应用数学和力学，第7卷第12期（1986年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 耗散力学和非线性耗散型方程的精确解
## ——耗散力学原理和应用（Ⅰ）*

沈惠川

（中国科学技术大学，1985年10月1日收到）

### 摘要

本文是文[1～4]的继续和升华.

（1）在本文中，我们根据互补性原理，建立了耗散力学．它是与量子力学相对应的一种耗散理论．可以用这种理论来统一地处理非平衡态热力学和粘滞流体动力学问题，并可以用它来处理量子力学中各种耗散和不可逆的问题．耗散力学的基本方程是与Schrödinger方程或Dirac方程相对应的一类本征值方程；

（2）在本文中，我们将一些基本的非线性耗散型方程，特别是作为宏观非平衡态热力学和粘滞流体动力学基本方程的Navier-Stokes方程，统一地归结为耗散力学基本方程的可积性条件，从而为利用散射反演方法求它们的精确解扫平了道路．

### 符号

$A$ 波函数的振幅；

$A_0$ 电磁场的标势；

$A_k$ $(k=1,2,3)$ 电磁场的矢势；

$\left.\begin{matrix}A(x,t,\zeta)\\B(x,t,\zeta)\\C(x,t,\zeta)\end{matrix}\right\}$ 矩阵Hamilton量的诸元素；

$c$ 光速；

$e$ 粒子的电荷；

$F$ 单个粒子的耗散函数，或耗散能量宽度；

$H$ Hamilton量；

$\hbar$ Planck常数除以$2\pi$；

$i=\sqrt{-1}$ 虚数的单位；

$\boldsymbol{J}$ 流密度矢量；

$J_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 热力学"流"；

$k$ Boltzmann常数；

$k_k$ $(k=1,2,3)$ 波矢的分量；

$\hat{L}$ $2\times2$算子矩阵；

$L_{ik}$ $(i,k=1,2,\cdots)$ 热力学唯象系数；

$m$ 粒子的质量；

$p_k$ $(k=1,2,3)$ 动量的分量；

$\left.\begin{matrix}q(x,t)\\r(x,t)\end{matrix}\right\}$ 势函数；

$R$ 粒子或圆球的半径，对全同粒子来说，$R$是常数；

$T$ 绝对温度；

$t$ 时间；

$U(x_k,t)$ $(k=1,2,3)$ 外场的势能；

$\left.\begin{matrix}u(x,t)\\v(x,t)\end{matrix}\right\}$ 函数；

$V$ 全空间；

$v_k$ $(k=1,2,3)$ 粒子的速度分量；

$W$ 功；

$w$ 波强；

$X_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 热力学"力"，或摩擦力；

*钱伟长推荐.

$x_k$ $(k=1,2,3)$ 空间位置的分量；
$\alpha$ 各向同性流场中的摩擦系数；
$\alpha_{ik}$ $(i,k=1,2,3)$ 摩擦系数张量；
$\beta$ Dirac矩阵；
$\gamma_k,\beta$ $(k=1,2,3)$ Dirac矩阵；
$\gamma_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,4)$ Flügge标准矩阵；
$\delta_{ik}(i,k=1,2,3)$ Krönecker符号；
$\zeta$ 本征值；
$\nu$ 粘滞系数（或热导率，或分子扩散率）；
$\sigma$ 无量纲熵增；
$\tau$ 准定态的寿命；
$\phi$ 角度；
$\psi$ 波函数；
$\bar{\psi}$ 互补波函数，或“反”波函数；
$\Omega$ 耗散频率宽度($\Omega$是实数)；
$\omega$ 波函数的频率；
$\nabla$ 劈形算符；
$\partial_t=\partial/\partial t$，$\partial_k=\partial/\partial x_k$ $(k=1,2,3)$ 偏微分算符；
$u_{,t}=\partial u/\partial t$，$u_{,x}=\partial u/\partial x$.

天其运乎！地其运乎！日月其争于所乎？孰主张是？孰维纲是？孰居无事推而行是？意者其有机缄而不得已邪？意者其运转而不能自止邪？

《庄子·天运篇》

## 一、前 言

本文是文[1～4]的继续和升华。在文[1～4]中，我们讨论的是流体动力学问题。经过各种数学变换，我们得到的结论是：Fourier方程

$$\partial_t\psi=\nu\nabla^2\psi \tag{1.1}$$

可以被称作是不可压缩粘滞流体动力学的学科方程；Fourier方程(1.1)式的具有线性迭加性质的衰减波函数解

$$\psi=A\exp(ik_kx_k-\Omega t) \tag{1.2}$$

可以被称作是不可压缩粘滞流体动力学问题的基本解。Fourier 本人正是由于找到了形如(1.2)式的解，才首创了Fourier级数法。

现在我们将所讨论的范围扩大到非平衡态热力学（或不可逆过程热力学）中去。在非平衡态热力学中，粘滞流动问题是作为张量过程出现的，其宏观唯象微分方程，就是流体动力学中的Navier-Stokes方程。甚至非平衡态热力学本身，有时也被称作“流体热力学”[5～6]。由文[3～4]我们熟知，不可压缩流体的Navier-Stokes方程的精确解，可以由 Fourier 方程(1.1)式的通解和Bäcklund变换而最终求得。与此同时，作为非平衡态热力学的矢量过程的热传导和分子扩散，其标准方程亦为Fourier方程。因此，Fourier 方程(1.1)式可以同时用来描述热传导、分子扩散和粘滞流动这三大非平衡态热力学问题。或者，可以进一步说，Fourier方程(1.1)式将取代“流体热力学”中的 Navier-Stokes 方程而成为整个非平衡态热力学的学科方程。

