

# 非关联塑性切线刚度矩阵的对称表示\*

熊 文 林

(武汉水利电力学院, 1984年10月21日收到)

## 摘 要

文中建议的数值方法使可能在非关联塑性切线刚度程序中采用对称解法。

## 一、引 言

岩土材料不同于金属, 它们不服从关联的流动法则<sup>[2][3]</sup>, 按关联流动法则算得的岩土材料的剪胀角比实际的剪胀角大得多<sup>[1][7]</sup>。

对于岩土等非关联材料, 过去通常采用以下两种办法进行计算。

第一种办法是: 按非关联流动法则计算, 即取  $Q \equiv F$ 。其优点是考虑了岩土等材料的非关联塑性变形特性。但这个方法有某些缺点: 1、由于刚度矩阵过去常常是非对称表示的, 需要求解非对称的方程组, 而解一次非对称方程组所需的机时约为解一次相同数目对称方程组所需机时的三倍; 2、非对称刚度矩阵所需的计算机内存容量比对称刚度矩阵几乎增加一倍。

第二种办法是: 仍按关联流动法则计算, 即取  $Q = F$ 。其优点是可以采用对称解法。但这个方法也有一些缺点: 1、由于岩土材料不服从关联流动性则, 因此, 按其计算所需的迭代次数较多, 机时较长, 当采用“初应力法”或“初应变法”计算时<sup>[8]</sup>有时收敛特别慢; 2、由于剪胀特性对很多土工结构的破坏荷载有显著影响<sup>[4]</sup>, 因此, 按关联流动法则计算所得结构的极限强度或稳定安全系数往往偏高。

潘迪 (G. N. Pande) 等人用改变材料强化规律的办法将实际的非关联材料转化为“相当的” (或“等效的”) 关联材料, 推导了非关联弹塑性矩阵的对称表示公式<sup>[6]</sup>。但该式比较复杂, 且式中包含了由于上述假定而带来的某些误差 (该式中同一数值  $a_i^j b_q$  在改变的强化参数内外取不同的值), 其影响可能很显著, 特别是当塑性势函数为高次非线性时。

本文用数学的方法推导了非关联流动法则下切线刚度矩阵的对称表示公式, 它克服了潘迪公式的上述缺点, 且将其编制了有限元程序, 并先后对我国一个实际土坝工程的一种受力情况和一个例题的多种受力情况, 按关联流动法则与按本文提出的非关联流动法则下对称形成刚度矩阵两种方法进行了计算。结果表明: 按本文提出的方法比按关联流动法则计算有较快的收敛速度、较广的适用范围和较可靠的计算结果。

\* 钱伟长推荐。

## 二、非对称矩阵表示的应力应变关系

由相加假设总的应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  由弹性应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和塑性应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  两部分组成, 即

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.1)$$

应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}$  通过弹性矩阵  $\mathbf{D}_e$  与弹性应变增量相联系

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.2)$$

材料的屈服条件可表示为

$$F[\boldsymbol{\sigma}, h(\boldsymbol{\varepsilon}^p)] = 0 \quad (2.3)$$

式中  $h = h(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$  是强化参数, 它表示屈服函数随塑性变形而变化. 对于理想塑性材料  $F$  不随  $h$  而变化, 即有  $\partial F / \partial h = 0$ .

假定塑性应变增量与流动率成正比, 即

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.4)$$

$$\text{式中 } Q[\boldsymbol{\sigma}, h(\boldsymbol{\varepsilon}^p)] = 0 \quad (2.5)$$

称为材料的塑性势函数,  $d\lambda$  为一正的参数.

下面我们对非关联流动法则 (即  $Q \neq F$ ) 下的弹塑性应力应变关系进行推导, 对于关联流动法则, 只需取  $Q = F$  即可.

按链式法则, 由 (2.3) 式可得本构方程为

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (2.6)$$

以 (2.4) 式代入 (2.6) 式, 并为了简单起见, 用  $\mathbf{a}_f$  表示  $\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$  和用  $\mathbf{a}_q$  表示  $\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma}$ , 得

$$\mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T d\lambda \mathbf{a}_q = 0 \quad (2.7)$$

定义强化参数  $H$  为

$$H = - \frac{\partial F}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \mathbf{a}_q \quad (2.8)$$

(2.7) 式可改写成

$$\mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma} - H d\lambda = 0 \quad (2.9)$$

由 (2.9) 式得

$$d\lambda = \mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma} / H \quad (2.10)$$

以 (2.10) 式代入 (2.4) 式, 得

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{a}_q \mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma} / H = \mathbf{C}_p^{ps} d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.11)$$

式中  $\mathbf{C}_p^{ps}$  是塑性依从矩阵.

