

构造容许位移的转换边界法*

付宝连

(东北重型机械学院, 1985年10月28日收到)

摘 要

本文提出了在复杂边界条件下构造容许位移的转换边界法。所谓转换边界法, 就是首先根据叠加原理将实际系统转换为基本系统及附加边界力和附加边界位移, 然后应用变分原理于基本系统, 最后应用级数转换的办法求得实际系统的容许位移。

本文还给出了边界条件变化的混合能量原理。这边界条件变化的混合能量原理和边界条件变化的势能原理和余能原理都是转换边界法的主要理论基础。

应用转换边界法我们构造了复杂边界条件平面应力问题和弯曲问题矩形板的容许位移。

由于转换边界法构造容许位移是遵循着变分原理和确定的程序进行的, 因而克服了 Rayleigh-Ritz法猜测、拼凑容许位移的困难。

一、引 言

如所周知, 以最小势能原理为基础的 Rayleigh-Ritz 法有一个特点, 那就是当我们要应用该法时必须预先假设容许位移。

对于较简单的边界条件, 由于假设容许位移容易并且它能给计算带来方便, 因此, 这一特点就成为优点。然而, 对于较复杂的边界条件, 由于假设容许位移有时是很困难的, 并且常常是不可能的, 因此, 它在很大程度上限制了 Rayleigh-Ritz 法的应用。在这种情况下, 这一特点就成为缺点了。

为克服 Rayleigh-Ritz 法的这一缺点, 人们提出了很多方法, 例如 Kontrovich 变分法^[3], 广义变分原理方法^[3]; 我们应用功的互等定理^[4]和改进经典的 Castigliano 定理^[5]也可以克服这一缺点。

须知, 对于最小势能原理而言容许位移是必须的。但是, 它并未要求一定用假想的办法给出容许位移。诚然, 对于较简单的边界条件, 直接假设容许位移是方便的和有效的。然而, 当某些问题的边界条件比较复杂时, 我们就不应当再沿用这一方法, 而应另寻出路。为构造容许位移这一出路应以确定的原理和程序为基础。

事实上, 本文正是这样做的。我们根据叠加原理, 边界条件变化的变分原理, Dirichlet 原理和转换级数法提出了构造复杂边界条件容许位移的转换边界法。

由于我们是根据确定的原理和程序去构造容许位移, 而不是依赖于假想和经验去拼凑它

* 钱伟长推荐。

们, 因此, 自始至终变分近似计算都被置于可行性基础之上。

二、边界条件变化的混合能量原理

在本节我们认为, 应力、应变和位移分量都处于真实状态。如果我们给表面 S_2 上的位移分量以无限小的增量 $\delta\bar{u}, \dots$, 由它们所引起的在表面 S_1 上的位移分量的增量和在体域 V 内的应变分量增量分别为 $\delta u, \dots; \delta\epsilon_s, \dots$, 而给定的体积力分量和表面力分量保持不变。据虚功原理, 我们有^[1]

$$\begin{aligned} \iiint_V (\sigma_s \delta\epsilon_s + \dots) dV &= \iiint_V (\bar{X} \delta u + \dots) dV \\ &+ \iint_{S_1} (\bar{X}_s \delta u + \dots) dS + \iint_{S_2} (X_s \delta \bar{u} + \dots) dS \end{aligned} \quad (2.1)$$

如式(2.1)左边以弹性体应变能增量来表示, 我们得^[1]

$$\delta U = \iiint_V (\bar{X} \delta u + \dots) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}_s \delta u + \dots) dS + \iint_{S_2} (X_s \delta \bar{u} + \dots) dS \quad (2.2)$$

如果在 S_1 上的位移分量 u, \dots , 保持不变, 而由 $\delta\bar{u}, \dots$, 引起的表面力分量的增量为 $\delta\bar{X}_s, \dots$, 式(2.2)可以被写成

$$\delta U = \iiint_V (\bar{X} \delta u + \dots) dV - \iint_{S_1} (u \delta \bar{X}_s + \dots) dS + \iint_{S_2} (X_s \delta \bar{u} + \dots) dS \quad (2.3)$$