这种说法，甚至在微观的热力学问题中也有意义。例如无外力、完全无规则碰撞的Fokker-Planck方程就与Fourier方程完全一样[7～8]。

我们来研究一下Fourier方程(1.1)式。首先，Fourier 方程的基础可以说是经验性的，它并非由力学定律得出来的。在数理方程中它被称为扩散方程[9～10]。但，如果令

$$\psi\propto\exp[i(k_kx_k-\omega t)] \tag{1.3}$$

则得到

$$\omega=-i\nu k^2 \tag{1.4}$$

它表示频率$\omega$随波矢的平方$k^2$成正比地衰减的波。因此，从物理性质上来说，Fourier方程实际上是耗散型方程[11]。其次，由于粘滞系数（或热导率，或分子扩散率）$\nu$恒为正，我们不能够改变它的符号，因此，进行时间反演

$$t \to -t \tag{1.5}$$

马上得出不同的方程

$$\partial_t \psi = -\nu \nabla^2 \psi \tag{1.6}$$

我们把(1.6)式称为"反Fourier"方程[12]。方程(1.1)式与(1.6)式之间的差别，反映了热力学中的不可逆性。实际物理过程的不可逆性，从液氦或半导体中的低温输运过程起，直到完全电离的等离子体中的高温过程，能量范围遍及10的10次幂。Fourier方程确实能够描述热力学过程中的这些耗散性和不可逆性。

由于这些原因，以及非线性耗散型方程的精确解有可能导致I. Prigogine所称的"耗散结构"，我们觉得有必要在Fourier方程及其基本解的基础上发展一种称之为"耗散力学"的新的力学体系。较为完全的名称应当是"耗散量子力学"，但"耗散力学"这个名称却更能反映我们所论及问题的个性。Prigogine说过："把热力学的一些因素引入，就会导致（经典或量子的）动力学的重新建造"[13]，"动力学和热力学是自然界两种互为补充的解释，是由一种非统一的变换理论联系在一起的"[14]。本文所建立的耗散力学理论，就是为将热力学因素引入量子动力学，以解决实际耗散和不可逆问题所作的初步尝试。

建立耗散力学理论具有数学上和物理上的必要性。

从数学对称性来看，人们由d'Alembert波动方程的解，直接推演出Schrödinger方程[15~18]，Dirac方程[19~20]，Klein-Gordon方程[20]，以及包括在AKNS（Ablowitz-Kaup-Newell-Segur）方程[21~24]之内的KdV方程、非线性Schrödinger方程，sine-Gordon方程和Bloch方程等[11]，但是对Fourier热传导方程的解都没有作类似的推演，而Fourier热传导（扩散）方程与d'Alembert波动方程在经典数理方程[10]中是处于同等地位的（在正文中我们将说明这两个方程地位虽同等但却并不对应）。因此，发展耗散力学诸方程具有数学上的必要性。

从物理对称性来看，人们已经从非相对论性量子力学[15,25]，直接推演出量子电动力学[19,26]和量子场论[27]，但是对有耗散的不可逆的问题，例如宏观非平衡态热力学或流体热力学，却没有作类似的推演。因此，发展耗散力学理论具有物理上的必要性。

此外，过去在处理量子的非弹性散射和衰变问题时，用的是Schrödinger方程[15]。这样的处理方式有可争论之处。因为首先Schrödinger方程所描述的运动是色散（弥散）可逆的，而不是耗散不可逆的；既使引入所谓"复能量"可将Schrödinger方程变成耗散的，然而第二条最成问题的是，在Schrödinger方程中没有粘滞系数，而在一个正确的理论中，粘滞系数所具有的物理涵义与比热相比应该是等同的[14]。耗散和不可逆，应当用耗散系数（或粘滞系数）来表征。这从另一方面说明了发展耗散力学理论的物理必要性。

本文所导出的耗散力学基本方程可以与古典气体运动论的微观基本方程Boltzmann方程及以近代非平衡态统计热力学的微观基本方程Liouville方程[7~8]相比较。Boltzmann方程虽然体现了碰撞粒子的不可逆性，但它只适用于稀薄气体，并且对运动的涨落没有进行描述。到目前为止，所有将Boltzmann的最初推导推广到不同于原有推导的情况的企图都以失败而告终。至于Liouville方程，它实质上是热"流体"的连续性方程，是一个可逆的方程。Liouville方程及其在等离子体中的应用即Vlasov(Власов）方程，是用微观可逆性来统计

描述宏观不可逆性。它不可能全面地反映粒子间的非弹性碰撞和衰变及类似的不可逆过程。而我们眼下行将导出的耗散力学基本方程，可以避免Boltzmann方程和补充Liouville方程的不足之处。

作为耗散力学基本方程的首次应用，本文用散射反演方法[11]求得了非线性耗散型方程的精确解，其中包括了Navier-Stokes方程的精确解。而在文[3～4]中，我们业已利用Bäcklund变换求得了Navier-Stokes方程的精确解。本文和文[3～4]证明了这两种方法是可以互相通用的。当然，本文中的Navier-Stokes方程，用Dirac-Pauli表象的复变函量理论和其它数学方法，已经在文[2～3]中进行了变换处理。

于是，象所有弹性力学问题都能归结为Schrödinger方程或Dirac方程的求解[28~33]一样，所有粘滞流体动力学问题和所有非平衡态热力学问题都能归结为耗散力学基本方程的求解。Schrödinger方程、Dirac方程和耗散力学诸方程的解是组成五花八门的连续介质力学和热力学系统的基本物质单元和原始"结构"。

值得注意的是，非线性耗散型方程的精确解有一部分是耗散型孤子解（soliton solution）。这些孤子解可能就对应着I. Prigogine的"耗散结构"[12~14]。这样的结果或许是会使人感到惊奇的。