对于三维分析我们有

$$(d\boldsymbol{\sigma})^T = [d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\sigma_z \ d\tau_{yz} \ d\tau_{zx} \ d\tau_{xy}] \quad (2.12)$$

和

$$\mathbf{C}_p^{as} = \frac{1}{H} \mathbf{a}_q \mathbf{a}_f^T = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

显然, 当采用非关联流动法则时, (2.13)式所表示的塑性依从矩阵 $\mathbf{C}_p^{as}$ 是非对称的。  
由(2.2)式有

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}_e^{-1} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.14)$$

式中  $\mathbf{C}_e = \mathbf{D}_e^{-1}$  是弹性依从矩阵。

对于三维问题有

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & & & & & & \\ & \lambda & \lambda + 2G & & & & \\ & \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ & 0 & 0 & 0 & G & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \\ \text{称} \\ \\ \end{matrix} \quad (2.15)$$

和

$$\mathbf{C}_e = \frac{1}{KG} \begin{bmatrix} 2(\lambda + G) & & & & & & \\ & -\lambda & 2(\lambda + G) & & & & \\ & -\lambda & -\lambda & 2(\lambda + G) & & & \\ & 0 & 0 & 0 & K & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & K & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \\ \text{称} \\ \\ \end{matrix} \quad (2.16)$$

上两式中,  $\lambda = \mu E / (1 + \mu)(1 - 2\mu)$ ,  $\mu$  是波桑比,  $E$  是弹性模量,  $K = 2(3\lambda + 2G)$  和  $G$  是剪切模量。

将(2.11)和(2.14)式代入(2.1)式, 得

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_e^{as} d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.17)$$

式中  $\mathbf{C}_e^{as} = \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_p^{as}$  (2.18)

是非对称的弹塑性依从矩阵。

由(2.17)式有

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}_e^{as})^{-1} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_e^{as} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.19)$$

式中  $\mathbf{D}_e^{as}$  是弹塑性矩阵, 可由(2.18)式求逆求得, 即

$$\mathbf{D}_e^{as} = \mathbf{D}_e - \mathbf{b}_q \mathbf{b}_f^T / \beta \quad (2.20)$$

其中  $\mathbf{b}_q = \mathbf{D}_e \mathbf{a}_q$ ,  $\mathbf{b}_f = \mathbf{D}_e \mathbf{a}_f$ ,  $\beta = H + \mathbf{a}_f^T \mathbf{b}_q$  (2.21)

可见, 对于非关联流动法则, 按(2.20)式所确定的弹塑性矩阵  $\mathbf{D}_e^{as}$  是非对称的。故按其计算的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{e_p}^{\alpha_s} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{e_p}^{\alpha_s} \mathbf{B} dV \quad (2.22)$$

也是非对称的。

以(2.20)式代入(2.19)式, 得

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{D}_e - \mathbf{b}_q \mathbf{b}_f^T / \beta) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.23)$$

由(2.1)、(2.2)、(2.4)和(2.23)式, 可得

$$d\lambda = \mathbf{b}_f^T d\boldsymbol{\varepsilon} / \beta \quad (2.24)$$

(2.23)式就是通常在非关联流动法则下用非对称的弹塑性矩阵所表示的应力应变关系。

以 $Q=F$ 代入(2.23)式可得关联流动法则下的应力应变关系为

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{D}_e - \frac{1}{H + \mathbf{a}_f^T \mathbf{b}_f} \mathbf{b}_f \mathbf{b}_f^T \right) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.25)$$

### 三、对称矩阵表示的应力应变关系

以数值 $\mathbf{a}_q^T d\boldsymbol{\sigma}$ 和数值 $\mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma}$ 的比值

$$K_1 = \frac{\mathbf{a}_q^T d\boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.1)$$

同乘以(2.9)式的各项, 并约去数值 $\mathbf{a}_f^T d\boldsymbol{\sigma}$ , 得

$$\mathbf{a}_q^T d\boldsymbol{\sigma} - K_1 H d\lambda = 0 \quad (3.2)$$

故

$$d\lambda = \frac{1}{K_1 H} \mathbf{a}_q^T d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

以(3.3)式代入(2.4)式, 得

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{K_1 H} \mathbf{a}_q \mathbf{a}_q^T d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_p^* d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.4)$$

式中

$$\mathbf{C}_p^* = \frac{1}{K_1 H} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

是对称形式的塑性依从矩阵。

将(2.14)和(3.4)式代入(2.1)式, 得

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{e,p}^* d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.6)$$

式中

$$\mathbf{C}_{e,p}^* = \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_p^* \quad (3.7)$$

由于 $\mathbf{C}_e$ 和 $\mathbf{C}_p^*$ 都是对称的, 故(3.7)式所表示的弹塑性依从矩阵 $\mathbf{C}_{e,p}^*$ 也是对称的。