事实上, 应用功的互等定理, 我们能够从式(2.2)导出式(2.3)。

我们假设, 第一状态为: 在 V 域内有 $\bar{X}, \dots; u + \delta u, \dots$ 、在 S_1 上—— $\bar{X}_s, \dots; u + \delta u, \dots$ 、在 S_2 上—— $X_s, \dots; \bar{u} + \delta \bar{u}, \dots$ 。第二状态为: 在 V 域—— $\bar{X}, \dots; u + \delta u, \dots$ 、在 S_1 上—— $\bar{X}_s + \delta \bar{X}_s, \dots; u, \dots$ 、在 S_2 上—— $X_s, \dots; \bar{u} + \delta \bar{u}, \dots$ 。在此两状态间应用功的互等定理, 我们得

$$\begin{aligned} \iiint_V [\bar{X}(u + \delta u) + \dots] dV + \iint_{S_1} [(\bar{X}_s + \delta \bar{X}_s)(u + \delta u) + \dots] dS \\ + \iint_{S_2} [X_s(\bar{u} + \delta \bar{u}) + \dots] dS &= \iiint_V [\bar{X}(u + \delta u) + \dots] dV \\ + \iint_{S_1} (\bar{X}_s u + \dots) dS + \iint_{S_2} [X_s(\bar{u} + \delta \bar{u}) + \dots] dS \end{aligned}$$

即

$$\iint_{S_1} (\bar{X}_s \delta u + \dots) dS = - \iint_{S_1} (u \delta \bar{X}_s + \dots) dS$$

将上式代入式(2.2)我们得到式(2.3)。

我们称式(2.3)为以势能原理为基型的混合能量原理。

下面我们将考虑体积力和力的边界条件的变化。

如果我们分别给体积力分量和在 S_1 上的表面力分量以无限小的增量 $\delta\bar{X}, \dots; \delta\bar{X}_s, \dots$, 由它们所引起的在 S_2 上的表面力分量的增量和在 V 内的应力分量的增量分别为 $\delta X_s, \dots; \delta\sigma_s, \dots$, 而在 V 内的应变分量和在 S_2 上的位移分量保持不变。据余虚功原理, 我们有^[1]

$$\iiint_V (\epsilon_s \delta\sigma_s + \dots) dV = \iiint_V (u \delta \bar{X} + \dots) dV$$

$$+ \iint_{S_1} (u\delta\bar{X}, + \dots) dS + \iint_{S_2} (\bar{u}\delta X, + \dots) dS \quad (2.4)$$

如式(2.4)左边以余能增量来表示, 我们得^[1]

$$\delta V = \iiint_V (u\delta\bar{X} + \dots) dV + \iint_{S_1} (u\delta\bar{X}, + \dots) dS + \iint_{S_2} (\bar{u}\delta X, + \dots) dS \quad (2.5)$$

如果在 S_2 上的 X, \dots , 保持不变, 而由之引起的 \bar{u}, \dots 的增量分别为 $\delta\bar{u}, \dots$, 于是式(2.5)成为

$$\delta V = \iiint_V (u\delta\bar{X} + \dots) dV + \iint_{S_1} (u\delta\bar{X}, + \dots) dS - \iint_{S_2} (X, \delta\bar{u} + \dots) dS \quad (2.6)$$

应用与前述说明相同的方法, 我们能够证明, 式(2.6)可由式(2.5)导出. 我们称式(2.6)为以余能原理为基型的混合能量原理.

边界条件变化的势能原理, 余能原理和混合能量原理是构造容许位移的理论基础.

三、构造矩形板弯曲问题和平面应力问题的容许位移

1. 悬臂矩形板的弯曲容许位移

我们将首先研究如图1(a)所示, 作为实际系统的悬臂矩形板的弯曲容许位移. 转换边界后, 它成为如图1(b)所示, 作为基本系统的简支矩形板及相应的附加边界力和附加边界位移, 这些力及位移分别作用在该板的相应边上和角点上.

