$

由此可见,  $C_{M_1}, C_{M_2}$ 与 $D$ 的关系简化为 $A, B$ 与 $D$ 的关系。从图2清楚地看出,  $C_M$ 确实是 $\omega$ 的线性函数。对曲线进行数据拟合后得

$$D=2.0 \qquad D=3.0$$

$$\text{第一球} \quad C_{M_1}=1.0488-0.1503\omega \quad C_{M_1}=1.0019-0.0372\omega$$

$$\text{第二球} \quad C_{M_2}=-0.1503+1.0488\omega \quad C_{M_2}=-0.0372+1.0019\omega$$

为了研究 $A, B$ 与 $D$ 的关系, 取 $\omega=0$ 的两组数据罗列在表6中, 并将 $A, B$ 随 $D$ 的关系曲线画在图3上。

表6  $A, B$  与 $D$ 的关系

$D$	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
$A$	1.04911	1.00796	1.00196	1.00030	1.00007	1.00002	1.00001
$B$	-0.147472	-0.06485	-0.03715	-0.01563	-0.00800	-0.00463	-0.002915

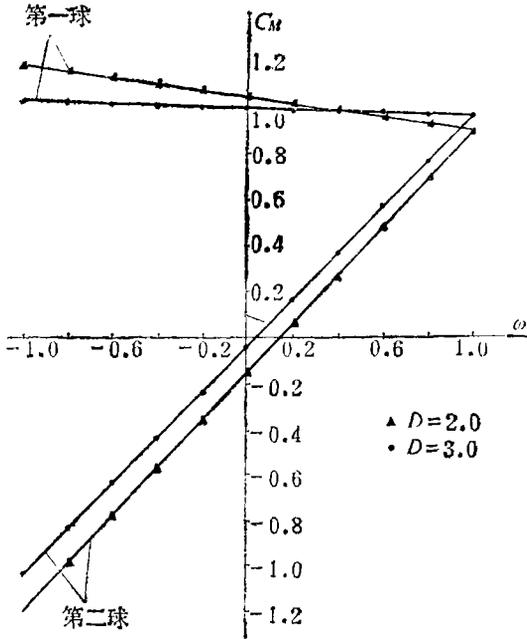


图 2

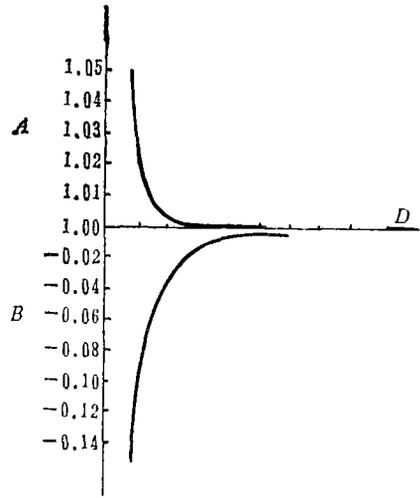


图 3

d) 间距相同的双球在不同  $a$  及  $\omega$  下的阻力矩系数。

为确定起见只考虑  $D=2$  即两球紧贴的情形，不失普遍性可只研究  $0 < a = a_2/a_1 \leq 1$  的情形。因为当  $a > 1$  时选大球为参考球即可转化为  $a \leq 1$  的情形。计算所得的结果列在表 7 及表 8 中。在数据表中取  $a=0.2, 0.6, 1.0$  三组数据画出  $C_M$  随  $\omega$  的变化曲线，如图 4 所示。从图中可以看出， $C_M$  确是  $\omega$  的线性函数，即

$$C_{M1} = A_1 + B_1\omega, \quad C_{M2} = A_2 + B_2\omega$$

其系数可拟合为

表 7

第一球（标准球）所受的阻力矩系数

$a \setminus \omega$	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.1	1.0022	1.0018	1.0014	1.0010	1.0006	1.0002	0.99982	0.99943	0.99903
0.2	1.0138	1.0112	1.0086	1.0060	1.0034	1.0007	0.99812	0.99551	0.99290
0.3	1.0365	1.0294	1.0222	1.0151	1.0080	1.0008	0.99372	0.98659	0.97946
0.4	1.0685	1.0548	1.0411	1.0274	1.0137	1.0000	0.98634	0.97265	0.95896
0.5	1.1075	1.0856	1.0637	1.0419	1.0200	0.99813	0.97626	0.95439	0.93253
0.6	1.1514	1.1202	1.0889	1.0577	1.0264	0.99518	0.96393	0.93269	0.90144
0.7	1.1987	1.1572	1.1157	1.0743	1.0328	0.99134	0.94937	0.90840	0.86693
0.8	1.2481	1.1958	1.1436	1.0913	1.0390	0.98679	0.93454	0.88229	0.83003
0.9	1.2986	1.2352	1.1718	1.1085	1.0451	0.98171	0.91833	0.85494	0.79156
1.0	1.3497	1.2750	1.2003	1.1256	1.0509	0.97624	0.90155	0.82686	0.75217

