应用数学和力学，第8卷第2期（1987年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Dirac矩阵和Pauli矩阵在塑性力学中的应用*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1984年3月12日收到）

摘 要

本文在求解塑性力学问题中，采用了量子电动力学中著名的Dirac矩阵和Pauli矩阵，使求解塑性应力增量的问题变得十分简单。

一、前 言

在文献[1～6]中，我们业已证明，利用量子电动力学中所引入的 Dirac 矩阵和 Pauli 矩阵[7,8]，对方程的降阶进而求解是卓有成效的。这种方法，理所当然要被吸收到塑性力学中来。塑性力学与弹性力学相比较，主要表现在方程中出现Levy-Mises或Prandtl-Reuss理论比例关系数$d\lambda$。这与在塑性区域中，材料的应力应变关系的不确定性有关[9]。作为方程中多出一个未知函数 $d\lambda$ 的补偿，为使方程组仍呈封闭性，又添加了一个标量方程，即所谓 von Mises 屈服条件。这个标量方程呈二次型。塑性力学所有困难中，除了应变增量和位移增量的方程组为非线性方程外，主要的困难集中在这个二次型的标量方程上。但我们知道，Dirac矩阵和 Pauli 矩阵在处理这种呈完全平方项之和的方程时，是有其优越性的。它能使方程降阶，其代价只不过是增加方程的个数，而方程数的增加，有成熟的矩阵解法[10]和计算机解法。本文就是在这种思想的指导下展开的。

本文讨论的理论模型是塑性流动理论中的刚塑性材料。为了说明Dirac矩阵和Pauli矩阵在塑性力学中的用途，我们集中讨论塑性应力增量的求解，而对于非线性的位移增量方程的求解，只是一带而过。

当我们讨论Dirac矩阵和Pauli矩阵在塑性力学中的应用时，我们预先将所有的力学量都解析延拓到复平面上。最后的结果可以通过取实部而得到。另外，已解析延拓到复平面上的每一个力学量都定义为 Hilbert 空间中的一个复矢量。

关于本文的符号，基本沿用文献[9]。在不引起误解的前提下，我们使用以下简写符号：

$$d\lambda \longrightarrow \lambda \quad \text{（理论比例系数）}$$

$$de_{ji} \longrightarrow e_{ji} \quad \text{（应变增量）}$$

---

* 钱伟长推荐。

$$d\sigma_{ji} \longrightarrow \sigma_{ji} \quad (\text{应力增量})$$
$$du_i \longrightarrow v_i \quad (\text{位移增量})$$

本文的结果表明，凡属由完全平方项之和的方程所引起的非线性问题，都可以用类似本文的方法得到解决。

二、理想刚塑性材料的三维问题

在文[5～6]中，我们研究了理想刚塑性材料的平面应变问题。使我们印象最深刻的是，塑性应力增量同样可以用一个双调和函数来表示。在下面的推广中，我们将牢记这一点。

理想刚塑性材料的三维问题，其基本方程如下：

Navier 方程

$$\sigma_{ji,j}=0 \tag{2.1}$$

St. Venant-von Mises 方程

$$e_{ji}=\frac{1}{2}(v_{j,i}+v_{i,j})=\lambda\left(\sigma_{ji}-\frac{1}{3}\Theta\delta_{ji}\right),\ \Theta=\sigma_{kk} \tag{2.2}$$

von Mises 屈服条件

$$\left(\sigma_{ji}-\frac{1}{3}\Theta\delta_{ji}\right)^2=2k^2 \tag{2.3}$$

方程组(2.1)式、(2.2)式和(2.3)式共十个标量方程，未知函数也是十个(σ_{ji}，e_{ji}，v_i，λ)。在方程组(2.2)式中，还隐含着不可压缩条件

$$e_{kk}=0 \tag{2.4}$$

重复出现的角标按 Einstein 约定求和。

对理想刚塑性材料的三维问题而言，我们定义应力增量σ_{ji}（$j,i=1,2,3$，$\sigma_{ji}=\sigma_{ij}$）为Hilbert空间中的六分量复矢量，并引入6×6反对易矩阵，β_a ($a=1,2,3,4,5,6$)，它们满足关系[11~12]

$$\beta_a\beta_b\beta_c+\beta_c\beta_b\beta_a=\delta_{ab}\beta_c+\delta_{cb}\beta_a \tag{2.5}$$

定义六分量单位矢量

$$e_6=(1\,1\,1\,1\,1\,1)^T \tag{2.6}$$

则(2.3)式可用下列方程来代替：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\beta_1(2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33})+\frac{1}{3}\beta_2(2\sigma_{22}-\sigma_{33}-\sigma_{11})\\&+\frac{1}{3}\beta_3(2\sigma_{33}-\sigma_{11}-\sigma_{22})+\sqrt{2}\beta_4\sigma_{23}\\&+\sqrt{2}\beta_5\sigma_{31}+\sqrt{2}\beta_6\sigma_{12}=\sqrt{2}ke_6\end{aligned} \tag{2.7}$$