本文中凡重复指标按Einstein约定求和。

## 二、耗散力学的基本纲领

### （一） Rayleigh(J. W. Strutt, 1873)耗散函数

前面已经说过，耗散力学基本方程不可能从Schrödinger方程经引入所谓"复能量"而导出。但是回忆一下E. Schrödinger的工作[15~18]还是有益的。Schrödinger方程的导出建立在两个著名的公式基础之上：其一是自由粒子的能量和动量的关系式；其二是粒子和波之间的de Broglie关系。在我们导出耗散力学基本方程之前，我们也有一个与自由粒子能量和动量关系式相比拟的关系式，即单个粒子的Rayleigh耗散函数[6,34~36]。

单个粒子的Rayleigh耗散函数$F$的定义为

$$F=-\frac{1}{2}\alpha_{ik}v_iv_k \qquad (i,k=1,2,3) \tag{2.1}$$

这里的求和不仅是对坐标的，而且同时也是对各热力学"力"的。当$\alpha_{ik}$关于下标$i$和$k$对称时，摩擦力$X_k$为

$$X_k=\frac{\partial F}{\partial v_k}=-\alpha_{ik}v_i \tag{2.2}$$

即摩擦力与粒子的速度成正比。这个结果与粘滞流体中圆球绕流阻力的Stokes解[37]

$$X=-6\pi\nu Rv \tag{2.3}$$

是一致的。因为

$$\frac{dW}{dt}=X_kv_k=-\alpha_{ik}v_iv_k=2F \tag{2.4}$$

所以$2F$为摩擦引起的能量耗散率，即耗散函数$F$等于总机械能瞬时耗散率的一半。

由于耗散函数与描述系统位形所采用的坐标无关，因此$F$的数值对于坐标变换是不变的。正是由于$F$的这一特性，使得我们可以利用耗散函数来发展我们的耗散力学理论。

设粒子所处的流场是各向同性的，则摩擦系数张量（二阶张量）$\alpha_{ik}$ 应为

$$\alpha_{ik}=\alpha\delta_{ik} \tag{2.5}$$

因此

$$F=-\frac{1}{2}\alpha v^2 \tag{2.6}$$

为了利用量子力学中的结果，我们可以将耗散函数写成动量 $p_k$ ($k=1,2,3$) 的形式。首先，我们引入准定态的寿命$\tau$（关于准定态的概念，见文[15]）

$$\tau=m/\alpha \tag{2.7}$$

从而

$$F=-\frac{1}{\tau}\left(\frac{p^2}{2m}\right) \tag{2.8}$$

如果粒子的Hamilton量$H$是

$$H=\frac{1}{2m}p^2 \tag{2.9}$$

则

$$F=-\frac{1}{\tau}H \tag{2.10}$$

在特殊相对论条件下，(2.9)式成为

$$H^2=p^2c^2+m^2c^4 \tag{2.11}$$

此时Rayleigh耗散函数$F$满足关系式

$$(-\tau F)^2=H^2 \tag{2.12}$$

如果在(2.10)式和(2.12)式中存在电磁场$A_0$和$A_k$ ($k=1,2,3$)，使粒子动量增加（或减少），则按经典规则正则动量应为

$$p_k=mv_k+\frac{e}{c}A_k \qquad (k=1,2,3) \tag{2.13a}$$

$$-\tau F\to-\tau F-\frac{e}{c}A_0 \tag{2.13b}$$

正则动量的引入是符合线性热力学的Onsager定律[5~6]的。

值得一提的是，根据(2.2)式、(2.3)式和(2.5)式，计及(2.7)式，我们有

$$\frac{1}{\tau}\propto\nu\left(\frac{R}{m}\right) \tag{2.14}$$

选取适当的单位，由于$R$和$m$是常数，我们令

$$\frac{1}{\tau}=\nu \tag{2.15}$$

于是(2.8)式、(2.10)式和(2.12)式成为

$$F=-\nu\left(\frac{p^2}{2m}\right) \tag{2.16}$$

$$F=-\nu H \tag{2.17}$$

及

$$\left(-\frac{1}{\nu}F\right)^2=H^2 \tag{2.18}$$

这些正是我们所需要的关系式。

### （二） 非相对论性耗散力学的基本方程

有耗散能够衰变的系统，严格讲来并不存在分立能谱。衰变时从中逸出的粒子走向无穷

远处。从这一点看来，该系统的运动是无限运动，因而能谱是连续的。但是，有可能存在衰变几率非常小的亚稳态系统。这时，我们可以引进准定态的概念[15]，该态中的粒子长时期地在这个“系统之内”运动，经过相当长的一段时间间隔$\tau$以后才逸出。$\tau$可以称为所考虑准定态的寿命。这些态的能谱是准分立的，它由一串有宽度的能级所组成。宽度$F$和寿命$\tau$的关系根据(2.10)式为$F=\hbar/\tau$。准分立能级的宽度小于能级之间的间距。

这样，耗散能量宽度$F$可以与耗散频率宽度$\Omega$之间建立起一种关系，加上原有的 de Broglie 关系[15~18]，我们有

$$F=\hbar\Omega,\ p_k=\hbar k_k \qquad (k=1,2,3) \tag{2.19}$$

从而，我们可以设满足非相对论耗散力学基本方程的解为

$$\psi=A\exp\left[\frac{1}{\hbar}(ip_kx_k-Ft)\right] \tag{2.20}$$

将(2.20)式对时间$t$求偏微商，有

$$\partial_t\psi=-\frac{F}{\hbar}\psi \tag{2.21}$$

同时，将(2.20)式对坐标求两次偏微商，有

$$\nabla^2\psi=-\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \tag{2.22}$$

联立(2.21)式和(2.22)式，并计及(2.16)式，有

$$-\hbar\partial_t\psi=-\nu\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\right) \tag{2.23}$$

