

# 任意形状长轴对称体沿长轴方向垂直 地向一无界平板运动时所 产生的 Stokes 流

袁 凡 吴望一

(北京大学力学系, 1985年9月14日收到)

## 摘 要

在任意形状长轴对称体内连续地分布 Sampson 平板反演流子, 采用分段等强度, 分段线性和分段抛物三种近似, 成功地得到了流场的封闭形式的分析表达式。计算了物体和平板有不同间距, 长短轴比取一系列不同值时, 长球和卡西尼长卵形体的阻力系数。计算结果表明, 方法具有良好的收敛性。在长球情况下和已有的数据进行了对比。符合程度是十分令人满意的。

## 一、引 言

蠕动流在生物工程, 化学工程及其他工程领域中有着广泛的应用。例如, 红细胞在毛细管中的运动, 组织液中粒子的运动, 分子透过细胞膜以及鞭毛、纤毛的运动都和 Stokes 流动密切相关。早在十九世纪, Stokes 研究了圆球在无界流场中作匀速运动时的蠕动流, 并导出了著名的 Stokes 阻力公式, 它已成为估算低雷诺数流动中阻力大小的经典公式。对于非球形的任意形状物体, 人们需要知道物体的形状对阻力系数有多大影响。近年来, 求解任意形状物体 Stokes 流动的数值方法有了显著的进展。A. T. Chwang 和 T. Y. T. Wu<sup>[1]</sup> 利用 Stokes 流子以及旋转子、应力子等高阶奇点的体内连续分布法, 求出了旋转椭球在不同来流条件及物体的不同运动条件下的分析解, 但他们并没有解决一般形状物体的 Stokes 流动问题; Gluckman<sup>[2]</sup> 等人采用环形奇点面分布法处理了任意凸形轴对称体的无界 Stokes 流动; Youngren 和 Acrivos<sup>[3]</sup> 提出在物体表面上连续地分布 Stokes 流子的方法处理三维物体的无界 Stokes 流动。这两种方法都包含数值积分, 因此计算量较大。最近, 吴望一等人<sup>[4~8]</sup> 提出了一种快速、高精度的数值方法去处理任意形状轴对称体的 Stokes 流动问题, 他们注意到任意轴对称体对来流的扰动可以用对称轴或对称面上有限个或无限个圆球的扰动来逼近的物理事实, 选取 Sampson 流子为基本奇点, 在对称轴或对称面上离散地或连续地分布 Sampson 流子, 并令其满足边界上的无滑移条件, 得到了一组确定 Sampson 流子强度的线性代数方程组或积分方程。在连续分布法中, 采用分段等强度, 分段线性和分段抛物等近似成功地得到了封闭形式的流场表达式, 并计算了不同情形下长球、扁球、长卡西尼卵形体、

扁卡西尼卵形体、纺锥形尖头体在无界 Stokes 流动中的阻力系数以及相应表面上的压力分布, 方法的收敛性及精度是十分令人满意的。最近该方法还被推广到三维 Stokes 流动中去, 并取得了成功。

本文试图采用文[4]中建议的方法去处理无界壁存在时的有界 Stokes 流动, 即考虑任意形状长轴对称体沿长轴方向垂直地向一无界平板运动时所产生的轴对称 Stokes 流动。当物体离无界平板很远, 板的影响很弱时, Brenner<sup>[10]</sup> 曾经利用反演法给出过一个壁面对阻力的修正公式。但是, 当物体离壁面较近或很近时, 反演法失效, 因为在强干扰下, 级数的收敛性变坏, 甚至不收敛。本文建议的方法具有广泛的适用性, 它既适用于弱干扰情形, 也适用于强干扰情形。其主要思想是: 首先求出无界壁面存在时 Sampson 平板反演流子的分析表达式, 然后沿用文[4]的方法, 将 Sampson 反演流子沿对称轴连续分布, 得到确定强度分布的积分方程。采用分段等强度, 分段线性, 分段抛物等近似, 又一次成功地得到了流动的封闭形式的分析表达式。令速度在场面上满足无滑移条件, 得到了确定 Sampson 平板反演流子强度的线性代数方程组。采用任何一种矩阵求逆方法可以得到问题的近似解。作为算例, 在本文最后对长球及卡西尼长卵形体进行了计算, 得到了和现有数据十分一致的结果。

## 二、数 学 提 法

考虑一长轴对称体以速度  $v$  沿长轴方向垂直地向一无界平板作轴对称蠕变运动。取随动

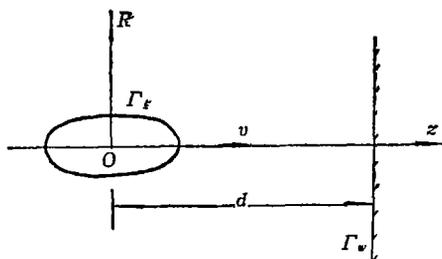


图 1

坐标系  $(R, z, \phi)$  原点  $O$  取在长轴的中点 (见图 1),  $O$  点距平板的距离为  $d$ , 令  $L, v, \mu v/L$  为长度, 速度, 压力的特速参考量, 其中  $L$  是物体的某特征长度,  $\mu$  是流体的动粘性系数, 于是上述蠕变流满足下列无量纲形式的方程:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

这里  $\mathbf{v}, p$  分别为无量纲速度矢量和无量纲压力, 由于流动的轴对称性, 引入无量纲流函数  $\psi$ , 在柱坐标系中有

$$v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (2.2)$$

对 (2.1) 式取旋度并利用流函数的定义 (2.2), 推出  $\psi$  满足下列四阶偏微分方程

$$D^2(D^2\psi) = 0 \quad (2.3)$$

式中  $D^2$  为广义 Stokes 算子, 它在柱坐标系中具有以下表达式

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

无量纲压力  $p$  可通过  $\psi$  算出, 它们在柱坐标系中的关系为

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2\psi), \quad \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (D^2\psi) \quad (2.5)$$