引入Maxwell应力增量函数，φ_1，φ_2，φ_3：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{11}=\varphi_{3,22}+\varphi_{2,33}, &&\sigma_{23}=-\varphi_{1,23}\\&\sigma_{22}=\varphi_{1,33}+\varphi_{3,11}, &&\sigma_{31}=-\varphi_{2,31}\\&\sigma_{33}=\varphi_{2,11}+\varphi_{1,22}, &&\sigma_{12}=-\varphi_{3,12}\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

式中φ_1，φ_2，φ_3亦为Hilbert 空间中的六分量矢量。将(2.8)式代入方程(2.7)式，有

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\sqrt{2}\beta_4\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]\varphi_1$$

$$+\left[\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\sqrt{2}\beta_5\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\varphi_2$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\sqrt{2}\beta_6\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]\varphi_3$$

$$=\sqrt{2}ke_6 \tag{2.9}$$

令

$$\varphi_1=\psi-\frac{1}{3}k\beta_4e_6x_2x_3,\quad \varphi_2=\psi_2-\frac{1}{3}k\beta_5e_6x_3x_1,\quad \varphi_3=\psi_3-\frac{1}{3}k\beta_6e_6x_1x_2 \tag{2.10}$$

则(2.9)式化为齐次型：

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\sqrt{2}\beta_4\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]\psi_1$$

$$+\left[\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\sqrt{2}\beta_5\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\psi_2$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\sqrt{2}\beta_6\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]\psi_3=0 \tag{2.11}$$

如果ψ_1，ψ_2，ψ_3分别满足

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\sqrt{2}\beta_4\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]\psi_1=0 \tag{2.12}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\sqrt{2}\beta_5\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\right]\psi_2=0 \tag{2.13}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\sqrt{2}\beta_6\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]\psi_3=0 \tag{2.14}$$

则方程(2.11)式恒满足。

对(2.12)式等号两边同时作用算子

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\left(-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\sqrt{2}\beta_4\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]$$

利用(2.5)式的性质，可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)^2\psi_1=0 \tag{2.15}$$

同理

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^2\psi_2=0 \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2\psi_3=0 \tag{2.17}$$

从而理想刚塑性材料的三维问题，可以由双调和函数，ψ_1，ψ_2，ψ_3和(2.8)式，(2.10)式

最后得到解决。

当ψ_k ($k=1, 2, 3$)求得后，可由下式求得位移增量 v_k:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{F}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{E}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B+C}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right]v_1=0 \tag{2.18}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{D}{B}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{F}{B}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{C+A}{B}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]v_2=0 \tag{2.19}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{E}{C}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{A+B}{C}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right]v_3=0 \tag{2.20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi_1+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\varphi_2+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\varphi_3\right]\\
B&=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\varphi_2+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi_3+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi_1\right]\\
C&=\frac{1}{3}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi_3+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi_1+\left(2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi_2\right]\\
D&=-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3},\quad E=-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3\partial x_1},\quad F=-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

在理想刚塑性材料的三维问题中，由(2.10)式可知，必须预先知道6×6反对易矩阵β_a的形式，或者至少必须知道β_4，β_5，β_6的形式。

三、理想刚塑性材料的轴对称问题

理想刚塑性材料的轴对称问题，其基本方程为：

Navier方程

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}=0$$

或写成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}-\frac{1}{r}\sigma_\theta=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz})+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0 \tag{3.2}$$

St. Venant-von Mises 方程

$$e_r=\frac{\partial v_r}{\partial r}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_z) \tag{3.3}$$

$$e_\theta=\frac{v_r}{r}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_\theta-\sigma_z-\sigma_r) \tag{3.4}$$

$$e_z=\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{1}{3}\lambda(2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\theta) \tag{3.5}$$

$$e_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=\lambda\sigma_{rz} \tag{3.6}$$

von Mises 屈服条件

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\sigma_{rz}^2=6k^2 \tag{3.7}$$

在理想刚塑性材料的轴对称问题中，定义应力增量，σ_r，σ_θ，σ_z和σ_{rz}为Hilbert 空间中的四分量复矢量，并引入 Dirac 矩阵[7]：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

定义四分量单位矢量

$$e_4=(1\ 1\ 1\ 1)^T \tag{3.9}$$

则方程(3.7)式可用下列方程来代替：

$$\gamma_1(\sigma_r-\sigma_\theta)+\gamma_2(\sigma_\theta-\sigma_z)+\gamma_3(\sigma_z-\sigma_r)+\sqrt{6}\,\gamma_4\sigma_{rz}=\sqrt{6}\,ke_4 \tag{3.10}$$

引入应力增量函数φ_1，φ_2，它们分别为Hilbert空间中的四分量复矢量：

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\varphi_2,\quad \sigma_z=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2},\quad \sigma_{rz}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \tag{3.11}$$