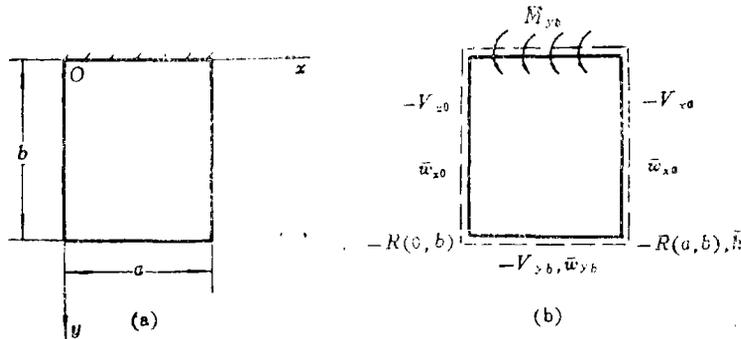


图 1

这里 $V_{y0}, V_{x0}, V_{yb}, R(0, b), R(a, b)$ 是基本系统的相应等效切力及角点集中力. 对于对称弯曲, 我们可以假设边界弯矩及边界位移为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{y0} &= \sum_{m=1,3}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\ \bar{w}_{y0} = \bar{w}_{x0} &= \frac{y}{b} k + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \bar{w}_{yb} &= k + \sum_{m=1,3}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b, c)$$

而对基本系统的挠曲面方程, 我们取表达式

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < x < a, 0 \leq y < b) \quad (3.2)$$

在附加边界力及附加边界位移作用下, 对于基本系统, 混合能量原理(2.6)成为

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \delta \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ & = \int_0^a \sum_{m=1,3}^{\infty} G_m \sin \frac{m\pi x}{a} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{y=0} dx + \int_0^b \delta (V_{z_0} - V_{z_a}) \left(\frac{y}{b} k \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy - \int_0^a \delta V_{yb} \left(k + \sum_{m=1,3}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx \\ & \quad + \delta [R(0, b) - R(a, b)] k \end{aligned} \quad (3.3)$$

将(3.1)和(3.2)代入(3.3), 对(3.3)取 a_{mn} 的变分并且应用变分法预备定理, 我们求得 a_{mn} . 然后将 a_{mn} 代入式(3.2), 我们得到

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-2} \left\{ \frac{1}{D} \frac{2}{b} \left(\frac{n\pi}{b} \right) G_m \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{8}{a} \left(\frac{1}{n\pi} \right) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] k \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] b_m \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{8}{b} \left(\frac{1}{m\pi} \right) \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \right] k \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{2}{b} \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] a_m \right. \\ & \quad \left. - (-1)^{n+1} \frac{16}{ab} (1-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) k \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (3.4)$$

注意到附录中(A.5)~(A.7)和(A.9)~(A.11), 我们最后得到

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \left[-\frac{m\pi b}{\text{sh}^2 \frac{m\pi b}{a}} \text{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \text{sh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & \quad \left. + \text{cth} \frac{m\pi b}{a} \frac{m\pi y}{a} \text{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \frac{G_m}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ & \quad + \frac{1-\nu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1 \right\} \left[\left(\frac{n\pi a}{b} - 2 \right) \text{sh} \frac{n\pi x}{b} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n\pi x}{b} \text{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] + \frac{2}{1-\nu} \text{ch} \frac{n\pi x}{b} - \frac{[n\pi x \text{sh} \frac{n\pi x}{b}]}{b} \left\} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{m\pi b}{a} \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & \left. - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \frac{a_m}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{y}{b} k
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

式(3.5)在满足 $(\partial w_0 / \partial y)_{y=0} = 0$ 之后,它即成为容许位移。应该说明的是,当我们把 $w_0(x, y)$ 展成三角级数时,对于满足边界条件,它在 $x=0, a; y=b$ 出现第一类间断点,故式(3.4)不适用于 $x=0, a$ 和 $y=b$;但是,当我们据附录将式(3.4)转换为(3.5)后,(3.5)适用于整个矩形域。

如图1(a)所示的对称弯曲,我们假设

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{3.6}$$

应用最小势能原理即可求得诸系数 A_{mn} 。极易判断,所得结果将与文[6]的完全一致。

2. 四边中点支承的矩形板非对称弯曲的容许位移

其次,让我们来研究如图2(a)所示,作为实际系统的矩形板的弯曲容许位移。在转换边界后,它成为一作为基本系统的简支矩形板及附加边界力和附加边界位移,如图2(b)所示。

