具有四个非线性项的变系数二阶系统零解的稳定性*

钟 洪 发

（辽宁师范大学数学系，1985年4月8日收到）

摘 要

本文讨论了下列二阶变系数非线性系统的稳定性：

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)y \\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)y \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)x+a_2(t)f_1(y) \\ \dot{y}=a_3(t)x-a_4(t)f_2(y) \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)y \\ \dot{y}=a_3(t)x-a_4(t)f_2(y) \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)x+a_2(t)f_1(y) \\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)y \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)f_3(y),\ f_1(0)=0,\ f_3(0)=0 \\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)f_4(y),\ f_2(0)=0,\ f_4(0)=0 \end{cases}$$

本文推广了文[1]和[2]的工作．

对于如下的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x)+by \\ \dot{y}=cx+dy \\ f(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}=ax+f(y) \\ \dot{y}=cx+dy \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=f_1(x)+by \\ \dot{y}=f_2(x)+dy,\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0 \end{cases}$$

在文[1]和[2]中，根据它们所对应的线性系统的李雅普诺夫函教，讨论了它们的稳定性。本文将上述二阶线性系统推广到变系数的情形，并用不同于文[1]和[2]的方法，讨论了它们的稳定性和不稳定性。

对非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)f_3(y) \\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)f_4(y) \\ f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)=f_4(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

假定 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(y)$，$f_4(y)$ 连 续 可 微，且 $|f_3(y)|\leqslant|f_4(y)|$，　$|f_2(x)|\leqslant|f_1(x)|$，

* 钱伟长推荐．

$x\cdot f_1(x)>0\ (x\neq 0)$，$y\cdot f_4(y)>0\ (y\neq 0)$，对一切 $t\geqslant t_0$ 有 $a_1(t)\geqslant \alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant \alpha_4>0$，$|a_2(t)|\leqslant \alpha$，$|a_4(t)|\leqslant \alpha$。

取(1)的含两个子系统的系统

$$\dot{x}=-a_1(t)f_1(x),\ \dot{y}=-a_4(t)f_4(y) \tag{2}$$

取 $$V_1(x)=2\int_0^x f_1(x)dx,\qquad V_2(y)=2\int_0^y f_4(y)dy$$

易证(2)的零解渐近稳定。

取 $$V=V_1(x)+V_2(y)=2\int_0^x f_1(x)dx+2\int_0^y f_4(y)dy$$

作为系统(1)的李雅普诺夫函数，则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}&=2f_1(x)(-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)f_3(y))+2f_4(y)(a_3(t)f_2(x)-a_4(t)f_4(y))\\&\leqslant-2(\alpha_1f_1^2(x)+\alpha_4f_4^2(y))+2\alpha|f_1(x)||f_4(y)|+2\alpha|f_1(x)||f_4(y)|\\&=-2(\alpha_1f_1^2(x)+\alpha_4f_4^2(y))+\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_4}}\cdot2\sqrt{\alpha_1}\cdot\sqrt{\alpha_4}|f_1(x)||f_4(y)|\\&\leqslant-2(\alpha_1f_1^2(x)+\alpha_4f_4^2(y))+\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha_1}\cdot\sqrt{\alpha_4}}(\alpha_1f_1^2(x)+\alpha_4f_4^2(y))\\&=\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha_1}\cdot\sqrt{\alpha_4}}-2\right)(\alpha_1f_1^2(x)+\alpha_4f_4^2(y))\end{aligned}$$

当 $2\alpha/\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_4}-2<0$，即 $\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$ 时，(1)的零解渐近稳定。由此我们得到：

定理 1 对系统(1)，如果

(i) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(y)$，$f_4(y)$ 连续可微，且 $|f_3(y)|\leqslant|f_4(y)|$，$|f_2(x)|\leqslant|f_1(x)|$，$x\cdot f_1(x)>0\ (x\neq0)$，$y\cdot f_4(y)>0\ (y\neq0)$；

(ii) 对一切 $t\geqslant t_0$，有 $a_1(t)\geqslant\alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant\alpha_4>0$，$|a_2(t)|\leqslant\alpha$，$|a_3(t)|\leqslant\alpha$；

(iii) $\int_0^x f_1(x)dx\to+\infty\ (|x|\to\infty)$，$\int_0^y f_4(y)dy\to+\infty\ (|y|\to\infty)$

$\int_0^x f_1(x)dx\to0\ (|x|\to0)$，$\int_0^y f_4(y)dy\to0\ (|y|\to0)$

且 $\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$

则系统(1)的零解全局渐近稳定。

定理 1 的条件中，如果 $\alpha_1\alpha_4-\alpha^2<0$，则系统(1)的零解不稳定。

对于(1)的特殊情形：

$$\begin{cases}\dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)y\\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)y\\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-a_1(t)x+a_2(t)f_1(y)\\ \dot{y}=a_3(t)x-a_4(t)f_2(y)\\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)f_1(x)+a_2(t)y \\ \dot{y}=a_3(t)x-a_4(t)f_2(y) \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=-a_1(t)x+a_2(t)f_1(y) \\ \dot{y}=a_3(t)f_2(x)-a_4(t)y \\ f_1(0)=0,\ f_2(0)=0 \end{cases} \tag{6}$$