由(3.6)式有

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}_{e,p}^*)^{-1} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{e,p}^* d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.8)$$

由(3.7)式求逆, 可得

$$\mathbf{D}_{e,p}^* = \mathbf{D}_e - \mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T / \beta_s' \quad (3.9)$$

$$\text{其中} \quad \beta_s' = K_1 H + \mathbf{a}_f^T \mathbf{b}_q \quad (3.10)$$

显然, (3.9)式所表示的弹塑性矩阵是对称的。

利用(2.1)、(2.2)、(2.11)式, (3.10)式可改写成

$$\beta_s' = \frac{\mathbf{b}_q^T d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{b}_f^T d\boldsymbol{\varepsilon}} (H + \mathbf{a}_f^T \mathbf{b}_q) = K_2 \beta \quad (3.11)$$

其中  $K_2$  是一个数, 其值为

$$K_2 = \frac{\mathbf{b}_q^T d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{b}_f^T d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.12)$$

故非关联流动法则下对称的弹塑性矩阵还可表示为

$$\mathbf{D}_{e,p}^s = \mathbf{D}_e - \frac{1}{K_2 \beta} \mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \quad (3.13)$$

以(3.13)式代入(3.8)式, 得

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{D}_e - \frac{1}{K_2 \beta} \mathbf{b}_q \mathbf{b}_q^T \right) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.14)$$

由(2.1)、(2.2)、(2.4)和(3.14)式, 有

$$d\lambda = \frac{1}{K_2 \beta} \mathbf{b}_q^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.15)$$

可以指出, (3.9)式和(3.13)式实质上是一样的, 但(3.13)式在计算上有优越性, 故建议采用之。

根据对称弹塑性矩阵  $\mathbf{D}_{e,p}^s$  计算的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{e,p}^s = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{e,p}^s \mathbf{B} dV \quad (3.16)$$

也将是对称的。

(3.14)式就是所建议在非关联流动法则下用对称的弹塑性矩阵所表示的应力应变关系。

可以看出, 当采用关联流动法则时,  $K_2$  的值等于1, (3.14)式即变为(2.25)式。

#### 四、用对称矩阵和非对称矩阵表示应力应变关系的等价性

由(2.23)式, 可得任意一个应力分量为

$$d\sigma_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} d\varepsilon_j - \frac{1}{\beta} b_{qi} b_f^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1)$$

式中  $\mathbf{b}_f^T = [b_{f1} \quad b_{f2} \quad \dots \quad b_{fn}]$

$$\mathbf{b}_{qi} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_j}$$

$$b_{fi} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_j}$$

$n$  是应力 (或应变) 向量的分量个数;  $d_{ij}$  是弹性矩阵第  $i$  行第  $j$  列的元素 (见 (2.15) 式)。

由(3.14)式同样可得该任意应力分量为

$$d\sigma_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} d\varepsilon_j - \frac{1}{K_2 \beta} b_{qi} b_q^T d\varepsilon \quad (4.2)$$

其中  $b_q^T = [b_{q1} \ b_{q2} \ \dots \ b_{qn}]$ .

以(3.12)式代入(4.2)式约去数值  $b_q^T d\varepsilon$ , 可得(4.1)式. 由于  $d\sigma_i$  是任意一个应力分量, 可见, 由应变向量  $d\varepsilon$  按非对称的弹塑性矩阵(2.23)式和按对称的弹塑性矩阵(3.14)式所确定的应力向量  $d\sigma$  是完全相同的.

同理, 由(2.17)式可得任意一个应变分量为

$$d\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} d\sigma_j + \frac{1}{H} a_{qi} a_q^T d\sigma \quad (4.3)$$

式中  $C_{ij}$  为弹性依从矩阵第  $i$  行第  $j$  列的元素 (见(2.16)式);

$$a_{qi} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i}$$

$$a_i^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right]$$

由(3.6)式, 同样可得该任意应变分量为

$$d\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} d\sigma_j + K_1 \frac{1}{H} a_{qi} a_q^T d\sigma \quad (4.4)$$

其中  $a_q^T = \left[ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial \sigma_n} \right]$

以(3.1)式代入(4.4)式, 约去数值  $a_q^T d\sigma$ , 可得(4.3)式. 由于  $d\varepsilon_i$  是任意一个应变分量, 可见, 由应力向量  $d\sigma$  按非对称的弹塑性依从矩阵(2.17)式和按对称的弹塑性依从矩阵(3.6)式所确定的应变向量  $d\varepsilon$  也是完全相同的.

由此可以得出以下结论: 对于非关联材料, 用对称矩阵表示的应力应变关系 ((3.6)和(3.14)式) 与用非对称矩阵表示的应力应变关系 ((2.17)和(2.23)式) 是等价的.