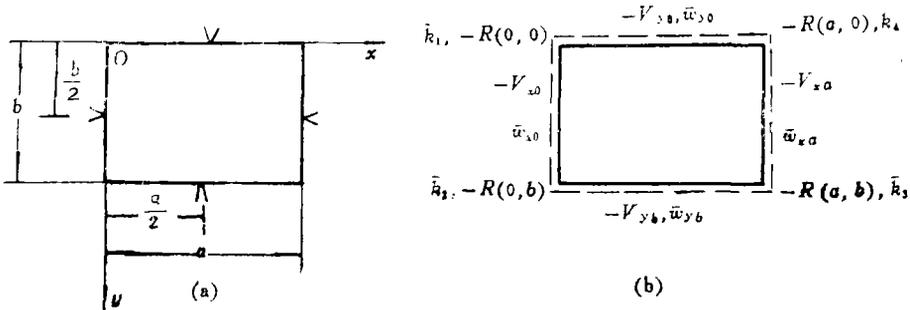


图 2

对于非对称弯曲,我们可假设

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{w}(y)_{x=0} &= \frac{y}{b} k_2 + \frac{b-y}{b} k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \bar{w}(y)_{x=a} &= \frac{y}{b} k_3 + \frac{b-y}{b} k_4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \bar{w}(x)_{y=0} &= \frac{x}{a} k_4 + \frac{a-x}{a} k_1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 \bar{w}(x)_{y=b} &= \frac{x}{a} k_3 + \frac{a-x}{a} k_2 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.7a, b, c, d}$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < x < a, 0 < y < b) \quad (3.8)$$

在这种情况下, 边界条件变化的余能原理式 (2.5) 成为

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \delta \left\{ \left(-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ &= \int_0^a \delta V_{y_0} \left(\frac{x}{a} k_1 + \frac{a-x}{a} k_2 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx \\ & - \int_0^a \delta V_{y_b} \left(\frac{x}{a} k_3 + \frac{a-x}{a} k_4 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx \\ & + \int_0^b \delta V_{x_0} \left(\frac{y}{b} k_1 + \frac{b-y}{b} k_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ & - \int_0^b \delta V_{x_a} \left(\frac{y}{b} k_3 + \frac{b-y}{b} k_4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ & - \delta R(0, 0) k_1 + \delta R(0, b) k_2 - \delta R(a, b) k_3 + \delta R(a, 0) k_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

应用与前节相同的方法并且注意到附录(A.8)和(A.12), 我们得到

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \left(\frac{m\pi b}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi b}{a}} + \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu} \operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} \right) \right. \\ & \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \left. \right] c_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} + \frac{m\pi b}{a} \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{a}}{\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi b}{a}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] d_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right. \\ & \left. - \left(\frac{n\pi a}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} + \frac{n\pi x}{b} + \frac{2}{1-\nu} \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right] a_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} + \frac{n\pi a}{b} \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] b_n \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{a-x}{a} \frac{b-y}{b} k_1 \\ & + \frac{a-x}{a} \frac{y}{b} k_2 + \frac{x}{a} \frac{y}{b} k_3 + \frac{x}{a} \frac{b-y}{b} k_4 \end{aligned} \quad (3.10)$$

对于对称弯曲, 容许位移为

$$\begin{aligned}
 w_0(x, y) = & \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} \left[\left(\frac{a}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} - \frac{2}{1-\nu} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \right. \\
 & + \left. \frac{2}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right\} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 & + \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left[\left(\frac{b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} - \frac{2}{1-\nu} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \right. \\
 & + \left. \frac{2}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right\} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} + k
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

式 (3.11) 与文[7]的结果完全相同。

3. 具有一边固定另外三边自由的矩形板平面应力问题的容许位移

最后，我们将研究如图 3(a) 所示，作为实际系统的一边固定，另外三边自由的平面应力的矩形板。在转换边界以后，它成为作为基本系统的四边固定的矩形板及附加边界力和附加边界位移，如图 3(b) 所示。相应的附加边界力及附加边界位移分别作用在基本系统的相应边上。

