

# 有限深两层流中内孤立波的高阶解\*

周清甫

(中山大学, 1985年2月10日收到)

## 摘要

本文研究有限水深两层流中孤立波的三阶近似理论, 并考虑了自由表面对孤立波的影响, 运用坐标变形方法得到了三阶内孤立波的发展方程, 求得波速的解析表达式, 对方程进行了数值计算, 得到了几种参数下三阶解曲线, 指出自由表面对波型和波速的影响是二阶的, 计算表明三阶解对一阶、二阶解有明显的改进, 使其更加接近试验结果。

在Kdv理论和Benjamin-One理论之后, 1977年Kubota<sup>[1]</sup>找到了在有限水深分层流中长内波的发展方程, 指出孤立波的存在, 为检验它的正确性, Koop等人<sup>[2]</sup>和Segur等人<sup>[3]</sup>分别进行了试验研究, 他们发现只有当波幅很小时一阶解才能给出正确结果。随着振幅增大, 精度迅速恶化。经过二阶修正后, 他们得到了比一阶解有显著改进的结果。但当相对振幅超过五分之一时, 二阶解也同试验值相差很大。因此发展三阶理论是十分必要的, 另一方面, 正如在下文中可看到的, 在上层流体自由表面处, 有估计式

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = O(\varepsilon \Delta)$$

其中 $\phi_1$ 是上层流速势,  $\Delta = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$ ,  $\varepsilon$ 是下层水深对上层水深之比。这意味着应从二阶解开始考虑自由表面对内波的影响。

本文研究在自由表面存在的条件下有限水深两层流中三阶孤立波理论, 找到了它的发展方程, 对发展方程进行了数值计算, 分析了自由表面对波型波速的影响, 算例表明三阶解能给出相当满意的结果。

## 一、基本方程

流场分为上下两层, 其间有交界面存在, 交界面的波动状态表为 $y^* = \eta^*(t^*, x^*)$ , 各物理量和坐标系的表示如图1所示。

所谓有限水深内孤立波理论是基于以下三个假定<sup>[1], [3]</sup>

(1) 流体下层的深度 $h_2$ 比上层深度 $h_1$ 小得多

$$\varepsilon = h_2 / h_1 \ll 1 \quad (1.1)$$

(2) 交界面上的内波波长比下层流体的深度 $h_2$ 大得多, 但同上层深度 $h_1$ 同阶;

\* 江福汝推荐, 中国科学院基金资助课题。

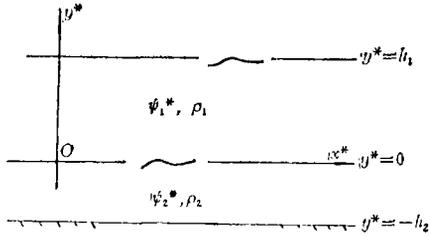


图 1

而上层流体无量纲变量则为

$$\left. \begin{aligned} x &= x^*/h_1, & y_1 &= y^*/h_1 \\ t &= ct^*/h_1, & \zeta^* &= \varepsilon^2 h_2 \zeta \\ \psi_1^* &= \varepsilon h_2 c \psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

此处 $\zeta^*$ 表示自由面升高,  $\psi_1^*$ 和 $\psi_2^*$ 是上、下两层流体的速度势。

因 $\psi_2^*$ 满足Laplace方程和底部条件, 可以证明<sup>[5]</sup> $\psi_2^*$ 可表为

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \frac{(y+1)^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{\partial^{2n} \psi_2}{\partial x^{2n}} \right)_{y=-1} \quad (1.4)$$

与此式相一致的, 可取速度 $u^*$ ,  $v^*$ 的无量纲形式为

$$u^* = \varepsilon c u, \quad v^* = \varepsilon^2 c v \quad (1.5)$$

因为由(1.4)给出的 $\psi_2$ 总是满足Laplace方程和底部条件的, 因此只剩下交界面上的条件需要满足, 它们是运动学条件和上下两层压力相等的条件, 其无量纲形式为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \quad (\text{在 } y = -1 + \eta \text{ 上}) \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} c^2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon^3 (U^2 + V^2) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} (\varepsilon u^2 + \varepsilon^3 v^2) \right\} \\ - g \Delta h_2 \eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } y = -1 + \eta \text{ 上}) \quad (1.7)$$