由(2.21)式和(2.22)式可以发现，Rayleigh 耗散函数$F$和动量$p_k$各与下列作用在函数(2.20)式上的算符相当：

$$F\to-\hbar\partial_t,\ p_k\to-i\hbar\partial_k \qquad (k=1,2,3) \tag{2.24}$$

这时，(2.23)式可以写成

$$\hat{F}\psi=-\nu\hat{H}\psi \tag{2.25}$$

式中凡带“∧”的字母表示相当的力学量的算符。在一般情况下，Hamilton量是

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(x_k,t) \tag{2.26}$$

如果不存在外场$U(x_k,t)$，则(2.25)式退化成经典的Fourier方程(2.23)式。

可以看出，若算符$-(1/\nu)\hat{F}$代以算符$\hat{E}=i\hbar\partial_t$，则(2.25)式可以成为Schrödinger方程。在Schrödinger方程中$\hat{E}=i\hbar\partial_t$对时间$t$是可逆的（方程化为其共轭方程），而在非相对论耗散力学基本方程中$\hat{F}=-\hbar\partial_t$则对时间$t$是不可逆的。

显然，耗散力学的定常问题与量子力学的定常问题是完全一样的问题。因此，有关量子力学的定常问题的研究成果和实验验证，也同时是有关耗散力学定常问题的研究成果和实验验证。

另外，我们还可以看出，非相对论性耗散力学基本方程（其特例为 Fourier 方程）是与Schrödinger方程相对应的。Fourier方程并不与d'Alembert波动方程相对应。

非相对论性耗散力学基本方程的“反方程”可以对照(2.24)式而直接得到。我们设“反耗散函数”为$\overline{F}$：

$$\overline{F}=-F \tag{2.27}$$

则根据(2.24)式，有

$$\hat{\hat{F}}=\hbar\partial_t,\quad \hat{p}_k=-i\hbar\partial_k \tag{2.28}$$

从而(2.25)式的反方程是

$$\hat{\hat{F}}\bar{\psi}=-\nu\hat{H}\psi \tag{2.29}$$

反方程描述了“开系”周围空间的能量得失。

**（三）相对论性耗散力学的基本方程**

由上述分析我们知道，在量子力学中的能量算符$\hat{E}=i\hbar\partial_t$，而在耗散力学中 Rayleigh 能量耗散率算符 $\hat{F}=-\hbar\partial_t$，从而对照 Schrödinger 方程和(2.25)式可知，将量子力学中的时间 $t$ 作如下变换

$$t\to i\nu t \tag{2.30}$$

就可将量子力学中的所有方程变换成耗散力学中的有关方程。

对照量子力学中的 Klein-Gordon 方程[18~20]，并利用变换 (2.30) 式，或直接由(2.18)式，可以得到方程

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t-\nu^2\nabla^2+\nu^2\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0 \tag{2.31}$$

方程(2.31)式是与量子力学中的Klein-Gordon方程相对应的方程。Klein-Gordon方程的特殊情况($m=0$)是 d'Alembert 波动方程，而方程(2.31)式的特殊情况($m=0$)则是四维调和方程

$$\left(-\frac{1}{c^2\nu^2}\partial_t\partial_t+\nabla^2\right)\psi=0 \tag{2.32}$$

这样，我们就可以得到一条结论和一种解释。

一条结论是：与经典数理方程中的d'Alembert波动方程相对应的方程，不是 Fourier 扩散（热传导）方程而是四维调和方程；而与 Fourier 扩散方程相对应的方程，则是无外场作用的Schrödinger方程。

一种解释是：三维空间流场中的扩散或耗散，实际上是四维时空中的调和。

但是，如果不考虑外场作用的话，方程(2.31)式在我们所讨论的耗散和不可逆问题中并没有太大的用处。因为很容易发现，方程(2.31)式不具有不可逆性。

在耗散和不可逆问题中有用处的，是与量子力学中的Dirac方程[18~20]相对应的方程。对照量子力学的 Dirac 方程，并利用变换(2.30)式，我们得到

$$(i\gamma_\alpha p^\alpha+mc)\psi=0\qquad(\alpha=1,2,3,4) \tag{2.33}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&p^4=p_4=-ip^0=ip_0\\&p^0=-p_0,\quad p^k=p_k\qquad(k=1,2,3)\\&p_\alpha=-i\hbar\partial_\alpha\qquad(\alpha=0,1,2,3)\\&\partial_0=-\frac{i}{\nu c}\partial_t\end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

将(2.33)式展开，可写成

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\partial_t\psi_1-\nu\left(i\partial_1\psi_4+\partial_2\psi_4+i\partial_3\psi_3-\frac{mc}{\hbar}\psi_1\right)=0\\
&\frac{1}{c}\partial_t\psi_2-\nu\left(i\partial_1\psi_3-\partial_2\psi_3-i\partial_3\psi_4-\frac{mc}{\hbar}\psi_2\right)=0\\
&\frac{1}{c}\partial_t\psi_3-\nu\left(i\partial_1\psi_2+\partial_2\psi_2+i\partial_3\psi_1+\frac{mc}{\hbar}\psi_3\right)=0\\
&\frac{1}{c}\partial_t\psi_4-\nu\left(i\partial_1\psi_1-\partial_2\psi_1-i\partial_3\psi_2+\frac{mc}{\hbar}\psi_4\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.35}$$

方程组(2.33)式或(2.35)式是具有不可逆性特点的一组方程。它正是我们所需要的。当然，方程组(2.33)式中的动量$p_k$ ($k=1,2,3$)同样能按经典规则改写成正则动量(2.13)式，而且同时满足线性热力学的 Onsager 定律。