与(1)同理，我们容易得到：

定理2 对于系统(3)，如果

(i) $f_1(x)$，$f_2(x)$连续可微，且$|f_1(x)|\geqslant|f_2(x)|$，$x\cdot f_1(x)>0$ $(x\neq0)$；

(ii) 对一切$t\geqslant t_0$，有$|a_2(t)|\leqslant\alpha$，$|a_3(t)|\leqslant\alpha$，$a_1(t)\geqslant\alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant\alpha_4>0$，且$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$；

(iii) $\int_0^x f_1(x)dx\to+\infty$ $(|x|\to\infty)$， $\int_0^x f_1(x)dx\to0$ $(|x|\to0)$

则非线性系统(3)的零解全局渐近稳定。

定理2的条件中，如果$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2<0$，则系统(3)的零解不稳定。

定理3 对系统(4)，如果

(i) $f_1(y)$，$f_2(y)$连续可微，$|f_1(y)|\leqslant|f_2(y)|$，$y\cdot f_2(y)>0$ $(y\neq0)$；

(ii) 对一切$t\geqslant t_0$，有$a_1(t)\geqslant\alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant\alpha_4>0$，$|a_2(t)|\leqslant\alpha$，$|a_3(t)|\leqslant\alpha$，且$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$；

(iii) $\int_0^y f_2(y)dy\to\infty$ $(|y|\to\infty)$， $\int_0^y f_2(y)dy\to0$ $(|y|\to0)$

则非线性系统(4)的零解全局渐近稳定。

定理3的条件中，如果$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2<0$，则系统(4)的零解不稳定。

定理4 对系统(5)，如果

(i) $f_1(x)$，$f_2(y)$连续可微，$|f_2(y)|\geqslant|y|$，$|f_1(x)|\geqslant|x|$，$x\cdot f_1(x)>0$ $(x\neq0)$，$y\cdot f_2(y)>0$ $(y\neq0)$；

(ii) 对一切$t\geqslant t_0$，$a_1(t)\geqslant\alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant\alpha_4>0$，$|a_2(t)|\leqslant\alpha$，$|a_3(t)|\leqslant\alpha$，且$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$；

(iii) $\int_0^x f_1(x)dx\to+\infty$ $(|x|\to\infty)$，$\int_0^y f_2(y)dy\to+\infty$ $(|y|\to\infty)$

$\int_0^x f_1(x)dx\to0$ $(|x|\to0)$， $\int_0^y f_2(y)dy\to0$ $(|y|\to0)$

则系统(5)的零解是全局渐近稳定的。

定理4的条件中，如果$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2<0$，则系统(5)的零解不稳定。

定理5 对系统(6)，如果

(i) $f_1(y)$，$f_2(x)$连续可微，且$|f_1(y)|\leqslant|y|$，$|f_2(x)|\leqslant|x|$；

(ii) 对一切$t\geqslant t_0$，有$a_1(t)\geqslant\alpha_1>0$，$a_4(t)\geqslant\alpha_4>0$，$|a_2(t)|\leqslant\alpha$，$|a_3(t)|\leqslant\alpha$，且$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2>0$；

则系统(6)的零解全局渐近稳定。

在定理5的条件中，如果$\alpha_1\alpha_4-\alpha^2<0$，则系统(6)的零解不稳定。

参 考 文 献

[1] Малкин И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, *ПММ*, 16, В. 3 (1952), 365—368.

[2] Красовскии Н. Н., Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений, *ПММ*, 16, В. 5 (1952), 547—564.

The Stability of Zero Solution of Second Order System of Variable Coefficients with Four Non-Linear Terms

Zhong Hong-fa

(Liaoning Normal University, Dalian)

Abstract

This paper discusses the following non-linear systems of second order coefficients,

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1(t)f_1(x) + a_2(t)y \\ \dot{y} = a_3(t)f_2(x) - a_4(t)y \\ f_1(0)=0, \quad f_2(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -a_1(t)x + a_2(t)f_1(y) \\ \dot{y} = a_3(t)x - a_4(t)f_2(y) \\ f_1(0)=0, \quad f_2(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1(t)f_1(x) + a_2(t)y \\ \dot{y} = a_3(t)x - a_4(t)f_2(y) \\ f_1(0)=0, \quad f_2(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -a_1(t)x + a_2(t)f_1(y) \\ \dot{y} = a_3(t)f_2(x) - a_4(t)y \\ f_1(0)=0, \quad f_2(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1(t)f_1(x) + a_2(t)f_3(y), \quad f_1(0)=0, \quad f_3(0)=0 \\ \dot{y} = a_3(t)f_2(x) - a_4(t)f_4(y), \quad f_2(0)=0, \quad f_4(0)=0 \end{cases}$$

This paper is the generalization of works [1] and [2].