

# 横向剪切对双模量复合材料叠层 矩形板非线性弯曲的影响\*

黄小清 董万林

(华南工学院, 1985年11月25日收到)

## 摘 要

本文探讨了动力松弛(DR)法在双模量复合材料叠层矩形板非线性弯曲问题中的应用. 在分析中分别采用叠层板大挠度经典理论和计及大转动(在 von Kármán 意义上)的复合材料叠层板剪切变形理论.

我们发现, 对于考虑横向剪切变形的非线性弯曲问题, 如何计算虚拟密度以控制数值计算的稳定性, 仍然需要进一步研究. 本文提出了一种虚拟密度的计算方法, 从而保证了本课题数值计算的稳定性.

文中介绍了用DR法求解双模量复合材料叠层板非线性弯曲的主要步骤, 给出了由轻度双模量材料(Born-Epoxy (B-E))和高度双模量材料(Aramid-Rubber (A-R)和Polyester-Rubber (P-R))的两层正交叠层简支矩形板在正弦分布载荷及均布载荷作用下的非线性弯曲特性的数值结果. 将所得结果和小挠度分析结果及普通复合材料的结果作了比较, 并分析了横向剪切变形对无量纲中心挠度的影响.

## 一、引 言

在工程实际中, 对用纤维增强双模量复合材料制成的叠层结构常常会提出以下的一些问题: (1) 在进行力学分析时, 双模量性质对应力和位移有多大影响? (2) 大挠度分析的必要性? (3) 在大挠度分析中横向剪切的影响有多大?

然而, 要同时考虑物理非线性、几何非线性以及横向剪切应变的影响, 使问题颇为复杂, 难以求得精确解, 因此, 选择一种有效的、简便的近似法是必要的. 就目前作者所知, 仅有 J. N. Reddy 和 W. C. Chao 用有限元法研究过这一问题<sup>[1]</sup>.

本文选择DR法来求解这一问题. DR法是六十年代提出并发展起来的一种新的数值方法. 该法的关键问题是如何正确计算控制收敛及数值稳定性的虚拟密度. 用DR法求解双模量叠层板问题的精确度已在作者的另一文<sup>[2]</sup>中得到证实, 其中由A-R及P-R材料制成的四边简支两层正交叠层矩形板在正弦载荷作用下的中性面位置和挠度均与精确解吻合得很好. 本文给出了上述叠层板在正弦载荷及均布载荷作用下非线性弯曲的DR解. 通过实际计算发现, 在计及

\* 周履推荐. 本文主要内容在国际复合材料和结构学术会议(1986年6月, 北京)上宣读.

横向剪切应变时,有时会出现数值不稳定现象。因此,本文提出了一种计算虚拟密度的方法,在本文所有计算中未遇到数值不稳定现象。

有几种关于双模量材料的力学模型。本文按照Bert模型进行计算<sup>[4]</sup>。所求得的结果均与小挠度结果及拉伸模量结果进行了比较。另外,计及横向剪切应变的数值结果也与相应的经典叠层理论的结果进行了比较,并分析了横向剪切变形的影响。所有这些比较回答了本节前面提出的问题。

计算实践表明,DR法是一种比较简便、有效的数值分析方法,值得进一步研究推广应用。

## 二、基本迭代式

采用计及大转动的叠层板剪切变形理论进行分析时,与平衡方程相应的动力方程为:

$$N_{1,x} + N_{\theta,y} = \rho_1 u_{,tt} + \mu_1 u_{,t} \quad (2.1a)$$

$$N_{\theta,x} + N_{2,y} = \rho_2 v_{,tt} + \mu_2 v_{,t} \quad (2.1b)$$

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} + N_1 w_{,xx} + N_2 w_{,yy} + 2N_{\theta} w_{,xy} + q = \rho_3 w_{,tt} + \mu_3 w_{,t} \quad (2.1c)$$

$$h(M_{1,x} + M_{\theta,y} - Q_1) = \rho_4 \phi_{x,tt} + \mu_4 \phi_{x,t} \quad (2.1d)$$

$$h(M_{\theta,x} + M_{2,y} - Q_2) = \rho_5 \phi_{y,tt} + \mu_5 \phi_{y,t} \quad (2.1e)$$

式中  $\phi_x = h\psi_x$  和  $\phi_y = h\psi_y$ ,  $\psi_x$  和  $\psi_y$  是在  $xz$  和  $yz$  平面内的弯曲转角;  $\rho_r$  为虚拟密度;  $\mu_r$  为阻尼系数 ( $r=1, 2, 3, 4, 5$ )。