在平板  $\Gamma_w$  及物面  $\Gamma_f$  上应满足粘附条件。

## 三、有平板存在时 Sampson 流子的表达式

位于  $R=0$ ,  $z=\xi$  处的 Sampson 流子的表达式为

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(2)}(R, z-\xi)] \\ v_R &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(4)}(R, z-\xi)] \\ \psi &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(5)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(6)}(R, z-\xi)] \\ p &= p_{\infty} + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_n^{(1)}(R, z-\xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中  $C_n$ ,  $D_n$  是待定的系数,  $p_{\infty}$  是无穷远处的压力。函数  $F_n^{(k)}$  ( $k=1, \dots, 6$ ) 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} F_n^{(1)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ F_n^{(2)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \left[ P_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) + 2J_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \right] \\ F_n^{(3)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ F_n^{(4)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ &\quad - 2z(R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} J_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ F_n^{(5)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} J_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ F_n^{(6)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-3}{2}} J_n \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中  $P_n$  和  $J_n$  分别为  $n$  阶 Legendre 多项式和 Gegenbauev 多项式

有平板存在时, Sampson 流子的表达式可推导如下, 将流函数  $\psi$  表成

$$\psi = \psi_s + \psi_w \quad (3.3)$$

其中  $\psi_s$  是平板不存在时 Sampson 流子的流函数, 由 (2.6) 第三式表出,  $\psi_w$  代表垂直平板对流体产生的扰动, 其在柱坐标系中的表达式由下式给出

$$\psi_w = \int_0^{\infty} R J_1(\omega R) [A^*(\omega) + zB^*(\omega)] \exp[\omega z] d\omega \quad (z \leq d) \quad (3.4)$$

其中  $J_1$  为一阶 Bessel 函数,  $A^*(\omega)$ ,  $B^*(\omega)$  是待定的函数。利用 (2.2) 及 (2.5) 式, 与  $\psi_w$  对应的速度和压力的表达式为

$$\left. \begin{aligned} v_z(R, z) &= \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) [A^*(\omega) + zB^*(\omega)] \exp[\omega z] d\omega \\ v_R(R, z) &= - \int_0^\infty \omega J_1(\omega R) \left\{ \frac{1}{\omega} [\omega A^*(\omega) + (1 + \omega z)B^*(\omega)] \exp[\omega z] \right\} d\omega \\ p_w(R, z) &= p_{-\infty} + 2 \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) B^*(\omega) \exp[\omega z] d\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中  $p_{-\infty}$  是负无穷条处的压力。

引进

$$\left. \begin{aligned} F^*(\omega, z) &= [A^*(\omega) + zB^*(\omega)] \exp[\omega z] \\ G^*(\omega, z) &= [\omega A^*(\omega) + (1 + \omega z)B^*(\omega)] \exp[\omega z] / \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

于是  $A^*(\omega)$  和  $B^*(\omega)$  可通过  $F^*(\omega, d)$ ,  $G^*(\omega, d)$  表出, 它们之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} A^*(\omega) &= (1 + \omega d) \exp[-\omega d] F^*(\omega, d) - \omega d \exp[-\omega d] G^*(\omega, d) \\ B^*(\omega) &= \omega [G^*(\omega, d) - F^*(\omega, d)] \exp[-\omega d] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

利用 (3.6) 及 (3.7) 可得  $F^*(\omega, z)$ ,  $G^*(\omega, z)$  与  $F^*(\omega, d)$ ,  $G^*(\omega, d)$  之间的下列关系

$$\left. \begin{aligned} F^*(\omega, z) &= \{ F^*(\omega, d) + \omega(z-d)[G^*(\omega, d) - F^*(\omega, d)] \} \exp[\omega(z-d)] \\ G^*(\omega, z) &= \{ -\omega(z-d)F^*(\omega, d) + [1 + \omega(z-d)]G^*(\omega, d) \} \exp[\omega(z-d)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

考虑到 (3.6) 式及 (3.3) 式得

$$\left\{ \begin{aligned} v_z(R, z, \xi) &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(2)}(R, z-\xi)] + \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) F^*(\omega, z) d\omega \\ v_R(R, z, \xi) &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(4)}(R, z-\xi)] - \int_0^\infty \omega J_1(\omega R) G^*(\omega, z) d\omega \\ \psi(R, z, \xi) &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(6)}(R, z-\xi) + D_n F_n^{(6)}(R, z-\xi)] + \int_0^\infty R J_1(\omega R) F^*(\omega, z) d\omega \\ p(R, z, \xi) &= p_{-\infty} + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_n^{(1)}(R, z-\xi) + 2 \int_0^\infty \omega^2 J_0(\omega R) [G^*(\omega, d) \\ &\quad - F^*(\omega, d)] \exp[\omega(z-d)] d\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

令 (3.9) 前两式满足  $z=d$  处平板上的粘附条件  $v_z=0$ ,  $v_R=0$ , 得

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \omega J_0(\omega R) F^*(\omega, d) d\omega &= - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, d-\xi) + D_n F_n^{(2)}(R, d-\xi)] \\ \int_0^\infty \omega J_1(\omega R) G^*(\omega, d) d\omega &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, d-\xi) + D_n F_n^{(4)}(R, d-\xi)] \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