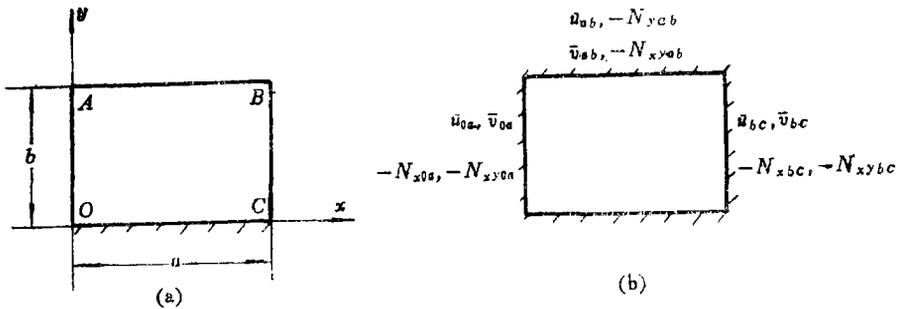


图 3

我们假设，沿实际系统相应边的位移分别为

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{u}_{0a} &= \frac{y}{b} k_{ax} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \bar{v}_{0a} &= \frac{y}{b} k_{ay} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \bar{u}_{ab} &= \frac{x}{a} k_{bx} + \frac{a-x}{a} k_{ax} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 \bar{v}_{ab} &= \frac{x}{a} k_{by} + \frac{a-x}{a} k_{ay} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.12a, b, c, d, e, f}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{b_0} &= \frac{y}{b} k_{b_x} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \bar{v}_{b_0} &= \frac{y}{b} k_{b_y} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\}$$

这里 N_{x_0a} , N_{xy_0a} , N_{yab} , N_{xyab} , N_{x_0b} , N_{xy_0b} 是基本系统的相应边界力。每个边界力的负值等于相应的附加边界力，这些附加边界力作用于基本系统的相应边上。

对于基本系统，在附加边界力及附加边界位移作用下，边界条件变化的余能原理式(2.5) 成为

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \delta \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_0^b \delta N_{x_0a} \left(\frac{y}{b} k_{a_x} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ & \quad + \int_0^b \delta N_{xy_0a} \left(\frac{y}{b} k_{a_y} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ & \quad - \int_0^a \delta N_{yab} \left(\frac{x}{a} k_{b_y} + \frac{a-x}{a} k_{a_y} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx \\ & \quad - \int_0^a \delta N_{xyab} \left(\frac{x}{a} k_{b_x} + \frac{a-x}{a} k_{a_x} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) dx \\ & \quad - \int_0^b \delta N_{x_0b} \left(\frac{y}{b} k_{b_x} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \\ & \quad - \int_0^b \delta N_{xy_0b} \left(\frac{y}{b} k_{b_y} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dy \end{aligned} \quad (3.13)$$

我们假设基本系统的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (0 < x < a, \quad 0 \leq y < b) \quad (3.14)$$

注意到附录式(A.13)和(A.14)，应用与前节相同的方法，我们有

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{n\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{n\pi a}{b}} a_n \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{n\pi a}{b}} e_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{m\pi y}{a}}{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{m\pi b}{a}} c_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{x}{a} \frac{y}{b} k_{b\epsilon} + \frac{a-x}{a} \frac{y}{b} k_{a\epsilon} \quad (3.15)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{n\pi(a-x)}{b}}{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{n\pi a}{b}} b_n \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{n\pi x}{b}}{\text{sh} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \frac{n\pi a}{b}} f_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{m\pi y}{a}}{\text{sh} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\nu)} \frac{m\pi b}{a}} d_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{x}{a} \frac{y}{b} k_{b\epsilon} + \frac{a-x}{a} \frac{y}{b} k_{a\epsilon} \quad (3.16)$$

易于判断, (3.15) 和 (3.16) 将适用于整个矩形域。

附 录

为求得容许位移, 在下面我们将给出从三角级数到双曲线函数的某些转换。

图 4 为在一横向载荷及拉伸共同作用下的简支弹性基梁, 我们将首先求解其微分方程。

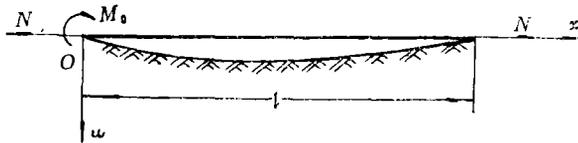


图 4

该梁的微分方程为

$$w^{IV} - 2\eta w'' + p^2 w = 0 \quad (\text{A.1})$$

这里 $2\eta = N/EJ$, $p^2 = k/EJ$

注意到边界条件

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{M_0}{EJ} \\ x=l, \quad w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