(3.11)式使方程组(3.1)式、(3.2)式恒满足。将(3.11)式代入(3.10)式，得

$$\frac{1}{r}\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\gamma_3-\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\sqrt{6}\,\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\right]\varphi_1$$
$$+\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{1}{r}+(\gamma_2-\gamma_1)\frac{\partial}{\partial r}\right]\varphi_2=\sqrt{6}\,ke_4 \tag{3.12}$$

令

$$\psi_1=\varphi_1-\frac{1}{2}k\gamma_4e_4r^2z \tag{3.13}$$

则(3.12)式化为

$$\frac{1}{r}\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\gamma_3-\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\sqrt{6}\,\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\right]\psi_1$$
$$+\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{1}{r}+(\gamma_2-\gamma_1)\frac{\partial}{\partial r}\right]\varphi_2=0 \tag{3.14}$$

如果ψ_1，φ_2，分别满足

$$\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\gamma_3-\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\sqrt{6}\,\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\right]\psi_1=0 \tag{3.15}$$

$$\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{1}{r}+(\gamma_2-\gamma_1)\frac{\partial}{\partial r}\right]\varphi_2=0 \tag{3.16}$$

则方程(3.14)式恒满足。

对方程(3.15)式等号左右两端同时作用算子

$$\left[(\gamma_1-\gamma_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(\gamma_3-\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\sqrt{6}\,\gamma_4\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\right]$$

利用Dirac矩阵的性质：

$$\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\delta_{ab} \tag{3.17}$$

最后可得双调和方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi_1=0 \tag{3.18}$$

另外，对方程(3.16)式等号两端同时作用算子

$$\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)-\gamma_2\frac{\partial}{\partial r}+\gamma_3\frac{1}{r}$$

利用(3.17)式，得

$$\left(2r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)\varphi_2=-(\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1+\gamma_1\gamma_2)\varphi_2 \tag{3.19}$$

式中

$$\gamma_2\gamma_3=iS_4\otimes S_1,\quad \gamma_3\gamma_1=iS_4\otimes S_2,\quad \gamma_1\gamma_2=iS_4\otimes S_3 \tag{3.20}$$

其中S_k ($k=1, 2, 3$)为Pauli矩阵，S_4为单位矩阵，$\otimes$表示直乘；同时

$$(S_4\otimes S_1)^2=1,\quad (S_4\otimes S_2)^2=1,\quad (S_4\otimes S_3)^2=1 \tag{3.21}$$

再对方程(3.19)式等号左右两端同时作用算子

$$\left(2r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)$$

最后可得

$$\left(r^4\frac{\partial^4}{\partial r^4}+2r^3\frac{\partial^3}{\partial r^3}+2r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-2r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)\varphi_2=0 \tag{3.22}$$

从而，理想刚塑性材料的轴对称问题，可以由双调和函数ψ_1，满足方程(3.22)式的函数φ_2和(3.11)式，(3.13)式最后得到解决。

至于位移增量v_r，v_z，则有与理想刚塑性材料三维问题位移增量相类似的解法：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C}{A}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]v_r=0 \tag{3.23}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B}{C}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{C}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]v_z=0 \tag{3.24}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi_1-\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{r}\right)\varphi_2\right]\\
B&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_1-\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\varphi_2\right]\\
C&=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

参 考 文 献

[1] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，5，4(1984)，541—551.

[2] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，5，6(1984)，817—827.

[3] 沈惠川，弹性动力学的通解，应用数学和力学，6，9(1985)，791—796.

[4] 沈惠川，薄壳理论中的Schrödinger方程，应用数学和力学，6，10(1985)，887—900.

[5] 沈惠川，理想塑性力学问题的通解，自然杂志，8，11(1985)，846—848.

[6] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程、双调和方程和本征方程，应用数学和力学，7，1(1986)，61—72.

[7] Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford (1958).中译本，《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965)，260—262.

[8] Van der Waerden, B. L., *Group Theory and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1974). 中译本，《群论与量子力学》，赵展岳等译，上海科学技术出版社 (1980)，140—144.

[9] 钱伟长，《变分法及有限元》，上册，科学出版社 (1980年)，578—598.

[10] Ley Koo, E. and R. C. Wang (王仁川), Charged spin-1/2 particles in uniform electrical field, *Journal of China University of Science and Technology* (中国科学技术大学学报), 13, 2(1983), 167.

[11] Duffin, R. J., On the characteristic matrices of covariant systems, *Phys. Rev.*, 54 (1938), 1114.

[12] Kemmer, N., The particle aspect of meson theory, *Proc, Roy. Soc.*, 173 (1939), 91—116.

The Application of Dirac Matrices and Pauli Matrices for the Theory of Plasticity

Shen Hui-chuan

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

We are primarily concerned in this paper with the problem of plasticity. The solution of the problem of stress-increment for plasticity can be put into extremely compact form by famous Dirac matrices and Pauli matrices of quantum electrodynamics.