将上述 Hankel 变换反演之, 有

$$\left. \begin{aligned} F^*(\omega, d) &= - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n \Pi_n^{(1)}(\omega) + D_n \Pi_n^{(2)}(\omega)] \\ G^*(\omega, d) &= - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n \Pi_n^{(3)}(\omega) + D_n \Pi_n^{(4)}(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Pi_n^{(1)}(\omega) &= \frac{\omega^{n-1}}{n!} \exp[-\omega(d-\xi)] \\ \Pi_n^{(2)}(\omega) &= \frac{\omega^{n-3}}{n!} [(2n-3)\omega(d-\xi) - (n-1)(n-3)] \exp[-\omega(d-\xi)] \\ \Pi_n^{(3)}(\omega) &= \frac{\omega^{n-1}}{n!} \exp[-\omega(d-\xi)] \\ \Pi_n^{(4)}(\omega) &= \frac{\omega^{n-3}}{n!} [(2n-3)\omega(d-\xi) - n(n-2)] \exp[-\omega(d-\xi)] \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

在推导 (3.11) 式时利用了 Legendre 多项式和 Gegenbauer 多项式的性质以及下式公式 (参阅[11])

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(a^2+x^2)^{\mu+2}} P_{\mu-1}^{\nu} \left[ \frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}} \right] J_{\nu}(xy) dx = \frac{y^{\mu-2} \exp[-ay]}{\Gamma(\mu+\nu)} \quad (Re(\nu) > -1, Re(\mu) > 1/2)$$

其中  $P_{\mu-1}^{\nu}$  是缔合 Legendre 函数,  $\Gamma$  是 Gamma 函数,  $a$  是常数。

将 (3.11) 式代入 (3.8) 及 (3.9) 式中去并利用下式

$$\int_0^{\infty} x^{n-1/2} \exp[-ax] (xy)^{1/2} J_0(xy) dx = \frac{n! y^{1/2}}{(a^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left[ \frac{a}{(a^2+y^2)^{1/2}} \right] \quad (y > 0, Re(a) > 0)$$

后得

$$\mathbf{U}(R, z, \xi) = \sum_{n=2}^{\infty} [C_n \mathbf{S}_n^{(O)}(R, z, \xi) + D_n \mathbf{S}_n^{(B)}(R, z, \xi)] \quad (3.13)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(R, z, \xi) &= (v_t, v_R, \psi, p - p_{\infty}) \\ \mathbf{S}_n^{(O)}(R, z, \xi) &= (S_n^{(1)}, S_n^{(3)}, S_n^{(6)}, S_n^{(7)}) \\ \mathbf{S}_n^{(B)}(R, z, \xi) &= (S_n^{(2)}, S_n^{(4)}, S_n^{(8)}, S_n^{(8)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } S_n^{(1)}(R, z, \xi) &= F_n^{(1)}(R, z - \xi) - F_n^{(1)}(R, 2d - z - \xi) \\ &\quad + 2(z-d)(n+1) F_{n+1}^{(1)}(R, 2d - z - \xi) \\ S_n^{(2)}(R, z, \xi) &= F_n^{(2)}(R, z - \xi) - F_n^{(2)}(R, 2d - z - \xi) - 2(n-2)(z-d) \\ &\quad - d) F_{n-1}^{(1)}(R, 2d - z - \xi) + 2(2n-3)(z-d)(d - \xi) F_n^{(1)}(R, 2d - z - \xi) \\ S_n^{(3)}(R, z, \xi) &= F_n^{(3)}(R, z - \xi) - F_n^{(3)}(R, 2d - z - \xi) - 2(n+1)(z-d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -d) F_{n+1}^{(3)}(R, 2d-z-\xi) \\
 S_n^{(4)}(R, z, \xi) = & F_n^{(4)}(R, z-\xi) - F_n^{(4)}(R, 2d-z-\xi) - 2(2n-3)(z-d)(d \\
 & -\xi) F_n^{(3)}(R, 2d-z-\xi) + \frac{2(n-1)(n-3)}{n}(z \\
 & -d) F_{n-1}^{(3)}(R, 2d-z-\xi) \\
 S_n^{(5)}(R, z, \xi) = & F_n^{(5)}(R, z-\xi) - F_n^{(5)}(R, 2d-z-\xi) + 2(z-d)(n \\
 & +1) F_{n+1}^{(6)}(R, 2d-z-\xi) \\
 S_n^{(6)}(R, z, \xi) = & F_n^{(6)}(R, z-\xi) - F_n^{(6)}(R, 2d-z-\xi) - 2(n-2)(z \\
 & -d) F_{n-1}^{(6)}(R, 2d-z-\xi) \\
 & + 2(2n-3)(z-d)(d-\xi) F_n^{(6)}(R, 2d-z-\xi) \\
 S_n^{(7)}(R, z, \xi) = & 4(n+1) F_{n+1}^{(1)}(R, 2d-z-\xi) \\
 S_n^{(8)}(R, z, \xi) = & \frac{4n-6}{n} F_{n-1}^{(1)}(R, z-\xi) + 4(2n-3)(d-\xi) F_n^{(1)}(R, 2d-z-\xi) \\
 & - \frac{2(2n^2-6n+3)}{n} F_{n-1}^{(1)}(R, 2d-z-\xi)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

这就是平板存在时，位于  $R=0$ ， $z=\xi$  处的 Sampson 流子的表达式，我们称之为 Sampson 平板反演流子。

#### 四、Sampson 平板反演流子的体内连续分布

遵循文[4]的做法，在物体内部对称轴线上取一线段  $AB(-d, d)$ ，其中  $2d$  是线段的长度，如果物体的两端是圆的，则  $A, B$  可取为头部的曲率中心，在  $AB$  上连续地分布 Sampson 平板反演流子，得流场的表达式为

$$\mathbf{U} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-d}^d [C_n(\xi) \mathbf{S}_n^{(O)}(R, z, \xi) d\xi + D_n(\xi) \mathbf{S}_n^{(B)}(R, z, \xi) d\xi] \tag{4.1}$$