表8 第二球所受的阻力矩系数

$a$	$\omega$	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.1	-0.00289	-0.002369	-0.00183	-0.00132	-0.00079	-0.00026	0.00026	0.00078	0.00131	0.00183
0.2	-0.02282	-0.01842	-0.01402	-0.00961	-0.00521	-0.00081	0.00359	0.00799	0.01239	0.01679
0.3	-0.07393	-0.05900	-0.04409	-0.02917	-0.01425	0.00087	0.01559	0.03051	0.04543	0.06035
0.4	-0.16786	-0.13274	-0.09762	-0.06250	-0.02738	0.00775	0.04287	0.07799	0.11311	0.14823
0.5	-0.31569	-0.24770	-0.17972	-0.11173	-0.04374	0.02425	0.09224	0.16022	0.22821	0.29620
0.6	-0.52840	-0.41193	-0.29545	-0.17898	-0.06250	0.05397	0.17045	0.28692	0.40340	0.52088
0.7	-0.81704	-0.63352	-0.45000	-0.26647	-0.08295	0.10057	0.28410	0.46762	0.65115	0.83470
0.8	-1.1928	-0.92074	-0.64867	-0.37659	-0.104520	0.16756	0.43963	0.71171	0.98378	1.25585
0.9	-1.6671	-1.2820	-0.89692	-0.51185	-0.12677	0.25830	0.64337	1.0284	1.4135	1.8036
1.0	-2.2513	-1.7258	-1.2003	-0.67486	-0.14939	0.37607	0.90154	1.4270	1.9525	2.4050

表9  $A_1, A_2, B_1, B_2$ 与 $a$ 的关系

$a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A_1$	1.0006	1.0034	1.0080	1.0137	1.0200	1.0264	1.0328	1.0390	1.0451	1.0509
$A_2$	-0.00079	-0.0521	-0.01425	-0.02738	-0.04374	-0.06250	-0.08295	-0.10452	-0.12677	-0.14939
$B_1$	-0.00078	-0.0528	-0.01428	-0.02738	-0.04374	-0.06250	-0.08293	-0.10446	-0.12677	-0.14935
$B_2$	0.00105	0.00880	0.02984	0.07025	0.13596	0.23295	0.36705	0.54415	0.77014	1.0509

$a=0.2$

$a=0.6$

$a=1.0$

第一球  $C_{M1} = 1.0035 - 0.0051\omega$        $C_{M1} = 1.0264 - 0.0625\omega$        $C_{M1} = 1.0509 - 0.1494\omega$

第二球  $C_{M2} = -0.0052 + 0.0088\omega$        $C_{M2} = -0.0625 + 0.2330\omega$        $C_{M2} = -0.1494 + 1.0509\omega$

为确定 $A_1, B_1, A_2, B_2$ 与 $a$ 的关系, 取 $\omega=0, \omega=1$ 的两组数据反解出 $A_1, B_1, A_2, B_2$ 并列在表9中, 对应的曲线绘在图5中. 从图上看 $A_2, B_1$ 两曲线实际上是重合的.