式中 $U$ 、 $V$ 是上层流体的无量纲分量,  $g$ 是重力加速度。

现在叙述上层流体应满足的条件。首先, 速度势 $\psi$ 应满足Laplace方程

$$\nabla^2 \psi_1 = 0 \quad (1.8)$$

在交界面处,  $\psi_1$ 与 $\eta$ 一起要满足条件(1.7)和运动学条件

$$\varepsilon(\varepsilon U - u) \frac{\partial \eta}{\partial x} = V - v \quad (\text{在 } y = \eta \text{ 上}) \quad (1.9)$$

在自由表面, 还要求 $\psi_1$ 满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^2}{g h_2} \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \varepsilon^3 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial y_1} \zeta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \right)^2 \right\} \\ + \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y_1^2} \zeta - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \varepsilon^3 \zeta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } y_1 = 1 + \varepsilon^3 \zeta \text{ 上}) \quad (1.10)$$

综合上述, 下层流体速度 $u$ ,  $v$ 由(1.4)规定, 它们同 $\eta$ 一起要满足条件(1.6)、(1.7)、(1.9); 而上层流体速势 $\psi_1$ 要满足方程(1.7)、(1.8)、(1.9)、(1.10)。可见交界面上条件(1.6)、(1.7)、(1.9)是上下两层流体的连接条件。

## 二、各阶摄动解

引入随波一起运动的坐标系

$$r = (x^* - ct^*)/h_1 = x - t \quad (2.1)$$

为了在三阶近似中避免长期项, 还要引入变形坐标变换

$$r = \xi - \varepsilon\theta(\xi) \quad (2.2)$$

$\theta(\xi)$ 是待定的, 将在各阶求解过程中确定。

将各变量展为 $\varepsilon$ 的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_1 + \varepsilon c_2 + \varepsilon^2 c_3 + \dots \\ \theta(\xi) &= \theta_1(\xi) + \varepsilon\theta_2(\xi) + \dots \\ u &= u_1(\xi) + \varepsilon u_2(\xi) + \varepsilon^2 u_3(\xi) + \dots \\ \eta &= \eta_1(\xi) + \varepsilon\eta_2(\xi) + \varepsilon^2 \eta_3(\xi) + \dots \\ \zeta &= \zeta_1(\xi) + \varepsilon\zeta_2(\xi) + \varepsilon^2 \zeta_3(\xi) + \dots \\ \psi_1 &= \phi_1(t, \xi, y) + \varepsilon\phi_2(t, \xi, y) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

由此可得转换关系

$$\frac{\partial}{\partial r} = (1 - \varepsilon\theta_{1\xi} + \varepsilon^2(\theta_{1\xi}^2 - \theta_{2\xi}) + \dots) \frac{\partial}{\partial \xi}$$

## A、一阶发展方程和它的解

将展式(2.3)代入(1.6)~(1.10)的各方程, 可得各阶近似方程。先看首阶项, 由(1.6)、(1.7)、(1.9)各首阶项可得到在交界面平衡位置 $y=0$ 上的各量之间的关系

$$\eta_{1\xi} = u_{1\xi}, \quad V_1 + u_{1\xi} = 0, \quad c_1^2 u_1 - g\Delta h_2 \eta_1 = 0$$

由此得到

$$c_1^2 = g\Delta h_2, \quad \eta_1 = u_1, \quad V_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} = -u_{1\xi} \quad (2.4)$$

上式第一个式子给出了一阶波速, 第三式规定了上层流体速势 $\phi_1$ 在 $y_1=0$ 处的边界条件。

由(1.8)、(1.10)的首阶项和(2.4)得到决定 $\phi_1$ 的方程和边条件

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0} = -\eta_{1\xi} \quad (2.5)$$

此问题的解是

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh k(1-y_1)}{k \sinh k} \bar{\eta}_{1\xi} \exp(ik\xi) dk \quad (2.6)$$