其中  $C_n(\xi)$ ， $D_n(\xi)$  是待定的奇点强度分布函数。显然 (4.1) 式满足方程 (2.3) 及平板上的边界条件。现在的问题是选取合适的  $C_n(\xi)$ 、 $D_n(\xi)$  使物面上的边界条件得到满足，将  $AB$  分成  $M$  段，每段中选定两端点和中点作为插值点，每一段上的强度分布用插值点上的二次函数近似地代替，并将无穷级数在  $N$  项上截断，于是 (4.1) 式可写成

$$\mathbf{U} = \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M \left[ \int_{d_{j1}}^{d_{j2}} C_{nj}(\xi) \mathbf{S}_n^{(O)}(R, z, \xi) d\xi + \int_{d_{j1}}^{d_{j2}} D_{nj}(\xi) \mathbf{S}_n^{(B)}(R, z, \xi) d\xi \right] \tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} C_{nj}(\xi) \\ D_{nj}(\xi) \end{array} \right\} = & \frac{(\xi-d_{j2})(\xi-d_{j3})}{(d_{j1}-d_{j2})(d_{j1}-d_{j3})} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj1} \\ D_{nj1} \end{array} \right\} + \frac{(\xi-d_{j3})(\xi-d_{j1})}{(d_{j2}-d_{j3})(d_{j2}-d_{j1})} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj2} \\ D_{nj2} \end{array} \right\} \\
 & + \frac{(\xi-d_{j1})(\xi-d_{j2})}{(d_{j3}-d_{j1})(d_{j3}-d_{j2})} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj3} \\ D_{nj3} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

这里  $d_{j1}$ ,  $d_{j2}$ ,  $d_{j3}$  分别为每小段两端点及中点的坐标,  $C_{nj k}$ ,  $D_{nj k}$  ( $k=1, 2, 3$ ) 分别是每一段中三个插值点上强度分布函数值。

将 (4.3) 式代入 (4.2) 式, 经过运算后得

$$U = \left. \begin{aligned} & \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_0)} + C_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_0)} + C_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_0)} \\ & + D_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_E)} + D_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_E)} + D_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_E)}] \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} W_{nj k}^{(Q_0)} &= (W_{nj k}^{(Q_1)}, W_{nj k}^{(Q_3)}, W_{nj k}^{(Q_6)}, W_{nj k}^{(Q_7)}) \\ W_{nj k}^{(Q_E)} &= (W_{nj k}^{(Q_2)}, W_{nj k}^{(Q_4)}, W_{nj k}^{(Q_8)}, W_{nj k}^{(Q_8)}) \\ W_{nj1}^{(Q_i)} &= \frac{1}{2h^2} [d_{j2}d_{j3}T_{nj1}^{(i)} - (d_{j2}+d_{j3})T_{nj2}^{(i)} + T_{nj3}^{(i)}] \\ W_{nj2}^{(Q_i)} &= \frac{1}{2h^2} [d_{j1}d_{j3}T_{nj1}^{(i)} - (d_{j1}+d_{j3})T_{nj2}^{(i)} + T_{nj3}^{(i)}] \quad (i=1, \dots, 8) \\ W_{nj3}^{(Q_i)} &= -\frac{1}{h^2} [d_{j1}d_{j2}T_{nj1}^{(i)} - (d_{j1}+d_{j2})T_{nj2}^{(i)} + T_{nj3}^{(i)}] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式中  $n=2, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, M$ ,  $h=(d_{j2}-d_{j1})/2$ , 而

$$T_{nj k}^{(i)} = \int_{d_{j1}}^{d_{j2}} \xi^{k-1} S_n^{(i)}(R, z, \xi) d\xi$$

$$(n=2, \dots, N, j=1, \dots, M, i=1, \dots, 8, R=1, 2, 3)$$

在物面上选取  $(N-1)(2M+1)$  个点, 令方程 (4.4) 在这些点上满足无滑移条件, 于是得到下列  $2(N-1)(2M+1)$  个方程确定  $2(N-1)(2M+1)$  个未知函数  $C_{nj}$  及  $D_{nj}$ 。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_1)} + C_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_1)} + C_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_1)} \\ & + D_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_2)} + D_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_2)} + D_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_2)}] = 1 \\ & \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_3)} + C_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_3)} + C_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_3)} \\ & + D_{n,2(j-1)+1} W_{nj1}^{(Q_4)} + D_{n,2(j-1)+2} W_{nj2}^{(Q_4)} + D_{n,2(j-1)+3} W_{nj3}^{(Q_4)}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

阻力系数由下式给出

$$\lambda = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^M [D_{2,2(j-1)+1} + 4D_{2,2(j-1)+2} + D_{2,2(j-1)+3}] (d_{j2} - d_{j1}) \quad (4.7)$$