### (四) 耗散力学中的守恒定律

耗散力学中总的机械能是不守恒的，但包括耗散于开系之外的热能在内的总能量是守恒的。这种物理现象的数学描述就应当既包括耗散力学的基本方程，又包括这些方程的“反方程”。

设波振幅的绝对值的平方称为波强$w(x_k,t)$，则

$$w(x_k,t)=|A|^2=\bar{\psi}(x_k,t)\psi(x_k,t)\tag{2.36}$$

其中

$$\psi=A\exp\left[\frac{1}{\hbar}(ip_kx_k-Ft)\right]\tag{2.37}$$

而

$$\bar{\psi}=A\exp\left[\frac{1}{\hbar}(-ip_kx_k+Ft)\right]\tag{2.38}$$

由(2.37)式和(2.38)式可知$\psi$和$\bar{\psi}$分别满足方程

$$-\hbar\partial_t\psi=-\nu\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(x_k)\right)\psi\tag{2.39}$$

$$\hbar\partial_t\bar{\psi}=-\nu\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(x_k)\right)\bar{\psi}\tag{2.40}$$

波强随时间的变化率是

$$\partial_tw=\bar{\psi}(\partial_t\psi)+(\partial_t\bar{\psi})\psi\tag{2.41}$$

将(2.39)式和(2.40)式代入(2.41)式，可得

$$\partial_tw=-\nu\frac{\hbar}{2m}(\bar{\psi}\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\bar{\psi})=-\nu\frac{\hbar}{2m}\nabla\cdot(\bar{\psi}\nabla\psi-\psi\nabla\bar{\psi})\tag{2.42}$$

令

$$\mathbf{J}=\nu\frac{\hbar}{2m}(\bar{\psi}\nabla\psi-\psi\nabla\bar{\psi})\tag{2.43}$$

则有守恒定律

$$\partial_tw+\nabla\cdot\mathbf{J}=0\tag{2.44}$$

如果(2.37)式和(2.38)式分别满足相对论性耗散力学基本方程(2.33)式及其“反方程”：

$$\left(\frac{\hbar}{\nu}\partial_t-i\hbar c\gamma_k\partial_k-\beta mc^2\right)\psi=0\tag{2.45}$$

$$\left(-\frac{\hbar}{\nu}\partial_t+i\hbar c\gamma_k\partial_k-\beta mc^2\right)\bar{\psi}=0 \tag{2.46}$$

则(2.41)式化为

$$\partial_t w=ivc\partial_k(\bar{\psi}\gamma_k\psi) \tag{2.47}$$

令
$$J=-ivc(\bar{\psi}\gamma_k\psi) \tag{2.48}$$

则又有(2.44)式。

由于 $w$ 永远不会为负，故可将它解释为位置的几率密度（当然，也可不解释为几率密度)。要注意，此时的 $\psi$ 必须是归一化的，即

$$\int_\infty \bar{\psi}\psi dV=1 \tag{2.49}$$

### （五）耗散力学中的熵增率

建立耗散力学理论的一个首要目的是计算粒子在耗散和不可逆过程中的熵增率。熵增率的基本特征是由它能辨别不可逆过程。我们将熵增率表为$k\sigma$，其中$\sigma$是无量纲熵增率。

在线性非平衡态热力学中，“力”用 $X_k$来表示，“流”用 $J_k$来表示，唯象系数用 $L_{ik}$ 来表示。唯象系数 $L_{ik}$ 满足 Onsager 定律

$$L_{ik}=L_{ki} \tag{2.50}$$

由线性热力学，有

$$\sigma=-\frac{1}{kT}J_kX_k \tag{2.51}$$

而
$$J_k=-\frac{1}{T}L_{ki}X_i \tag{2.52}$$

从而有
$$\sigma=\frac{1}{kT^2}L_{ik}X_iX_k \tag{2.53}$$

作为例子，我们来计算无其他外场作用的粒子在粘滞力作用下的熵增率$\sigma$。由(2.2)式可知

$$\hat{X}_k=\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{v}_k}=-\nu\hat{p}_k \tag{2.54}$$

将(2.24)式连同$p_k=\langle\bar{\psi}|\hat{p}_k|\psi\rangle$代入(2.54)式(其中$|\ \ \rangle$为Dirac右矢(ket)，$\langle\ \ |$为 Dirac左矢(bra))，有

$$X_k=-\nu\langle\bar{\psi}|\hat{p}_k|\psi\rangle \tag{2.55}$$

将(2.55)式代入(2.53)式，得

$$\sigma=-\frac{L_{ik}}{k}\left(\frac{\nu}{T}\right)^2\langle\bar{\psi}|\hat{p}_i\hat{p}_k|\psi\rangle \tag{2.56}$$

利用对非平衡态和平衡态二者均适用的热力学公式

$$F=-\sigma kT=J_kK_k \tag{2.57}$$

并在各向同性条件下计及(2.6)式，可得“力” $X_k$，“流”$J_k$及唯象系数$L_{ik}$分别等于

$$X_k=-\nu mv_k,\quad J_k=\frac{1}{2}v_k,\quad L_{ik}=\frac{T}{2\nu m}\delta_{ik} \tag{2.58}$$

将(2.58)式代入(2.56)式，即得这种情况下的熵增率为

$$\sigma=-\frac{\nu}{kT}\langle\bar{\psi}|\hat{H}|\psi\rangle \tag{2.59}$$

这个结果，与在非平衡态热力学中所得的结果是一致的。(2.59)式表明，无其他外场作用的粒子在粘滞力作用下，其熵是变化的；而当粘滞系数$\nu=0$时，熵增$\sigma=0$。