此处 $\bar{\eta}_{1\xi}$ 表示 $\eta_{1\xi}$ 的Fourier变换。由首阶方程仍不能决定 $\eta_1$ 所满足的方程, 它必须由(1.6)、(1.7)、(1.9)的二阶方程所规定, 同样的, 决定 $\eta_2$ 的二阶发展方程应由(1.8)、(1.10)的二阶方程和(1.6)、(1.7)、(1.9)的三阶方程来规定; 决定 $\eta_3$ 的三阶发展方程应由(1.8)、(1.10)的三阶方程和(1.6)、(1.7)、(1.9)的四阶方程所规定。

所以为了找到一阶发展方程, 要从(1.6)、(1.7)、(1.9)的二阶方程中消去 $\eta_2$ 和 $u_2$ , 再将 $\phi_1$ 的值代入, 并注意到<sup>[3]</sup>

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k \coth k) \bar{f} \exp(ik\xi) dk = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \quad (2.7)$$

则得到一阶发展方程:

$$3c_1\eta_1\eta_1\xi - 2c_2\eta_1\xi - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{c_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(y) \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \quad (2.8)$$

对此类方程, Joseph<sup>[4]</sup>等人已给出孤立波解

$$\frac{3}{2} \eta_1 = \frac{\lambda \sin \lambda}{\cos \lambda + \cosh \lambda (\xi + \xi_0)} \quad (2.9)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} c_1 \lambda \cot \lambda \quad (2.10)$$

此处 $\xi_0$ 是任意参数,  $\lambda$ 也是一个参数, 要求它 $0 < \lambda < \pi$ .

### B、二阶发展方程

二阶发展方程可从(1.8)、(1.10)的二阶方程和(1.6)、(1.7)、(1.9)的三阶方程中求得. 先从其中消去 $\eta_3$ ,  $u_3$ , 可得一个综合式

$$\begin{aligned} & -c_1^2 \phi_{2\xi\xi} + c_1^2 \theta_{1\xi} \phi_{1\xi\xi} - 2c_1 c_2 \phi_{1\xi\xi} + 2c_1 c_2 \eta_{2\xi} - 3c_1^2 (\eta_1 \eta_2)_\xi \\ & - 6c_1 c_2 \eta_1 \eta_{1\xi} + (c_2^2 + 2c_1 c_3) \eta_{1\xi} + 6c_1^2 \eta_1^2 \eta_{1\xi} - \frac{1}{3} c_1^2 \eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

可见式中的 $\theta_{1\xi}$ ,  $\phi_{2\xi\xi}$ 有待确定. 经试算发现, 如将 $\theta_1(\xi)$ 表示为

$$\theta_1(\xi) = \alpha \xi \quad (2.12)$$

将可求解过程中消去长期项, 此处 $\alpha$ 是待定常数.

根据(1.8)、(1.10)的二阶方程和(1.9)的二阶关系可找到决定 $\phi_2$ 的边值问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= 2\alpha \phi_{1\xi\xi} \\ \phi_{2y_1} |_{y_1=1} &= -\Delta \phi_{1\xi\xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\phi_{2y_1} |_{y_1=0} = -\eta_{2\xi} + \alpha \eta_{1\xi} \quad (2.14)$$

此问题的解 $\phi_2$ 可表为 $\phi_2 = \phi_2^{(1)} + \phi_2^{(2)}$ . 其中

$$\begin{aligned} \phi_2^{(1)} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \bar{\eta}_1 [k y_1 \sinh k(1-y_1) + \cosh k(1-y)] \frac{\exp(ik\xi)}{\sinh k} dk \\ &+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i k \bar{\eta}_1 \frac{\cosh k y_1}{\sinh^2 k} \exp(i\xi k) dk \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i (\bar{\eta}_2 - \alpha \bar{\eta}_1) \frac{\cosh k(1-y_1)}{\sinh k} \exp(i\xi k) dk \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \bar{\phi}_{1\xi\xi}(y_1=1) \frac{\cosh k y_1}{k \sinh k} \exp(i\xi k) dk \end{aligned} \quad (2.16)$$