如果每一段上的强度分布用线性函数和常数代替, 则相应的结果为

### 1、线性分布

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{nj}(\xi) \\ D_{nj}(\xi) \end{array} \right\} = \frac{\xi - d_{j2}}{d_{j1} - d_{j2}} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj1} \\ D_{nj1} \end{array} \right\} + \frac{\xi - d_{j1}}{d_{j2} - d_{j1}} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj2} \\ D_{nj2} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

$$U = \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} W_{nj1}^{(L_0)} + C_{n,j+1} W_{nj2}^{(L_0)} + D_{nj} W_{nj1}^{(L_E)} + D_{n,j+1} W_{nj2}^{(L_E)}] \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } \mathbf{W}_{njk}^{(L_0)} &= (W_{njk}^{(L_1)}, W_{njk}^{(L_3)}, W_{njk}^{(L_5)}, W_{njk}^{(L_7)}) \\ \mathbf{W}_{njk}^{(L_E)} &= (W_{njk}^{(L_2)}, W_{njk}^{(L_4)}, W_{njk}^{(L_6)}, W_{njk}^{(L_8)}) \\ W_{n_j 1}^{(L_i)} &= \frac{1}{h} (d_{j_2} T_{n_j 1}^{(i)} - T_{n_j 2}^{(i)}), \quad W_{n_j 2}^{(L_i)} = \frac{1}{h} (-d_{j_1} T_{n_j 1}^{(i)} + T_{n_j 2}^{(i)}) \quad (i=1, \dots, 8) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

式中  $n=2, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, M$ .

确定  $C_{nj}$ ,  $D_{nj}$  的线性代数方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} W_{n_j 1}^{(L_1)} + C_{n, j+1} W_{n_j 2}^{(L_1)} + D_{nj} W_{n_j 1}^{(L_2)} + D_{n, j+1} W_{n_j 2}^{(L_2)}] &= 1 \\ \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} W_{n_j 1}^{(L_3)} + C_{n, j+1} W_{n_j 2}^{(L_3)} + D_{nj} W_{n_j 1}^{(L_4)} + D_{n, j+1} W_{n_j 2}^{(L_4)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

阻力系数的公式为

$$\lambda = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{M-1} (D_{2, j+1} - D_{2, j}) (d_{j_2} - d_{j_1}) \quad (4.12)$$

## 2、常密度分布

$$\mathbf{U} = \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} \mathbf{W}_{nj}^{(C_0)} + D_{nj} \mathbf{W}_{nj}^{(C_E)}] \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } \mathbf{W}_{nj}^{(C_0)} &= (T_{n_j 1}^{(1)}, T_{n_j 1}^{(3)}, T_{n_j 1}^{(5)}, T_{n_j 1}^{(7)}) \\ \mathbf{W}_{nj}^{(C_E)} &= (T_{n_j 1}^{(2)}, T_{n_j 1}^{(4)}, T_{n_j 1}^{(6)}, T_{n_j 1}^{(8)}) \end{aligned} \right\} \quad (n=2, \dots, N, \quad j=1, \dots, M) \quad (4.14)$$

确定  $C_{nj}$ ,  $D_{nj}$  的线性代数方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} T_{n_j 1}^{(1)} + D_{nj} T_{n_j 1}^{(2)}] &= 1 \\ \sum_{n=2}^N \sum_{j=1}^M [C_{nj} T_{n_j 1}^{(3)} + D_{nj} T_{n_j 1}^{(4)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

阻力系数为

$$\lambda = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^M D_{2j} (d_{j_2} - d_{j_1}) \quad (4.16)$$

为了能够计算出式 (4.6), (4.11), (4.15) 中的系数矩阵, 必须求出 (4.5) 中的积分  $T_{njk}^{(i)}$ . 将  $S_n^{(i)}$  的表达式 (3.14) 代入 (4.5) 式我们有

$$\left. \begin{aligned} T_{njk}^{(1)} &= G_{njk}^{(1)}(R, z) - G_{njk}^{(1)}(R, 2d-z) + 2(n+1)(z-d)G_{n+1, jk}^{(1)}(R, 2d-z) \\ T_{njk}^{(2)} &= G_{njk}^{(2)}(R, z) - G_{njk}^{(2)}(R, 2d-z) - 2(n-2)(z-d)G_{n+1, jk}^{(1)}(R, 2d-z) \\ &\quad + 2(2n-3)(z-d)[dG_{njk}^{(1)}(R, 2d-z) - G_{n, j, k+1}^{(1)}(R, 2d-z)] \\ T_{njk}^{(3)} &= G_{njk}^{(3)}(R, z) - G_{njk}^{(3)}(R, 2d-z) - 2(n+1)(z-d)G_{n+1, jk}^{(3)}(R, 2d-z) \\ T_{njk}^{(4)} &= G_{njk}^{(4)}(R, z) - G_{njk}^{(4)}(R, 2d-z) + \frac{2(n-1)(n-3)}{n}(z-d)G_{n+1, jk}^{(3)}(R, 2d-z) \\ &\quad - 2(2n-3)(z-d)[dG_{njk}^{(3)}(R, 2d-z) - G_{n, j, k+1}^{(3)}(R, 2d-z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

式中

$$G_{njk}^{(i)}(R, z) = \int_{d_{j1}}^{d_{j2}} \xi^{k-1} F_n^{(i)}(R, z-\xi) d\xi \quad (4.18)$$

为了计算  $T_{njk}^{(i)}$  ( $i=1, \dots, 4$ ;  $n=2, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, M$ ;  $k=1, 2, 3$ ) 须要知道下列范围内的

$G_{njk}^{(i)}$

$$\begin{aligned} k=4 \text{ 时} \quad & i=1, 3; \quad n=2, \dots, N; \quad j=1, \dots, M \\ k=1, 2, 3 \text{ 时} \quad & \begin{cases} i=1, 3; \quad n=1, \dots, N+1; \quad j=1, \dots, M \\ i=2, 4; \quad n=2, \dots, N; \quad j=1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