如果存在外场的作用，则“力”$X_k$和唯象系数$L_{ik}$的表达式将不同于(2.58)式。由(2.58)式可以看出，唯象系数张量与耗散系数（摩擦系数）张量有关，并且是温度的函数。例如在纯粹热传导问题中，$X_k=1/T$，$L_{ik}=\lambda T^2\delta_{ik}$（$\lambda$为热传导率），而与(2.58)式不同。

## 三、非线性耗散型方程的精确解

在这一节中，我们将选用$c=\hbar=1$的自然单位制，并设单位质量$m=1$。

现在，我们的论题必须回到粘滞流体动力学和非平衡态热力学中来，回到我们所讨论的非线性耗散型方程中来。

从热力学的观点来看，所有可逆运动的基本方程都可以归结为Schrödinger方程的求解，或由Schrödinger方程的可积条件推演出来[11,23~24]，而所有不可逆运动的基本方程则应当归结为耗散力学基本方程的求解，或由耗散力学基本方程的可积条件推演出来。例如，一般弹塑性力学问题和理想流体运动，都与Schrödinger方程相联系[28~33,38]，而粘滞流体运动和热传导及分子扩散，则与耗散力学基本方程相联系。

业已发展起来的非线性波动理论，主要研究的是色散（或弥散）型方程。关于耗散型方程，只提到一个Burgers方程及其推广。当然，Burgers方程是重要的方程。文[2～4]已经证明了Navier-Stokes方程经由Dirac-Pauli表象的复变函数理论所进行的变换后，就与Burgers方程相联系。但是，仅仅一个Burgers方程及其推广，在研究非线性耗散型方程时是不够的。

我们现在已经建立了耗散力学基本理论。我们要用这个理论来研究耗散型方程。

在非线性波动理论中有一个叫AKNS方程[21,22]的普遍性方程。现在，在我们的非线性耗散理论中也应该有一个类似的方程。我们利用变换式(2.30)，将AKNS方程变换成普遍的耗散型方程：

时间发展方程

$$\partial_t\psi=\nu\hat{H}\psi \tag{3.1}$$

本征值方程

$$\hat{L}\psi=\zeta\psi \tag{3.2}$$

其中$\hat{L}$是$2\times2$矩阵

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} i\partial_x & -iq \\ ir & -i\partial_x \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

矩阵$\hat{H}$是

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} A(x,t,\zeta) & B(x,t,\zeta) \\ C(x,t,\zeta) & -A(x,t,\zeta) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$\psi$是Hilbert空间的二维矢量

$$\psi=(\psi_1,\ \psi_2)^T \tag{3.5}$$

由于方程(3.1)式和(3.2)式是关于两分量$\psi$的方程，因此它们实际上是相对论耗散力学基本方程(2.33)式的翻版。

从方程(3.1)式和(3.2)式的可积性条件可得

$$\left.\begin{aligned}
&A_{,x}=qC-rB\\
&B_{,x}+2i\zeta B=\frac{1}{\nu}q_{,t}-2qA\\
&C_{,x}-2i\zeta C=\frac{1}{\nu}r_{,t}+2rA
\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

如果假定$A$，$B$，$C$由参数$\zeta$与$\zeta^{-1}$的多项式给出，并代入(3.6)式，令多项式的各项相等，则可求得对于$q(x,t)$和$r(x,t)$的非线性发展方程。就是说，象这样的非线性发展方程可由相对论耗散力学基本方程的散射反演方法求解。

首先，设$A$为$\zeta$的三次式

$$A=4\zeta^3+2qr\zeta+irq_{,x}-iqr_{,x}\tag{3.7a}$$

则有

$$B=4iq\zeta^2-2q_{,x}\zeta+i(2q^2r-q_{,xx})\tag{3.7b}$$

$$C=4ir\zeta^2+2r_{,x}\zeta+i(2qr^2-r_{,xx})\tag{3.7c}$$

及可积性条件

$$iq_{,t}+6\nu rqq_{,x}-\nu q_{,xxx}=0\tag{3.8a}$$

$$ir_{,t}+6\nu rqr_{,x}-\nu r_{,xxx}=0\tag{3.8b}$$

其次，设$A$为$\zeta$的二次式

$$A=2\zeta^2+qr\tag{3.9a}$$

则有

$$B=2iq\zeta-q_{,x}\tag{3.9b}$$

$$C=2ir\zeta+r_{,x}\tag{3.9c}$$

及可积性条件

$$q_{,t}+\nu q_{,xx}-2\nu q^2r=0\tag{3.10a}$$

$$r_{,t}-\nu r_{,xx}+2\nu qr^2=0\tag{3.10b}$$

另外，设$A$为$\zeta^{-1}$次幂

$$A=-\cos\phi/4\zeta\tag{3.11a}$$

则有

$$B=-\frac{i}{2\zeta}q_{,t}\tag{3.11b}$$

$$C=-\frac{i}{2\zeta}r_{,t}\tag{3.11c}$$

及可积性条件

$$\nu(\cos\phi)_{,x}=-2i(qr)_{,t}\tag{3.12a}$$

$$-iq_{,xt}=\nu q\cos\phi\tag{3.12b}$$

$$-ir_{,xt}=\nu r\cos\phi\tag{3.12c}$$

从而，我们可以由(3.8)式、(3.10)式和(3.12)式得到类似于KdV方程，Schrödinger方程，非线性Schrödinger方程和sine-Gordon方程的耗散型方程。换言之，这些线性和非线

性的耗散型方程，现在成了相对论耗散力学基本方程(3.1)式和(3.2)式的可积性条件。

特别是，在(3.10b)式中，若令

$$q=\frac{1}{\sqrt{\nu}}v,\quad r=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\partial_x \tag{3.13}$$

或

$$r=\frac{1}{\sqrt{\nu}}v,\quad q=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\partial_x \tag{3.14}$$