从式(2.1a)可以写出速度  $\dot{u}$  的迭代式

$$\dot{u}_{(i,j),n} = (1 + 0.5\bar{\mu}_1)^{-1} \left[ (1 - 0.5\bar{\mu}_1) \dot{u}_{(i,j),n-1} + A_{(i,j),n-\frac{1}{2}} \Delta t / \rho_1(i,j),n-\frac{1}{2} \right] \quad (2.2a)$$

式中  $\bar{\mu}_1 = \mu_1 \Delta t / \rho_1(i,j),n-\frac{1}{2}$ ;  $A_{(i,j),n-\frac{1}{2}}$  为式(2.1a)等号左边的有限差分式。类似地可写出  $\dot{v}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{\phi}_x$  和  $\dot{\phi}_y$  的迭代式[(2.2b)~(2.2e), 省略]。

从  $u_{,t} = \dot{u}$ , 可写出位移  $u$  的迭代式

$$u_{(i,j),n+\frac{1}{2}} = u_{(i,j),n-\frac{1}{2}} + \dot{u}_{(i,j),n} \Delta t \quad (2.3a)$$

类似地可以写出  $v$ ,  $w$ ,  $\phi_x$  和  $\phi_y$  的迭代式[(2.3b)~(2.3e), 省略]。

叠层板的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} N_m \\ \dots \\ M_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mn} & \vdots & B_{mn} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{mn} & \vdots & D_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_n \\ \dots \\ \kappa_n \end{Bmatrix} \quad (m,n=1,2,6) \quad (2.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_4^2 S_{44} & K_4 K_5 S_{45} \\ K_4 K_5 S_{45} & K_5^2 S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} \quad (2.4b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } (A_{mn}, B_{mn}, D_{mn}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{mnkl} dz \quad (m,n=1,2,6) \\ S_{mn} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{mnkl} dz \quad (m,n=4,5) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= u_{,x} + (w_{,x})^2/2; & e_2 &= v_{,y} + (w_{,y})^2/2; \\ e_3 &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}; & \kappa_1 &= \phi_{x,x}/h; \\ \kappa_2 &= \phi_{yy}/h; & \kappa_3 &= (\phi_{x,y} + \phi_{y,x})/h; \\ e_4 &= w_{,y} + \phi_y/h; & e_5 &= w_{,x} + \phi_x/h \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(2.5)式中下标  $k$  表示纤维方向的应变的正负号(1~+, 2~-), 而  $l$  则表示层号。

将(2.4a, b)写成差分形式便可给出内力和内力矩的迭代式(省略)。

在各迭代公式中使用了双下标记号, 例如  $u_{(i, j), n+1/2}$  表示在节点  $(i, j)$  处、 $(n+1/2)\Delta t$  时刻的位移, 且速度是定义在时间  $(n-1)\Delta t$  上, 而位移和力以及力矩则是定义在时间  $(n-1/2)\Delta t$  上的。

### 三、虚拟密度的计算

当采用剪切理论来进行分析时, 有时会出现数值不稳定现象。因此, 我们提出如下的计算虚拟密度的方法。

(1)  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  的计算公式与采用非线性经典叠层理论进行分析时的相同<sup>[5]</sup>:

$$\rho_{1(i, j), n-\frac{1}{2}} = 0.25 \left[ \frac{\bar{N}_{1(i+1, j)} + \bar{N}_{1(i-1, j)}}{2\Delta x} + \frac{\bar{N}_{6(i, j+1)} + \bar{N}_{6(i, j-1)}}{2\Delta y} \right]_{n-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