和 $\eta = p^2$, 我们有

$$w(x) = \frac{M_0}{2EJ} \left[-\frac{l}{\beta} \frac{\text{sh} \beta x}{\text{sh}^2 \beta l} - \frac{x}{\beta} \text{sh} \beta x + \text{cth} \beta l \cdot \left(\frac{x}{\beta} \right) \text{ch} \beta x \right] \quad (\text{A.3})$$

这里 $\beta = \sqrt{\eta}$

应用最小势能原理, 我们同样可解此问题。如令 $\beta = n\pi/b$, 其挠曲方程为

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) M_0}{EJ a \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{A.4})$$

令 (A.3) = (A.4), 我们得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{a}{4} \left[-\frac{a}{n\pi} \frac{\text{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\text{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} - \frac{x}{b} \text{sh} \frac{n\pi x}{b} \right]$$

$$+ \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \left(\frac{x}{n\pi} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \quad (\text{A.5})$$

用相同的方法, 我们得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} = -\frac{a}{4} \left[\frac{a}{b} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{x}{b} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= \frac{a}{8} \left[\frac{a}{b} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \frac{x}{b} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[M_1 - (-1)^m M_2] \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= \frac{a}{4} \left[\frac{a}{b} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} M_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} M_1 \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} M_1 + \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} M_1 - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} M_2 \right) \frac{x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

对式(A.5)~(A.8)取 x 的二阶导数, 我们得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= \frac{a}{4} \left\{ \left(\frac{n\pi a}{b} + \frac{n\pi x}{b} - 2 \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right. \\ &\quad \left. + \left[2 - \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \left(\frac{n\pi x}{b} \right) \right] \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right\} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= \frac{a}{4} \left[\left(\frac{n\pi a}{b} \right) \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + 2 \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \right] \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= -\frac{a}{8} \left\{ \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left(\frac{n\pi a}{b} + 2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n\pi x}{b} \right] \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \frac{n\pi x}{b} - 2 \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right\} \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[M_1 - (-1)^m M_2] \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} &= \frac{a}{4} \left\{ \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} M_1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{b}} M_2 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \left(\frac{n\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + 2 \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \right) M_1 - \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} M_1 \right. \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} M_1 \left(\frac{n\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + 2 \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \quad (\text{A.12})$$

据[9]我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nz}{\alpha^2 + n^2} = \frac{\pi}{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - z)}{\operatorname{sh} \alpha \pi} \quad (\text{A.13})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nz}{\alpha^2 + n^2} = - \frac{\pi}{\alpha} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} \alpha z} \quad (\text{A.14})$$

参 考 文 献

- [1] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Second edition, Pergamon Press (1975).
- [2] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1980).
- [3] 钱伟长, 《变分法及有限元》(上册), 科学出版社 (1980).
- [4] 付宝连, 应用功的互等定理求解具有复杂边界条件矩形板的挠曲面方程, *应用数学和力学*, **3**, 3 (1982).
- [5] 付宝连, 论修正的 Castigliano 定理, *应用数学和力学*, **5**, 2 (1984).
- [6] 张福范, 悬臂矩形板的弯曲, 全国弹塑性力学学术交流会 (1980, 6).
- [7] 朱雁滨, 四边中点支承的矩形板的弯曲, *东北重型机械学院学报*, **1** (1985).
- [8] 徐芝纶, 《弹性力学》(上册), 人民教育出版社, 第一版 (1979, 1).
- [9] 《数学手册》编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社, 北京 (1979).

The Method of Transformation of the Boundaries for Forming the Permissible Displacements

Fu Bao-lian

(Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang)

Abstract

In this paper the method of transformation of the boundaries for forming the permissible displacements with various boundary conditions is presented. What is called the method of transformation of the boundaries is that, first we transform the actual system into the basic system and additional boundary forces and displacements on the basis of the superposition principle, then apply variational principles to the basic system, finally find the permissible displacement of the actual system by means of the method of transformations of the series.

In this paper, we also give mixed energy principles under variation of boundary conditions. The mixed energy principles as well as the potential and complementary energy principles under variation of boundary conditions are all the chief theoretical fundamentals of the method of transformation of the boundaries.

Applying the method of transformation of the boundaries, we form the permissible displacements of rectangular plates of plane stress and bending problems with various edge conditions.

Because the method of transformation of the boundaries is in progress to follow the variational principles and definite program to form permissible displacements, so the difficulty in supposing and piecing together permissible displacements in the Rayleigh-Ritz method will be overcome.