则可将(3.10b)式化为标准的Burgers方程

$$v_{,t}+2vv_{,x}-\nu v_{,xx}=0 \tag{3.15}$$

由于Burgers方程与Navier-Stokes方程的联系[2~4]，使Navier-Stokes方程也成了相对论性耗散力学基本方程(3.1)式和(3.2)式的可积性条件。这样，我们第一次有可能用散射反演方法来求解Navier-Stokes方程了。

值得注意的是，(3.8)式、(3.10)式和(3.12)式中类似于KdV方程、非线性Schrödinger方程和sine-Gordon方程的非线性耗散方程，其精确解是耗散型"孤子解"（只要将非线性波动中的孤子解作(2.30)式的变换，就可得到非线性耗散中的精确解），这些耗散型孤子解很可能就对应着I. Prigogine所说的"耗散结构"。所谓"耗散结构"，就是在远离平衡的条件下形成和维持的有序结构和组织；它具有特殊的非线性的运动规律和相干性，并暗含着只能耗散能量才能保持其结构[12,39~41]。现在我们看到的这些非线性耗散型方程的精确耗散型孤子解，就具有上面所说的某些特征，这不能不说是一件令人感到惊奇的事。

## 四、结论和讨论

（一）耗散力学是作为量子力学的互补概念而被提出来的。不仅动力学中的动量和位置，能量和时间，不仅热力学中的"力"和"流"，熵和温度，不仅量子力学中的粒子和波是互补的，不仅动力学和热学力学是互补的，现在我们又看到，既使是量子力学，也有一门与之互补的学科。

（二）耗散力学基本方程是作为与Schrödinger方程和Dirac方程相对应的方程而被引入的。数理方程中的Fourier方程与Schrödinger方程相对应，而四维调和方程才与数理方程中的d'Alembert波动方程相对应。三维空间流场中的扩散或耗散，实际上是四维时空中的调和。此外，非线性耗散与非线性波动相对应。

（三）散耗力学可以被用来统一地处理包括热传导、分子扩散等矢量过程和粘滞流动等张量过程在内的流体热力学或非平衡态热力学问题，也可以被用来统一地处理包括粘性流动和湍流等问题在内的粘滞流体动力学问题，甚至可以推而广之，用它来统一地处理统计热力学中的问题。

（四）可以用耗散力学基本方程来处理量子的非弹性散射和衰变以及类似的耗散和不可逆问题。

（五）非线性耗散型方程可以化为线性耗散力学基本方程的可积性条件，从而可以利用散射反演方法将它们的精确解求出来。散射反演方法与Bäcklund变换是相通的。作为非线性耗散型方程的典型的Navier-Stokes方程，我们既可以用Bäcklund变换求得它的精确解，又可以利用散射反演方法求得它的精确解。

（六）非线性耗散型方程的耗散型孤子解，可能对应着“耗散结构”。耗散结构是与生命相联系的。E. Schrödinger 曾经在《生命是什么？》[42]一书中指出，生命的进化可用负熵来表示。但是在量子力学的 Schrödinger 方程中，并不能体现熵的变化。能体现熵的变化的方程是耗散力学基本方程和它们的“反方程”。因此，耗散力学理论可用作研究生命的进化。

谨以此文纪念粘滞流体力学建立 140 周年，量子力学建立60周年，“耗散结构理论”建立16周年。

## 参 考 文 献


[1] 沈惠川，均匀不可压缩螺流动力学的通解，自然杂志，7，10 (1984)，799；7，12 (1984)，940.

[2] 沈惠川，Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(I)，应用数学和力学，7，4 (1986)，365—382.

[3] 沈惠川，Navier-Stokes 方程的精确解——Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(II)，应用数学和力学，7，6 (1986)，517—522.

[4] 沈惠川，磁流体力学方程组的解——Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(IV)，应用数学和力学，7，9 (1986)，801—811.

[5] de Groot，S. R. and P. Mazur，*Non-Equilibrium Thermodynamics*，North-Holland (1962). 中译本，《非平衡态热力学》，陆全康译，上海科学技术出版社 (1981).

[6] Yao，Y. L. (姚玉林)，*Irreversible Thermodynamics*，Science，Beijing (1980). 中译本，《不可逆过程热力学》，鲜于玉珮、张经坤译，科学出版社 (1981).

[7] Prigogine，I.，*Non-Equilibrium Statistical Mechanics*，Interscience (1962). 中译本，《非平衡态统计力学》，陆全康译，上海科学技术出版社 (1984).

[8] Зубарев Д. Н.，*Неравновесная Статистическая Термодинамика*，Издательство 〈Наука〉 Главная Редакция，Физико-Математической Литературы，Москва (1971). 中译本，《非平衡统计热力学》，李沅柏、郑哲洙译，高等教育出版社 (1982).

[9] Петровский И. Г.，*Лекции об Уравнениях с Частными Производными*，Физматгиз，Москва (1961). 中译本，《偏微分方程讲义》，段虞荣译，人民教育出版社 (1965).

[10] Courant，R. and D. Hilbert，*Methoden der Mathematischen Physik*，(2 Vols.)2nd ed.，Julius Springer (1931—37). 中译本，《数学物理方法》，钱敏、郭敦仁译，科学出版社 (1958—77).

[11] Taniuti，T. and K. Nishihara (谷内俊弥、西原功修)，*Nonlinear Waves*，Pitman (1983). 中译本，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社 (1981).

[12] Prigogine，I.，时间、不可逆性和结构，译自 *The Physicist's Conception of Nature*，中译文载《普利高津与耗散结构理论》，湛垦华、沈小峰编，陕西科学技术出版社 (1982).