$$\rho_{2(i, j), n-\frac{1}{2}} = 0.25 \left[ \frac{\bar{N}_{6(i+1, j)} + \bar{N}_{6(i-1, j)}}{2\Delta x} + \frac{\bar{N}_{2(i, j+1)} + \bar{N}_{2(i, j-1)}}{2\Delta y} \right]_{n-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_{3(i, j), n-\frac{1}{2}} = & 0.25 [ (\bar{M}_{1(i+1, j)} + 2\bar{M}_{1(i, j)} + \bar{M}_{1(i-1, j)}) / (\Delta x)^2 \\ & + (\bar{M}_{2(i, j+1)} + 2\bar{M}_{2(i, j)} + \bar{M}_{2(i, j-1)}) / (\Delta y)^2 \\ & + (\bar{M}_{6(i+1, j+1)} + \bar{M}_{6(i-1, j+1)} + \bar{M}_{6(i-1, j-1)} + \bar{M}_{6(i+1, j-1)}) / (2\Delta x \Delta y) \\ & + 4|N_{1(i, j)}| / (\Delta x)^2 + 4|N_{2(i, j)}| / (\Delta y)^2 + 2|N_{6(i, j)}| / (\Delta x \Delta y) \\ & + \bar{N}_{1(i, j)} |w_{(i+1, j)} - 2w_{(i, j)} + w_{(i-1, j)}| / (\Delta x)^2 \\ & + \bar{N}_{2(i, j)} |w_{(i, j+1)} - 2w_{(i, j)} + w_{(i, j-1)}| / (\Delta y)^2 \\ & + \bar{N}_{6(i, j)} |w_{(i+1, j+1)} - w_{(i-1, j+1)} + w_{(i-1, j-1)} - w_{(i+1, j-1)}| / (2\Delta x \Delta y) ]_{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(2)  $\rho_4, \rho_6$  由(2.1d)和(2.1e)的差分迭代式写出:

$$\begin{aligned} \rho_{4(i, j), n-\frac{1}{2}} = & 0.5h [ (\bar{M}_{1(i+1, j)} + \bar{M}_{1(i-1, j)}) / (2\Delta x) \\ & + (\bar{M}_{6(i, j+1)} + \bar{M}_{6(i, j-1)}) / (2\Delta y) + \bar{Q}_{1(i, j)} ]_{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_{6(i, j), n-\frac{1}{2}} = & 0.5h [ (\bar{M}_{6(i+1, j)} + \bar{M}_{6(i-1, j)}) / (2\Delta x) \\ & + (\bar{M}_{2(i, j+1)} + \bar{M}_{2(i, j-1)}) / (2\Delta y) + \bar{Q}_{2(i, j)} ]_{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中,  $\bar{N}_{m(i, j)}$  及  $\bar{M}_{m(i, j)}$  ( $m=1, 2, 6$ ) 的计算公式按非线性经典叠层理论的本构关系写出, 如

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1(i, j), n-\frac{1}{2}} = & [ (A_{11} + A_{16}) / \Delta x + (A_{12} + A_{16}) / \Delta y \\ & + 4|B_{11}| / (\Delta x)^2 + 4|B_{12}| / (\Delta y)^2 + 2|B_{16}| / (\Delta x \Delta y) \\ & + 0.5A_{11} |w_{(i+1, j)} - w_{(i-1, j)}| / (\Delta x)^2 \\ & + 0.5A_{12} |w_{(i, j+1)} - w_{(i, j-1)}| / (\Delta y)^2 \\ & + 0.5A_{16} |w_{(i+1, j)} - w_{(i-1, j)}| / (\Delta x \Delta y) \\ & + 0.5A_{16} |w_{(i, j+1)} - w_{(i, j-1)}| / (\Delta x \Delta y) ]_{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{1(i, j), n-\frac{1}{2}} = & [ (|B_{11}| + |B_{16}|) / \Delta x + (|B_{12}| + |B_{16}|) / \Delta y \\ & + 4D_{11} / (\Delta x)^2 + 4D_{12} / (\Delta y)^2 + 2D_{16} / (\Delta x \Delta y) \\ & + 0.5|B_{11}| |w_{(i+1, j)} - w_{(i-1, j)}| / (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 0.5|B_{12}||w_{(t,j+1)} - w_{(t,j-1)}|/(\Delta y)^2 \\
 &+ 0.5|B_{16}||w_{(t+1,j)} - w_{(t-1,j)}|/(\Delta x\Delta y) \\
 &+ 0.5|B_{16}||w_{(t,j+1)} - w_{(t,j-1)}|/(\Delta x\Delta y)]_{n-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.6b}$$