此处 $(\bar{\cdot})$ 都是表示括号中的量的Fourier变换. 容易证明

$$\bar{\phi}_{1\xi\xi}(y_1=1) = -\frac{ik^2}{\sinh k} \bar{\eta}_1 \quad (2.17)$$

由此 $\phi_2^{(2)}$ 右边第二项可改写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik\mathcal{A}\bar{\eta}_1) \frac{\cosh ky_1}{\sinh^2 k} \exp(i\xi k) dk \quad (2.18)$$

可以证明如果不想方法消去(2.18)式这一项, 则将在二阶发展方程中出现

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - y) \eta_2 \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy$$

这类长期项。为此可令

$$\alpha = -\mathcal{A} \quad (2.19)$$

则 $\phi_2$ 变为

$$\phi_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\eta}_2 \cosh k(1 - y_1) - \mathcal{A} k \bar{\eta}_1 y_1 \sinh k(1 - y_1)] \frac{\exp(i\xi k)}{\sinh k} dk \quad (2.20)$$

将 $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 代入(2.11)式, 又利用已知关系<sup>[3]</sup>

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} = \lambda^2 \eta_1 + 9c_2 \eta_1 - \frac{9}{2} \eta_1^3 \quad (2.21)$$

则(2.11)式变为

$$\begin{aligned} & 2c_2 \eta_2 \xi - 3c_1 (\eta_1 \eta_2) \xi + c_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_2 \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{c_1} \left( 3c_2^2 - 2c_1 c_3 + \frac{1}{3} c_1^2 \lambda^2 + 2\mathcal{A} c_1 c_2 \right) \eta_1 + \left( 3c_2 - \frac{3}{2} \mathcal{A} c_1 \right) \eta_1^2 - \frac{7}{2} c_1 \eta_1^3 \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

右端关于 $\eta_1$ 的系数应令其为零, 否则也将出现长期项 $\xi \eta_1$ <sup>[3]</sup>。由此得到二阶发展方程的最后形式和 $c_3$

$$\begin{aligned} & 2c_2 \eta_2 \xi - 3c_1 (\eta_1 \eta_2) \xi + c_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_2 \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left( 3c_2 - \frac{3}{2} \mathcal{A} c_1 \right) \eta_1^2 - \frac{7}{2} c_1 \eta_1^3 \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\frac{c_3}{c_1} = \frac{3}{8} \lambda^2 \cot^2 \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2 - \frac{\mathcal{A}}{2} \lambda \cot \lambda \quad (2.24)$$

式中参数 $\mathcal{A}$ 给出了自由表面对波型和波速的影响。

### C、三阶发展方程

其求解步骤与B中过程相同。仅列出主要算式, 选取 $\theta_2(\xi)$ 为

$$\theta_2(\xi) = \beta \xi \quad (2.25)$$

$\beta$ 是待定常数。由(1.6)、(1.7)、(1.9)的四阶方程可以得到一个综合式

$$\begin{aligned} & \{-c_1^2 \phi_{3\xi\xi} + c_1^2 \theta_{1\xi} \phi_{2\xi\xi} - 2c_1 c_2 \phi_{2\xi\xi}\}_{y_1=0} - 3c_1^2 (\eta_1 \eta_3) \xi \\ & + 2c_1 c_2 \eta_3 \xi + \frac{1}{2} c_1^2 (U_1^2 + V_1^2) \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ -2c_2 (c_1 (\mathcal{A}^2 - \beta) + (c_1 + 2c_3) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2c_2 \mathcal{A} ) + \lambda^2 \left( -\frac{2}{3} c_1^2 \mathcal{A} - \frac{2}{3} c_1 c_2 \right) + 2c_1 c_4 + 2c_2 c_3 \left] \eta_1 + \left[ \frac{3}{2} (c_1^2 (\mathcal{A}^2 - \beta) \right. \right. \\
& + c_1^2 + 2c_1 c_3 + 2c_1 c_2 \mathcal{A} + \frac{1}{3} c_1^2 \lambda^2 - 3c_1 c_3 - \frac{3}{2} c_2^2 \left. \right] \eta_1^2 + \left[ 10c_1 c_2 + 3c_1^2 \mathcal{A} \right] \eta_1^3 \\
& - 4c_1^2 \eta_1^4 + \left[ c_2^2 + 2c_1 c_3 \right] \eta_2 - 6c_1 c_2 \eta_1 \eta_2 - \frac{3}{2} c_1^2 \eta_2^2 \\
& - \frac{1}{3} c_1^2 \eta_2 \xi^2 + 6c_1^2 \eta_1^2 \eta_2 - \frac{5}{6} c_1^2 \eta_1^2 \xi \left. \right\} = 0 \tag{2.26}
\end{aligned}$$