[13] Prigogine，I.，时间、结构与涨落，译自 *Science*，**201**，4358，pp.777—785，中译文载《普利高津与耗散结构理论》，湛垦华、沈小峰编，陕西科学技术出版社 (1982).

[14] Prigogine，I.，我的科学生活，载《普利高津与耗散结构理论》，湛垦华、沈小峰编，陕西科学技术出版社 (1982).

[15] Landau，L. D. and E. M. Lifshitz (Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц)，*Quantum Mechanics*，Tran. from Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell，Pergamon (1977). 中译本，《量子力学》，严肃译，高等教育出版社 (1981).

[16] 湯川秀樹 (Yukawa，H.)，豐田利幸 (Toyoda，R.)，《現代物理学の基礎》，第二版，Vol.3，4，《量子力学》，岩波書店 (1978)。

[17] 朝永振一郎(Tomonaga, S.), 《量子力学》(Ⅰ, Ⅱ)みすず書房 (1978).
[18] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, (3rd ed.), McGraw-Hill (1968). 中译本, 《量子力学》, 方励之校, 人民教育出版社 (1982).
[19] Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford (1958). 中译本, 《量子力学原理》, 陈咸亨译, 科学出版社 (1965).
[20] Dirac, P. A. M., *Directions in Physics*, John Wiley (1978). 中译本, 《物理学的方向》, 张宜宗、郭应焕译, 科学出版社 (1983).
[21] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lettes*, **30** (1973), 1262—1264.
[22] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lettes*, **31** (1973), 125—127.
[23] Eckhaus, W. and A. Van Harten, *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, North-Holland (1981). 中译本, 《逆散射变换和孤立子理论》, 黄迅成译, 陈以鸿校, 上海科学技术文献出版社 (1984).
[24] Захаров В. Е., С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, *Теория Солитонов, Метод Обратной Задачи*, Физико-Математической Литературы (1980). 中译本, 《孤子理论》, 彭启才译, 科学出版社 (1985).
[25] Böhm, D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York (1954). 中译本, 《量子理论》, 侯德彭译, 商务印书馆 (1982).
[26] Flügge, S., *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Varlag (1974). 中译本, 《实用量子力学》, 宋孝同等译, 人民教育出版社 (1981—1983).
[27] Bjorken, J. D. and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*; *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1964). 中译本, 《相对论量子力学》, 纪哲锐等译; 《相对论量子场》, 汪克林等译, 科学出版社 (1984).
[28] 沈惠川, 弹性动力学的通解, 应用数学和力学, **6**, 9 (1985), 791—796.
[29] 沈惠川, 单色弹性波谱的分裂, 应用数学和力学, **5**, 4 (1984), 541—551.
[30] 沈惠川, 弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲, 应用数学和力学, **5**, 6 (1984), 817—827.
[31] 沈惠川, 弹性大挠度问题 von Kármán 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系, 应用数学和力学, **6**, 8 (1985), 711—723.
[32] 沈惠川, 薄壳理论中的 Schrödinger方程, 应用数学和力学, **6**, 10 (1985), 887—900.
[33] 沈惠川, 理想塑性力学问题的通解, 自然杂志, **8**, 11 (1985), 846—848.
[34] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1953). 中译本, 《经典力学》, 汤家镛、陈为恂译, 科学出版社 (1981).
[35] Greenwood, D. T., *Classical Dynamics*, Prentice-Hall (1977). 中译本, 《经典动力学》, 孙国锟译, 科学出版社 (1982).
[36] Невзглядов В. Г., *Теоретическая Механика*, Физматгиз (1959). 中译本, 《理论力学》, 黄念宁, 钟奉俄译, 人民教育出版社 (1965).
[37] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon (1975). 中译本, 《流体力学》, 孔祥言、徐燕侯、庄礼贤译, 高等教育出版社 (1983—1984).
[38] 沈惠川, 三维非定常等熵流中的 Chaplygin 方程——Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅱ), 应用数学和力学, **7**, 8 (1986), 703—712.
[39] Prigogine, I., 结构、耗散和生命, 译自*Theoretical Physics and Biology*, 载《普利高津与耗散结构理论》, 湛垦华、沈小峰编, 陕西科学技术出版社 (1982).

[40] Prigogine, I., et al., 复杂性的进化和自然界的定律，译自 *Studies on the Conceptual Foundations*, Vol.1 (1977). 载《普利高律与耗散结构理论》，湛垦华、沈小峰编，陕西科学技术出版社(1982).

[41] Prigogine, I., 时间之探索，译自 *Discorery* (1980)，载《普利高津与耗散结构理论》，湛垦华、沈小峰编，陕西科学技术出版社 (1982).

[42] Schrödinger, E., *What Is Life?* Cambridge Univ.(1967). 中译本，《生命是什么?》，上海人民出版社 (1973).

# Dissipation Mechanics and Exact Solutions for Nonlinear Equations of Dissipative Type——Principle and Application of Dissipation Mechanics(Ⅰ)

Shen Hui-chuan

*(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei)*

**Abstract**

This work is the continuation and the distillation of the discussion of Refs.[1～4].

(A) From complementarity principle we build up dissipation mechanics in this paper. It is a dissipative theory of correspondence with the quantum mechanics. From this theory we can unitedly handle problems of macroscopic non-equilibrium thermo-dynamics and viscous hydrodynamics, and handle each dissipative and irreversible problems in the quantum mechanics. We prove the basic equations of the dissipation mechanics to eigenvalues equations of correspondence with the Schrödinger equation or Dirac equation in this paper.

(B) We unitedly merge the basic nonlinear equations of dissipative type, especially the Navier-Stokes equation as a basic equation for macroscopic non-equilibrium thermodynamics and viscous hydrodynamics, into integrability condition of basic equation of dissipation mechanics And we can obtain their exact solutions by the inverse scattering method in this paper.