$\bar{Q}_{1(t,j)}$  及  $\bar{Q}_{2(t,j)}$  则按(2.4b)的迭代式给出, 在(0/90)叠层情况下

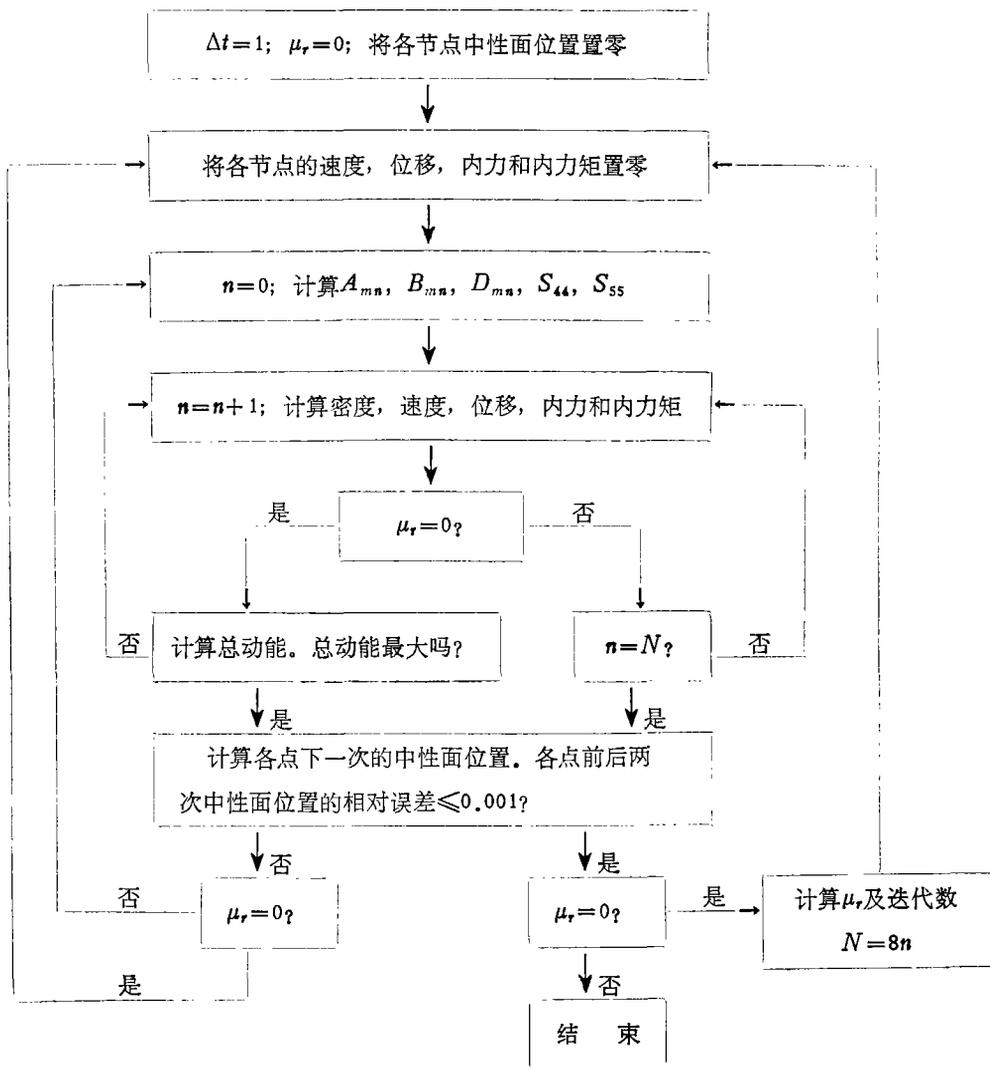
$$\left. \begin{aligned}
 \bar{Q}_{1(t,j),n-\frac{1}{2}} &= K_5^2 S_{55(t,j)}(1/\Delta x + 1/h) \\
 \bar{Q}_{2(t,j),n-\frac{1}{2}} &= K_4^2 S_{44(t,j)}(1/\Delta y + 1/h)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

在(3.6)~(3.7)式中,  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $D_{mn}$  ( $m, n=1, 2, 6$ ) 及  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  不是常量, 而是随节点位置变化的, 且其计算需要考虑九种情况 (参看文献[6]的附录)。

采用上述的虚拟密度计算方法, 在本文计算中未遇到数值不稳定现象 (边厚比从 100~10, 无量纲载荷  $\bar{q} = q_0 a^4 / E_2^c h^4$  从 10~100)。

#### 四、计算步骤

主要的计算步骤见如下的简化流程图:



### 五、数值结果和讨论

以下是三种双模量复合材料的两层正交铺设矩形板在正弦分布载荷 ( $q=q_0 \sin(\pi x/a) \cdot \sin(\pi y/b)$ )和均布载荷( $q=q_0$ )作用下的数值结果. 三种材料的材料性能由表1给出. 在计算中, 剪切修正系数 $K^2$  ( $r=4,5$ )取为5/6. 所有计算都是在DPS8/49计算机上以单精度进行的. 在数值结果的图表中, 采用了以下的简写符号:

- CFS——闭合解; CTS——经典理论的DR解;
- STS——剪切理论的DR解; BMS——双模量DR解;
- TMS——拉伸模量DR解; RE——相对误差.