它们可以根据下列公式通过递推过程获得

$$\begin{aligned} G_{njk}^{(i)}(R, z) = & d_{j2}^{(k-1)} J_n^{(i)}(R, z-d_{j2}) - d_{j1}^{(k-1)} J_n^{(i)}(R, z-d_{j1}) - \frac{k-1}{n} G_{n-1, j, k-1}^{(i)}(R, z) \\ & (i=1, 3; \quad k=1, 2, 4; \quad n \geq k; \quad j=1, \dots, M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{njk}^{(2)}(R, z) = & d_{j2}^{(k-1)} J_n^{(2)}(R, z-d_{j2}) - d_{j1}^{(k-1)} J_n^{(2)}(R, z-d_{j1}) - \frac{k-1}{n} G_{n-1, j, k-1}^{(2)}(R, z) \\ & + \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \left[ G_{n-2, jk}^{(1)}(R, z) - z G_{n-2, j, k-1}^{(1)}(R, z) - \frac{1}{n-2} G_{n-3, j, k-1}^{(1)}(R, z) \right] \\ & (k=1, 2, 3, 4; \quad n \geq k+2; \quad j=1, \dots, M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{njk}^{(4)}(R, z) = & d_{j2}^{(k-1)} J_n^{(4)}(R, z-d_{j2}) - d_{j1}^{(k-1)} J_n^{(4)}(R, z-d_{j1}) - \frac{k-1}{n} G_{n-1, j, k-1}^{(3)}(R, z) \\ & + \frac{2(k-1)}{n(n-1)} [G_{n-2, jk}^{(3)}(R, z) - z G_{n-2, j, k-1}^{(3)}(R, z)] \\ & (k=1, 2, 3, 4; \quad n \geq k+2; \quad j=1, \dots, M) \end{aligned}$$

$$J_n^{(i)}(R, z-\xi) = \int F_n^{(i)}(R, z-\xi) d\xi = \frac{1}{n} F_{n-1}^{(i)}(R, z-\xi) \quad (i=1, 3, n \geq 1)$$

$$\begin{aligned} J_n^{(2)}(R, z-\xi) = & \int F_n^{(2)}(R, z-\xi) d\xi = \frac{1}{n} F_{n-1}^{(2)}(R, z-\xi) \\ & + \frac{2}{n(n-1)} (z-\xi) F_{n-2}^{(1)}(R, z-\xi) + \frac{2}{n(n-1)(n-2)} F_{n-3}^{(1)}(R, z-\xi) \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

$$J_n^{(4)}(R, z-\xi) = \frac{1}{n} F_{n-1}^{(4)}(R, z-\xi) + \frac{2}{n(n-1)} (z-\xi) F_{n-2}^{(3)}(R, z-\xi) \quad (n \geq 2)$$

$$G_{0j1}^{(1)} = -\operatorname{sh}^{-1} \frac{z-\xi}{R} \Big|_{d_{j1}}^{d_{j2}}, \quad G_{0j2}^{(1)} = \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} \Big|_{d_{j1}}^{d_{j2}} + z G_{0j1}^{(1)}$$

$$G_{2j1}^{(2)} = - \left[ \operatorname{sh}^{-1} \frac{z-\xi}{R} - \frac{2-\xi}{2\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} \right]_{d_{j1}}^{d_{j2}}$$

$$G_{2j2}^{(2)} = \left[ \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} + \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} \right]_{d_{j1}}^{d_{j2}} + z G_{2j1}^{(2)}$$

$$G_{2j3}^{(2)} = \left[ R^2 \operatorname{sh}^{-1} \frac{z-\xi}{R} - \frac{z-\xi}{2} \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} - \frac{R^2(z-\xi)}{2\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} \right]_{d_{j1}}^{d_{j2}} + 2z G_{2j2}^{(2)} - z^2 G_{2j1}^{(2)}$$

$$G_{0j1}^{(3)} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} \Big|_{d_{j1}}^{d_{j2}}$$

$$\left. \begin{aligned}
 G_{0j_2}^{(3)} &= \frac{1}{2R} \left[ R^2 \operatorname{sh}^{-1} \frac{z-\xi}{R} - (z-\xi) \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} \right]_{d_{j_1}}^{d_{j_2}} + z G_{0j_1}^{(3)} \\
 G_{2j_1}^{(4)} &= \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\sqrt{[R^2 + (z-\xi)^2]^3}} \right]_{d_{j_1}}^{d_{j_2}} \\
 G_{2j_2}^{(4)} &= \frac{R}{2} \left[ \operatorname{sh}^{-1} \frac{z-\xi}{R} - \frac{z-\xi}{\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} \right]_{d_{j_1}}^{d_{j_2}} + z G_{2j_1}^{(4)} \\
 G_{2j_3}^{(4)} &= -\frac{R}{2} \left[ \sqrt{R^2 + (z-\xi)^2} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + (z-\xi)^2}} \right]_{d_{j_1}}^{d_{j_2}} + 2z G_{2j_2}^{(4)} - z^2 G_{2j_1}^{(4)}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

## 五、算例、长球和卡西尼长卵形体

作为算例,考虑长球和卡西尼长卵形体垂直地向一无界平板运动时所引起的Stokes流动。长球的方程为

$$z = a \cos \theta, \quad R = b \sin \theta, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

其中  $a$ ,  $b$  分别为半长轴和半短轴,  $\theta$  为极角。取  $b$  为特征长度,  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  为  $A$ ,  $B$  点,  $c$  为半焦距。

卡西尼卵形体极坐标形式的方程为

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\theta + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\theta} \quad (c > 0, a > c)$$

其中  $\rho$ ,  $\theta$  分别为极坐标系中的矢径及极角。 $c$  是半焦距,  $a$  是常数。 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  是卵形体与  $R$  轴的交点到原点的距离。取  $b$  为特征长度。 $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$  为  $A$ ,  $B$  点。