由(1.8)、(1.9)、(1.10)的三阶方程可得到决定 $\phi_3$ 的边值问题, 求解后可得到 $\phi_3$ 在 $y_1=0$ 上的表达式

$$\begin{aligned}
\phi_{3(y_1=0)} &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}^2 + \left( \frac{3}{2} \mathcal{A}^2 - \beta \right) + \mathcal{A}^2 - \beta \right] \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_3 \right\} \coth k \exp(i\xi k) dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{U}_1 \bar{\eta}_1 \xi) \frac{\coth k}{k} \exp(i\xi k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\mathcal{A}^2}{2} + \frac{2}{3} \mathcal{A}^2 \right. \\
& \left. - \beta + \frac{2c_2}{c_1} \mathcal{A} + 2\mathcal{A}^2 \right\} \bar{\eta}_1 \frac{k}{\sinh^2 k} \exp(i\xi k) dk \tag{2.27}
\end{aligned}$$

应令上式右边最后一项为0, 否则将在 $\eta_3$ 中出现长期项. 由此可决定 $\beta$ 的值

$$\beta = \frac{13}{6} \mathcal{A}^2 + \frac{2c_2}{c_1} \mathcal{A} \tag{2.28}$$

还可证明

$$(\widetilde{U}_1 \bar{\eta}_1 \xi) = ik \left( \frac{c_2}{c_1} \bar{\eta}_1^2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_1^3 \right)$$

将 $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ 的值代入(2.26)之后, 将在(2.26)中出现形如

$$-c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{c_2}{c_1} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \eta_1^3 \right) \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \tag{2.29}$$

的项, 如果引入变换

$$\eta_3 = \eta_3^{(1)} + \frac{c_2}{c_1} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \eta_1^3 \tag{2.30}$$

使 $\eta_3$ 的方程变为关于 $\eta_3^{(1)}$ 的方程, 则(2.29)项不会出现. 此外利用容易证明的关系

$$\begin{aligned}
\frac{c_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (U_1^2 + V_1^2) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{2} c_1^2 \eta_1^2 \xi + 2c_2^2 \eta_1^2 - 3c_1 c_2 \eta_1^3 + \frac{9}{8} c_1^2 \eta_1^4 \right\} \\
\left( \frac{3}{2} \eta_1 \xi \right)^2 &= \lambda^2 \eta_1^2 - (2\lambda \cot \lambda) \eta_1^3 - \eta_1^4
\end{aligned}$$

就可得到三阶发展方程

$$-2c_2 \eta_3^{(1)} \xi + 3c_1 (\eta_1 \eta_3^{(1)}) \xi - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{c_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_3^{(1)} \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ \frac{5}{27} c_1 \lambda^2 + \frac{17}{2} \frac{c_2^2}{c_1} + \frac{3}{2} c_1 - \frac{21}{4} \mathcal{A}^2 c_1 - 6 \mathcal{A} c_2 \right] \eta_1^2 \right. \\
&\quad - \left( \frac{1}{2} \mathcal{A} c_1 + \frac{124}{27} c_2 \right) \eta_1^3 - \frac{913}{216} c_1 \eta_1^4 + \left( 2c_3 - 2c_2 \mathcal{A} - \frac{3c_2^2}{c_1} \right) \eta_2 \\
&\quad \left. + 3c_1 \mathcal{A} \eta_1 \eta_2 - \frac{3}{2} c_1 \eta_2^2 - \frac{1}{3} c_1 \eta_2 \xi + 6c_1 \eta_1^2 \eta_2 \right\} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