表 1 三种单向双模量复合材料的材料性能 ( $G_{13}=G_{12}$ )

	A-R		P-R		B-E	
	拉 伸	压 缩	拉 伸	压 缩	压 缩	压 缩
$E_{11}(\text{GPa})$	3.58	0.0120	0.617	0.0369	206.8627	234.4444
$E_{22}(\text{GPa})$	0.00909	0.0120	0.0080	0.0106	12.4976	22.7549
$\nu_{12}$	0.416	0.205	0.475	0.185	0.21	0.25
$G_{12}(\text{GPa})$	0.00370	0.00370	0.00262	0.00267	6.9	6.9
$G_{23}(\text{GPa})$	0.00290	0.00499	0.00233	0.00475		

本文求得的非线性无量纲中心挠度  $\bar{w}$  均分别与小挠度闭合解作了比较. 对于 A-R 材料 (0/90)方板在正弦载荷作用下的比较列于表2. 由表中可见, 不论采用哪种理论, 当  $\bar{w}=0.5$  时, 其相对误差达20%左右, 因此, 当  $\bar{q}$  较大时, 考虑大挠度是必要的.

表 2 A-R (0/90)方板在正弦载荷下的线性CFS和非线性DRS的比较

$\bar{q}$	CTS		STS			
	$\bar{w}=w/h$	RE	$a/h=100$		$a/h=10$	
			$\bar{w}=w/h$	RE	$\bar{w}=w/h$	RE
线性经典闭合解	$0.01780\bar{q}$		$0.01775\bar{q}$		$0.01957\bar{q}$	
10	0.168283	5.5%	0.171587	3.3%	0.189341	3.2%
20	0.313329	12.0%	0.317244	10.6%	0.347165	11.3%
30	0.438760	17.8%	0.441998	17.0%	0.479929	18.3%
40	0.548513	22.9%	0.550484	22.5%	0.593903	24.1%
50	0.645824	27.4%	0.646271	27.1%	0.693639	29.1%

本文用两种理论求得的双模量解已分别与对应的单模量 (拉伸或压缩或拉压平均模量)解作过比较. 对于 A-R 材料 (0/90)方板在正弦载荷下与拉伸模量解的比较列于表3. 当采用剪切理论时, 虽然其相对误差比较小, 且随  $a/h$  的减少及载荷的增加而减少, 但双模量性质的影响都是非常显著的. 因此, 对于高度双模量复合材料, 必须考虑双模量性质的影响.

图 1 绘出了  $\bar{w}$  与  $\bar{q}$  之间的关系曲线. 表4给出了 A-R 和 P-R 材料 (0/90) 方板在正弦载荷下的  $\bar{w}$  及其与经典理论解比较的相对误差. 显而易见, 考虑横向剪切变形将使挠度增加, 并随  $a/h$  的减少而变得更加显著.

B-E材料(0/90)方板的经典理论解列于表5. 由表中可见, 其小挠度的双模量解与拉伸模量解的相对误差约为 16%, 而大挠度解的相对误差随载荷增加而减少, 当  $\bar{w}=0.5$  时, 大约

表3 A-R(0/90)方板在正弦载荷下大挠度TMS与BMS的中心挠度( $\bar{w}=w/h$ )的比较

$\bar{q}$	CTS		STS			
	TMS	RE	$a/h=100$		$a/h=10$	
			TMS	RE	TMS	RE
10	0.0158854	90.6%	0.0166612	90.3%	0.0390476	79.4%
20	0.0317698	89.8%	0.0333214	89.5%	0.0780584	77.5%
30	0.0476520	89.1%	0.0499793	88.7%	0.116994	75.6%
40	0.0635310	88.4%	0.0666340	87.9%	0.155811	73.8%
50	0.0794058	87.7%	0.0832842	87.1%	0.194457	72.0%

表4 A-R和P-R方板在正弦载荷下  $a/h$ 对 $\bar{w}$ 的影响( $\bar{q}=30$ )

	$a/h$	$\bar{w}$	RE
(CTS)		0.438760	
	100	0.441998	0.73%
	50	0.443201	1.00%
A-R	40	0.444100	1.20%
	20	0.451520	2.91%
	10	0.479929	9.30%
	5	0.576379	31.36%
	(CTS)	0.468807	
(CTS)	100	0.474336	1.18%
	50	0.476630	1.45%
	P-R	40	0.476597
20		0.484589	3.37%
10		0.515322	9.92%
5		0.621023	32.47%