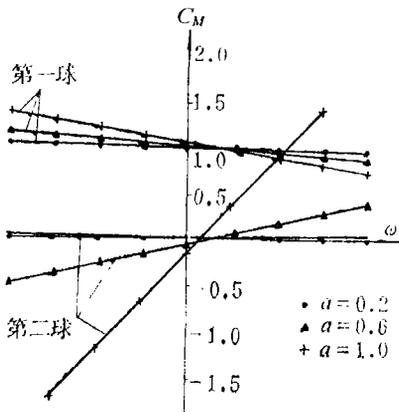


图 4

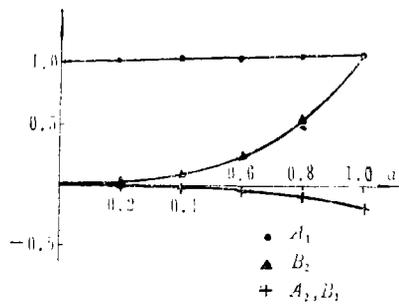


图 5

### 四、多球同轴旋转情形

考虑半径相同的 $M$ 个球以等角速度绕同一轴旋转时所受的阻力矩。在每一个球的球心放置本文导出的新的旋转子并将无穷级数在 $N+1$ 项上截断得

$$v_\phi = \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{R} B_{nj} F_n^{(s)}(R, z-z_j)$$

其中 $z_j=(j-1)D$  ( $j=1, \dots, M$ ),  $D$ 为间距,  $B_{nj}$ 为待定常数。在每个球上取 $N$ 个配置点, 使粘附条件在这些点满足得  $MN$  阶线性代数方程组, 解之即得  $B_{nj}$ , 各球所受的阻力系数为  $C_{Mj}=B_{2j}/2$  ( $j=1, \dots, M$ )。

取 $D=2, 3, \dots, 8$ 进行了计算, 结果都是收敛的。表10 仅举  $D=3, M=10$ , 作为例子, 此表说明收敛性很好。取 $N=9$ 能收敛到六位有效数字。

表10  $D=3.0, M=10$  时各球阻力矩系数 $C_M$ 的收敛性

$M$	$N$	2	3	4	5	6	7	8	9
第一球		0.960556	0.959031	0.959181	0.959220	0.959233	0.959235	0.959236	0.959236
第二球		0.924438	0.924418	0.924417	0.924473	0.924470	0.924473	0.924472	0.924472
第三球		0.917736	0.921057	0.921053	0.921103	0.921103	0.921105	0.921105	0.921105
第四球		0.916802	0.920099	0.920097	0.920147	0.920148	0.920149	0.920149	0.920149
第五球		0.916492	0.919785	0.919784	0.919834	0.919835	0.919835	0.919835	0.919835
第六球		0.916492	0.919785	0.919784	0.919834	0.919835	0.919835	0.919835	0.919835
第七球		0.916804	0.920098	0.920099	0.920147	0.920148	0.920149	0.920149	0.920149
第八球		0.917754	0.921057	0.921053	0.921103	0.921103	0.921105	0.921105	0.921105
第九球		0.921069	0.921024	0.924420	0.924470	0.924471	0.924472	0.924473	0.924473
第十球		0.954551	0.959392	0.959240	0.959250	0.959238	0.959237	0.959236	0.959236

取 $M=10$ , 通过改变 $D$ , 研究 $C_M$ 随 $D$ 的变化规律, 结果列在表11及图6中。从图中可见, 当 $D \geq 6$ 时, 各球所受的阻力矩基本相同, 趋于各球单独旋转状态。 $D < 6$ 时, 各球所受的力矩互有差别, 但都小于单球结果。可以明显看出顶端两球的端缘效应及中间球的遮蔽效应。但是除顶端两球外, 其他球的阻力矩基本相同。所以在考虑多球同轴旋转时, 可以将它们分成两部份。一部份是顶端的最外球, 次外球; 另一部份是处于中间地位的其他球。它们所受力矩相差甚微, 可视为一整体。

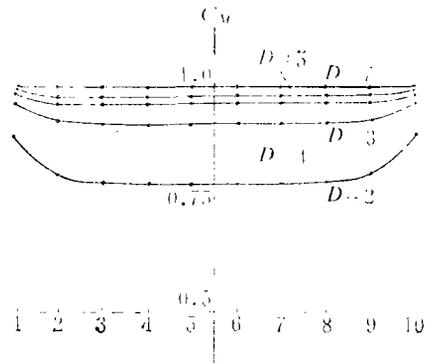


图 6

最后考虑 $D$ 固定时,  $C_M$ 随圆球个数 $M$ 的变化规律。 $D=2.0, 3.0, 4.0$ 的结果整理在表12中, 根据上面的分析, 球串所受的力矩可分成