现在综述一下所得的结果

$$x - t = r = \left\{ 1 - \varepsilon \mathcal{A} + \left( \frac{13}{6} \mathcal{A}^2 + \frac{2c_2}{c_1} \right) \varepsilon^2 \right\} \xi \quad (2.32)$$

$$\eta = \eta_1 + \varepsilon \eta_2 + \varepsilon^2 \left\{ \eta_3^{(1)} + \left( \frac{c_2}{c_1} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \eta_1^3 \right) \right\} \quad (2.33)$$

式中  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3^{(1)}$  分别由方程(2.5)、(2.23)、(2.31)所规定, 而波速的解析表达式是

$$\left. \begin{aligned}
c &= c_1 + \varepsilon c_2 + \varepsilon^2 c_3 + \dots \\
c_1^2 &= gh_2 \mathcal{A}, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2} \lambda \cot \lambda \\
c_3 &= c_1 \left( \frac{3}{8} \lambda^2 \cot^2 \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2 - \frac{\mathcal{A}}{2} \lambda \cot \lambda \right)
\end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

### 三、数值例子

发展方程(2.23)、(2.31)可归结为下面形式方程的求解

$$3c_1(\eta_1 \eta_2)_\xi - 2c_2 \eta_2 \xi - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{c_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_2 \coth \frac{\pi}{2} (\xi - y) dy \right\} = G(\xi) \quad (3.1)$$

此方程只能通过数值方法求解。现在我们提出一种解法, 其基本思想是对(3.1)的两边取 Fourier 变换, 可得关于  $\eta_2$  的相的方程

$$3\widetilde{\eta_1 \eta_2} = \widetilde{\eta_2} \left\{ k \coth k + \frac{2c_2}{c_1} \right\} - \frac{i}{k} \widetilde{G}(\xi)$$

再运用文献[3]中方法将  $\eta_2$  展为以 Hermite 多项式为基函数的级数, 运用最小二乘法解线性代数方程。此方法的精度已通过实例检验, 因为若(3.1)中的  $G(\xi)$  取  $(\eta_1^2)_\xi$  时, (3.1)有精确解  $\eta_2 = 2\eta_1/3c_1$ 。计算表明: 当级数的项数  $N=12$ , 而  $\lambda \in (\pi/10, \pi/4)$  时, 数值解同精确解的最大误差不超过  $2 \times 10^{-2}$ 。图2划出了精确解  $\eta_2$  与数值解  $\widetilde{\eta_2}$  的比较, 图中还列出了  $N=14, 16$  时的结果, 可以看到随着  $N$  的增加, 解是稳定的。

图3是二阶解  $\eta^{(2)} = \eta_1 + \varepsilon \eta_2$  的数值解。同时标出了 Koop 等人<sup>[2]</sup>的试验值, 两者之间较为符合。

图4是当  $\lambda = 107\pi/180$ ,  $\mathcal{A} = 0.048$  的三阶解:

$$\eta^{(3)} = \eta_1 + \varepsilon \eta_2 + \varepsilon^2 \eta_3$$

此时相对于  $h_2$  的波高值为 0.476。二阶解已不能给出较好结果。图中标出了 Segur 等人<sup>[3]</sup>的试验值, 同时也划出了一阶、二阶数值解, 可见三阶解有明显的改进, 基本上与试验值一致。