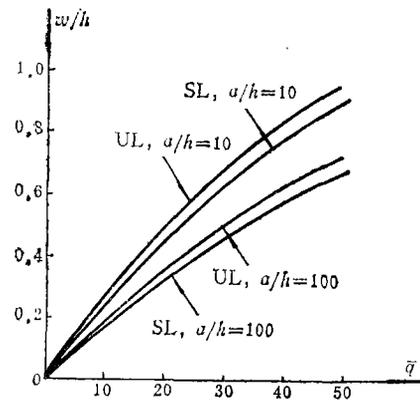


图1 P-R方板在正弦载荷(SL)和均布载荷(UL)下的挠度与载荷之间的关系曲线

表5 B-E (0/90)方板TMS和BMS的比较 (经典理论分析)

$\bar{q}$	$\bar{w}=w/h$					
	正弦载荷			均布载荷		
	BMS	TMS	RE	BMS	TMS	RE
线性解	$0.0204931\bar{q}$	$0.0237856\bar{q}$	16.1%	$0.0322067\bar{q}$	$0.037363\bar{q}$	16.0%
10	0.203310	0.232668	14.4%	0.314216	0.355164	13.0%
20	0.393226	0.440509	12.0%	0.583874	0.639488	9.5%
30	0.561719	0.616920	9.8%	0.801933	0.859391	7.2%
40	0.708702	0.766303	8.1%	0.980619	1.03624	5.7%
50	0.837306	0.894770	6.9%	1.13130	1.18429	4.7%

为10%，而 $\bar{w}=1$ 时，大约为6%~7%。

最后，应该指出，在任何情况下都能保证数值稳性的虚拟密度的统一计算公式尚未建立，值得进一步研究。但是，对于每一种情况，不管如何选取虚拟密度，只要它能保证数值稳定，其结果便是正确可靠的。这也是DR法的一个优点。

作者得到周履教授的指导，在此谨致深切谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Reddy, J. N. and W. C. Chao, Nonlinear bending of bimodular-materials plates, *Int. J. Solids and Structures*, **19**, 3 (1983), 229—237.
- [2] 董万林、黄小清, 动力松弛法解双模量复合材料叠层板的弯曲问题(待发表)。
- [3] Cassell, A. C. and R. E. Hobbs, Numerical stability of Dynamic Relaxation analysis of non-linear structures, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **10** (1976), 1407—1410.
- [4] Bert, C.W., Models for fibrous composites with different properties in tension and compression, *J. Eng. Mater. Technol.*, **99**, 4 (1977), 344—349.
- [5] 黄小清, 动力松弛法在复合材料叠层板非线性弯曲问题中的应用, *复合材料学报*, **2**, 2 (1985), 47—51.
- [6] 王迪新、范业立、董万林、周履, 双模量复合材料正交叠层矩形薄板的弯曲问题, *复合材料学报*, **2**, 1 (1985), 23—37.

## Effects of Transverse Shear on the Nonlinear Bending of Rectangular Plates Laminated of Bimodular Composite Materials

Huang Xiao-qing     Dong Wan-lin

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

### Abstract

This paper investigates the application of Dynamic-Relaxation(DR)method to the problems of nonlinear bending of rectangular plates laminated of bimodular composite materials. The classical lamination theory and a shear deformation theory of layered composite plates, taking account of large rotations (in the von Kármán sense), are employed separately to analyze the subject.

It has been found here that the estimation of the fictitious densities which control the convergence and numerical stability of nonlinear DR solution considering transverse shear effect still needs to be further investigated. In this paper, a procedure to calculate fictitious densities has been presented; hence the numerical stability of this topic has been ensured.

In this paper the main steps of solving the nonlinear bending of bimodular composite laminates by means of DR method are outlined. The numerical results are given for simply supported, two-layer cross-ply rectangular plates made of mildly bimodular material (Boron-Epoxy (B-E)) and highly bimodular materials (Aramid-Rubber (A-R) and Polyester-Rubber (P-R) under sinusoidally distributed and uniformly distributed transverse loads. The results obtained have been compared with linear results and those obtained for laminates fabricated from conventional composite materials, the elastic moduli of which are identical with the tensile moduli of the bimodular materials. In addition, the effect of transverse shear deformation on the nondimensionalized center deflection has been studied.