表11 不同 $D$ 时各球所受的阻力矩系数

$D$	第一球	第二球	第三球	第四球	第五球	第六球	第七球	第八球	第九球	第十球
2.0	0.889672	0.793979	0.787361	0.785402	0.784743	0.784743	0.785402	0.787363	0.793956	0.889868
3.0	0.959236	0.924473	0.921105	0.920149	0.919835	0.919835	0.920149	0.921105	0.924473	0.959236
4.0	0.981941	0.966702	0.965023	0.964552	0.964400	0.964400	0.964552	0.965023	0.966702	0.981941
5.0	0.990596	0.982698	0.981782	0.981526	0.981444	0.981444	0.981526	0.981782	0.982698	0.990596
6.0	0.994517	0.989924	0.989378	0.989276	0.989176	0.989176	0.989276	0.989378	0.989924	0.994517
7.0	0.996534	0.993634	0.993285	0.993188	0.993157	0.993157	0.993188	0.993285	0.993634	0.996534

表12a  $D=2.0$  (四位有效数字)

$M$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
外 球	0.8935	0.8944	0.8921	0.8910	0.8905	0.8901	0.8899	0.8898	0.8897
次外球		0.8050	0.7983	0.7961	0.7951	0.7946	0.7943	0.7941	0.7940
中间球				0.7915	0.7894	0.7872	0.7862	0.7852	0.7847

表12b  $D=3.0$  (六位有效数字)

$M$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
外 球	0.964377	0.961335	0.960271	0.959810	0.959570	0.959429	0.959339	0.959279	0.959236
次外球		0.929921	0.926488	0.925443	0.924991	0.924756	0.924619	0.924532	0.924473
中间球				0.923058	0.922015	0.920971	0.920520	0.920070	0.919835

表12c  $D=4.0$  (六位有效数字)

$M$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
外 球	0.984618	0.982948	0.982432	0.982211	0.982097	0.982031	0.981989	0.981961	0.981941
次外球		0.969390	0.967681	0.967169	0.966950	0.966837	0.966772	0.966730	0.966702
中间球				0.965974	0.965462	0.964949	0.964731	0.964512	0.964400

外球, 次外球及中间球三种情形, 这就是在表12中只列出这三种情况的原因。从表中可以看出, 各类球的阻力矩系数随 $M$ 的增加变化不大。若仅考虑两位有效数字, 则外球, 次外球以及中间球所受的阻力矩都基本上与 $M$ 无关。

## 参 考 文 献

- [1] Tuck, E. O., Some methods for flows past blunt slender bodies, *J. Fluid Mech.*, 18 (1964), 619.
- [2] Batchelor, G. K., The stress system in a suspension of force-free particles, *J. Fluid Mech.*, 41 (1970), 545—570.
- [3] Cox, R. G., The motion of long slender bodies in a viscous fluid, *J. Fluid Mech.*, 44 (1970), 791—810.
- [4] Weinbaum, S., *Lecture on Mathematics in Life Sciences* (1981), 114.
- [5] 吴望一, 解任意形状非细长轴对称体Stokes流动的一种新方法, *中国科学, A 辑*, 2 (1984), 145—156.
- [6] 吴望一、何青, 蠕动流中连续奇点线分布法的分段线性近似, *应用数学和力学*, 5, 6 (1984), 793—800.
- [7] 吴望一、王少华, Stokes流动中连续奇点线分布法的分段抛物近似, *力学学报*, 5 (1985), 443—453.
- [8] 吴望一、朱敏, 解任意形状扁轴对称体Stokes流动的离散奇点环形分布法, *力学学报*, 6 (1985).
- [9] 朱敏、吴望一, 解任意形状扁轴对称体Stokes流动的奇点线分布法, *应用数学和力学*, 6, 10 (1985).
- [10] 林胜天、吴望一, 三维Stokes流动的半解析半数值解, *空气动力学学报*, 2 (1986).
- [11] Chwang, A. T. and T. Y. T. Wu, Hydromechanics of Low-Reynolds-Number flow, *J. Fluid Mech.*, 63 (1974), 607—622.
- [12] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, 2nd Edition, Noordhoff International Publishing, Leyden (1973).

## The Stokes Flow of the Rotating Double Spheres and Multiple Spheres

Wu Wang-yi    He Xiao-yi

*(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)*

### Abstract

In this paper the expressions for a kind of new rotlets in Stokes flow are derived. By means of superposition of this new rotlets, the drag moment for rotating double spheres and multiple spheres along the same axis are presented. It has been demonstrated that drag moment for each sphere is the linear function of its angular velocity.