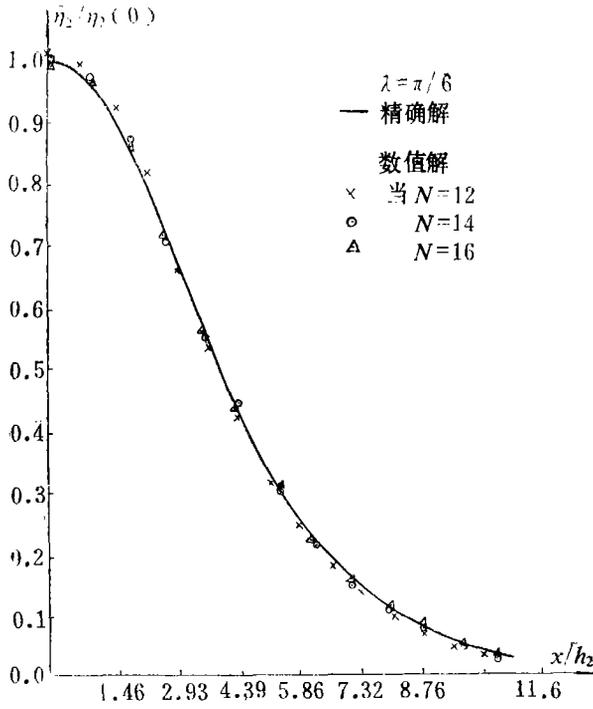


图2 对于 $G(\xi)=(\xi^2)\varepsilon$ , 二阶数值解和精确解的比较

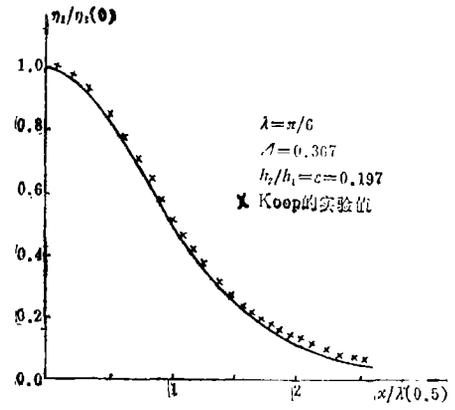
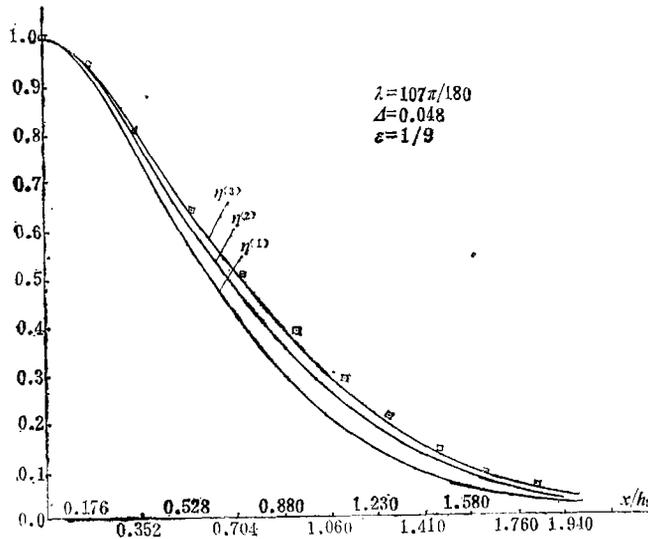


图 3



( $\eta^{(1)}$ 、 $\eta^{(2)}$ 、 $\eta^{(3)}$ 分别为一阶、二阶、三阶数值解;  $\square$ 表示Segur的实验结果)

图 4

参 考 文 献

[1] Kubota, T., D. R. S. Ko and L. Dobbs, *J. Hydronaut*, AIAA, 12, 157 (1978).  
 [2] Koop, C. G. and G. Bulter, *J. Fluid Mech.*, 112 (1981), 225—251.  
 [3] Segur, H. and J. L. Hammack, *J. Fluid Mech.*, 118 (1982), 285—304.

- [4] Joseph, R. I. and R. Egri, *J. Phys. A, Math, and Gen.*, 11 (1978).  
[5] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves* (1947).

## Higher-Order Theory of Internal Solitary Waves with a Free Surface in Two-Layer Fluid System of Finite Depth

Zhou Chin-fu

(*Department of Mathematics and Mechanics, Zhongshan  
University, Guangzhou*)

### Abstract

A higher-order approximation theory of internal solitary waves with a free surface is presented. Using the method of strained co-ordinates, the third-order approximation evolution equation of interface has been found. An analytic expression of the wave velocity is given. The evolution equation has been solved numerically. It is found that the effects of free surface on the shape and wave velocity of solitary wave are  $O(\epsilon^2)$ , and the third-order numerical solutions are closer to experimental data than the first- and second-order solutions.