在这两种情形中,分段及配置点的选取均采用等分原则,为了避免系数矩阵在  $\theta = \pi/2$  及  $\theta = 0, \pi$  处的奇异性,我们用四个邻近点  $\theta = \pi/2 \pm \delta$ ,  $\theta = \delta$ ,  $\pi - \delta$  代替  $\theta = \pi/2$  及  $\theta = 0, \pi$ 。这里  $\delta$  是一待定常数,在计算中取  $\delta = 0.01^\circ$ 。

表 1 列出了  $d/a = 10.1, 2.35, 1.54, 1.10, 1.05$ ;  $a/b = 1.01, 1.1, 1.25, 1.5, 2.5, 3, 4, 5, 10, 20, 50, 100$  时长球的阻力系数结果。 $a/b < 1.25$  时采用分段等强度近似,当  $a/b$  在 1.5 到 5 之间时,分段等强度近似的收敛性变差,因此改用分段线性近似,同样的理由,当  $a/b$  大于 10 时,采用分段抛物近似,这样收敛性较好。从表 1 中可以看出,本方法具有相当好的收敛性,一般具有四位有效数字的精度,即使在  $d/a = 1.05$  长球和板几乎接触的干扰情形,也至少收敛到三位有效数字。为了检验结果的可靠性,我们和 Brenner<sup>(10)</sup> 的近似结果进行了比较, Brenner 对于长轴对称体离板较远时采用反演法得到了阻力系数的近似公式, Brenner 的结果并列在表 1 的  $d/a = 10.1$  那列中,可以看出  $d/a = 10.1$  的情形和 Brenner 的结果符合得很好。最近,许盛群<sup>(12)\*</sup> 采用格林函数面分布方法计算了长球以不同姿态在以平板为界的半无穷空间中运动所引起的 Stokes 流。其中有两种情形,即  $d/a = 1.5$ ,  $d/a = 10$  ( $a/b = 2.0$ ) 是轴对称情形,可资比较,我们对这两种情形单独进行了计算并和许的结果进行了对比,结果援引在表 3 中,不难看出,两者符合得很好,一般有四位或三位有效数字的重合,以上两例对比说明,采用本方法得到的结果是可靠的。

\* 作者最近从私人通信中得悉许的结果。

表1 长球的阻力系数  $d/a=10.1$

		分段线性近似										分段抛物近似						
M	N	$a/b=1.01$	$a/b=1.1$	$a/b=1.25$	M	N	$a/b=1.5$	$a/b=2.0$	$a/b=2.5$	$a/b=3.0$	$a/b=4.0$	$a/b=5.0$	M	N	$a/b=10$	$a/b=20$	$a/b=50$	$a/b=100$
3	4	1.126	1.137	1.159	5	4	1.200	1.291	1.386	1.482	1.679	1.861	3	4	2.729	4.271	8.265	14.12
	6	1.126	1.137	1.159	6		1.200	1.291	1.386	1.482	1.679	1.861	4		2.728	4.271	8.267	14.11
					7					1.482	1.673	1.860	5		2.728	4.271	8.267	14.11
					8					1.673	1.860							
Brenner		1.127	1.138	1.159	Brenner		1.200	1.291	1.386	1.482	1.672	1.859	Brenner		2.728	4.271	8.266	

$d/a=2.35$

		分段线性近似										分段抛物近似					
M	N	$a/b=1.01$	$a/b=1.1$	$a/b=1.25$	M	N	$a/b=1.5$	$a/b=2.0$	$a/b=2.5$	$a/b=3.0$	$a/b=4.0$	$a/b=5.0$	M	N	$a/b=20$	$a/b=50$	$a/b=100$
3	6	1.833	1.785	1.733	5	4	1.693	1.697	1.748				2	4	4.659	8.822	14.90
	8	1.833	1.785	1.733	6		1.693	1.697	1.748				3		4.649	8.814	14.91
					7				1.820	1.987	2.385	4		4.649	8.818	14.91	
					8				1.820	1.986	2.167	5			8.818	14.91	
					9					1.986	2.163	6					
					10					1.986	2.163						

$d/a=1.54$

		分段线性近似										分段抛物近似					
M	N	$a/b=1.01$	$a/b=1.1$	$a/b=1.25$	M	N	$a/b=1.5$	$a/b=2.0$	$a/b=2.5$	$a/b=3.0$	$a/b=4.0$	$a/b=5.0$	M	N	$a/b=20$	$a/b=50$	$a/b=100$
3	4	3.024	2.830		5	4	2.389	2.214	2.181				2	4	4.95	9.33	15.59
	6	3.023	2.831	2.607	6		2.389	2.214	2.181				3		4.94	9.31	15.58
	8	3.023	2.831	2.607	7				2.204	2.323	2.476	4				9.29	15.57
					8				2.204	2.321	2.478	5				9.29	15.56
					9					2.321	2.478						

$d/a=1.10$

分段等强度近似				分段线性近似										
M	N	$a/b=1.01$	M	N	$a/b=1.1$	$a/b=1.25$	M	N	$a/b=1.5$	$a/b=2.0$	$a/b=2.5$	$a/b=3.0$	$a/b=4.0$	$a/b=5.0$
2	18	11.22	3	8	9.623	7.750	6	4	5.973	4.391	3.758	3.469	3.283	3.341
	20	11.24		10	9.616	7.760	7		5.973	4.391	3.758	3.469	3.280	3.297
	22	11.24		12	9.616	7.760	8						3.280	3.307
														3.307

$d/a=1.05$

分段等强度近似				分段线性近似									
M	N	$a/b=1.01$	M	N	$a/b=1.1, a/b=1.25$	M	N	$a/b=1.5$	$a/b=2.0$	$a/b=2.5$	$a/b=3.0$	$a/b=4.0$	$a/b=5.0$
2	22	21.12	5	8	18.97	13.43	7	4	9.582	6.261	4.951	4.328	3.835
	24	21.11		10	17.48	13.42	8		9.570	6.263	4.951	4.328	3.832
	26	21.11		12	17.49	13.42	9		9.58	6.263			3.833
				14	17.49	13.42	10		9.58				

表 2

卡西尼卵形体的阻力系数 (分段线性近似)

$d/a=10.1$										$d/a=1.54$										$d/a=1.10$									
M	N	$c=0.3$	$c=0.8$	$c=1.5$	$c=2.5$	M	N	$c=0.79$	$c=1.22$	$c=2.74$	M	N	$c=0.79$	$c=1.22$	$c=2.74$	M	N	$c=0.79$	$c=1.22$	$c=2.74$	M	N	$c=0.79$	$c=1.22$	$c=2.74$				
4	4	1.137	0.43	0.553	2.188	6	4	1.761	1.615	3.031	6	4	2.541	2.618	3.947	4	4	7.161	6.620	8.944	4	4	7.161	6.620	8.944				
5	5	1.137	1.236	1.553	2.188	7	7	1.761	1.910	3.031	7	7	2.541	2.618	3.947	6	6	7.140	6.667	9.026	6	6	7.140	6.667	9.026				
6	6	1.137	1.236	1.553	2.188	8	8		1.910		8	8				8	8	7.125	6.622	9.026	8	8	7.125	6.622	9.026				
		1.137	1.236	1.552	2.187											10	10	7.119	6.622		10	10	7.119	6.622					
																12	12	7.119			12	12	7.119						

表 3

结果比较

$d/a=1.5$		$d/a=10$	
本文 2.273	许盛群 2.272	本文 1.291	许盛群 1.291

卡西尼卵形体阻力系数的结果列在表 2 中, 计算了  $d/a=10.1, 2.35, 1.54, 1.10; c=0.3, 0.8, 1.5, 2.5, 0.79, 1.22, 2.74$ , 等情况下的阻力系数值, 同表还列出了 Brenner 的近似结果,  $c=0.8, c=2.5$  时卡西尼卵形体的图形画在图 2 上,  $c=0.8$  对应于全凸形,  $c=2.5$  有凹陷部分。可以看出, 即使对于有凹陷部分的卡西尼卵形体也可以有四位有效数字的收敛性, 而且  $d/a=10.1$  的形和 Brenner 的结果吻合得很好。

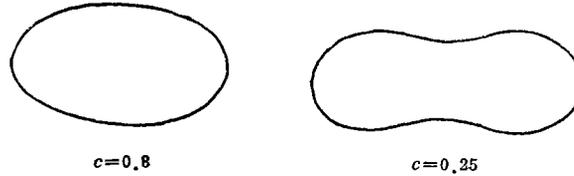


图 2

## 参 考 文 献

- [1] Chwang, A. T. and T. Y. T. Wu, Hydromechanics of low-Reynolds-number flow, Part 1: Rotation of axisymmetric prolate bodies, *J. Fluid Mech.*, 63 (1974), 607—622.
- [2] Gluckman, M. M., S. Weinbaum and R., Pfeffer, Axisymmetric slow viscous flow past an arbitrary convex body of revolution, *J. Fluid Mech.*, 55 (1972), 677—709.
- [3] Youngren, G. K. and Acrivos, Stokes flow past a particle of arbitrary shape, a numerical method of Solution, *J. Fluid Mech.*, 69 (1975), 377—403.
- [4] 吴望一, 解任意形状非细长长轴对称体 Stokes 流动的一种新方法, 中国科学, A辑, 2 (1984) 145—156.
- [5] 吴望一、何青, 蠕动流中连续奇点线分布法分段线性近似, 应用数学和力学, 4, 6 (1984), 793—800.
- [6] 吴望一、王少华, Stokes 流动中连续奇点线分布法分段抛物近似, 力学学报 5 (1984), 443—453.
- [7] 吴望一、朱敏, 解任意形状扁轴对称体 Stokes 流动的离散奇点环形分布法, 力学学报, 6 (1985).
- [8] 朱敏、吴望一, 解任意形状扁轴对称体 Stokes 流动的奇点线分布法, 应用数学和力学 6, 10 (1985).
- [9] 林胜天、吴望一, 三维 Stokes 流动的半解析半数值解, 空气动力学学报, 2 (1986).
- [10] Brenner, H., Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an arbitrary particle *J. Fluid Mech.*, 12 (1962), 35—48.
- [11] Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettigen and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Mc-Graw-Hill, New York (1954).
- [12] Hsu, Richard (许盛群) and Peter Ganatos, *Hydrodynamic Interaction of an Arbitrary Particle with a Planar Wall at Low Reynolds Number*, Part 1: Formulation and application to spheroidal particles (to be published).

# The Stokes Flow of an Arbitrary Prolate Axisymmetric Body towards an Infinite Plane Wall

Yuan Fan    Wu Wang-yi

*(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)*

## Abstract

By distributing continuously the image Sampsonlets with respect to the plane and by applying the constant density, the linear and the parabolic approximation, the analytic expressions in closed form for flow field are obtained. The drag factor of the prolate spheroid and the Cassini oval are calculated for different slender ratios and different distances between the body and the plane. It is demonstrated that the proposed method is satisfactory both in convergence and accuracy. Comparison with existing results in the case of prolate spheroid shows that the coincidence is quite good.