但是, 由于在计算  $K_2$  (或  $K_1$ ) 时所采用的应变增量 (或应力增量) 与解方程所得的结果不完全相同, 因此, 它们之间有一些差别. 在数值分析实践中可根据所采用的计算方法按下述途径处理这个问题:

1、当采用“切线刚度法”计算时, 刚度矩阵 ((3.16)式) 不断变化. 上一次迭代所得的应变增量可用来计算  $K_2$  和  $D_i^*$ , ((3.13)式);

2、当采用“初应力法”计算且每次迭代后的剩余应力逐步向屈服面松弛时, 上一步松弛所得的结果可用来计算  $K_2$  和  $d\lambda$  ((3.15)式);

3、当采用“混合法”计算时, 刚度矩阵只在每级加荷之前组装,  $K_2$  和  $D_i^*$  可按上一级加荷所得的  $d\varepsilon$  计算.

由于相邻两次迭代 (或两级荷载增量或两步松弛) 所得的应变增量之差可以控制在给定的精度范围以内, 因此, 当此差值很小时, 按对称方程组(3.14)和按非对称方程组(2.23)所求解应该很接近.

## 五、算 例

在岩土工程中常采用莫尔-库伦屈服准则, 并可写成如下的形式

$$F = \sigma_m \sin \phi + \sqrt{J_2} (\cos \theta - \sin \theta \sin \phi / \sqrt{3}) - c \cos \phi = 0 \quad (5.1)$$

式中  $\sigma_m$  为平均应力,  $\sigma_m = \sigma_{ii}/3$ ,  $J_2$  为应力偏量的第二不变量,  $J_2 = S_{ij}S_{ij}/2$ ,  $\theta$  为罗得角

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}} \right) \leq \frac{\pi}{6}$$

$c$ 、 $\phi$  相应为粘着力和摩擦角,  $S_{ij}$  为应力偏量,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases}$$

$J_3$  为应力偏量的第三不变量  $J_3 = S_{ij}S_{jk}S_{ki}/3$ .

塑性势函数一般是一组形状相似的曲线。文献[4]和[7]建议了某些有用的适合于粘土和节理岩体的塑性势函数, 其中非关联流动法则是这样确定的。剪胀角  $\psi$  随平均应力的增长而减小至临界状态处为零。此处对莫尔-库伦屈服面塑性势函数简单取为

$$Q = \sigma_m \sin \psi + \sqrt{J_2} (\cos \theta - \sin \theta \sin \psi / \sqrt{3}) = \text{const} \quad (5.2)$$

式中  $\psi$  为用以描述塑性势函数的角, 一般是  $0 \leq \psi \leq \phi$ , 在计算中取  $\psi = \text{tg}^{-1}(\text{tg} \phi / 2)$ 。其余符号意义同(5.1)式。

计算中考虑了土料的各向同性强化作用, 强化参数  $H$  可根据塑性应变试验曲线确定, 此处近似地取  $H = 0.1E$  (文献[5])。

每次迭代的剩余应力逐步向屈服面松弛, 松弛后的节点不平衡力作为节点荷载在下次迭代中考虑。采用的收敛标准为

$$\sqrt{\sum_{r=1}^N (R_i^r)^2} \times 100 \leq \text{允许值} \quad (5.3)$$

其中  $N$  是结点总数,  $r$  是迭代次数, 按照这个标准, 当剩余力的模与作用力的模的比值小于给定的允许值时即认为收敛了。计算中取其比值的允许值为百分之一。

计算了两个例子。第一个例子是一个实际的带有混凝土防渗墙的粘土心墙土坝, 其典型断面如图1所示。共采用70个8节点等参单元(见图2)。计算中所用的材料特性由设计单位提供并示于表1。

表 1 计算中所采用的材料特性

材 料	湿容重 $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	浮容重 $\gamma'$ (kN/m <sup>3</sup> )	波 桑 比 $\mu$	弹性模量 $E$ (MN/m <sup>2</sup> )	内摩擦角 $\phi$ (度)	粘着力 $c$ (kN/m <sup>2</sup> )
混 凝 土	23.0	13.0	0.16	13000	51.1	1770*
粘 土	19.6	10.1	0.35	20.0	17.0	20
砂	17.2	9.7	0.29	30.0	28.0	1**
石 碴	20.0	11.2	0.25	15.0	30.0	1**
砂 岩	26.3	16.3	0.20	3378.0	51.8*	1386*

注: \* 由混凝土和基岩的抗压抗拉强度换算而来;

\*\* 为了防止计算时溢出而采用的较小值。

对混凝土防渗墙施工期的受力情况按常用的关联流动法则((2.25)式)及按本文提出的非关联流动法则下对称形成刚度矩阵((3.16)式)两种方法在CDC-7600机上进行了计算。结果表明: 按关联流动法则计算需要迭代15次才达到收敛, 而按本文建议的方法只需要迭代4





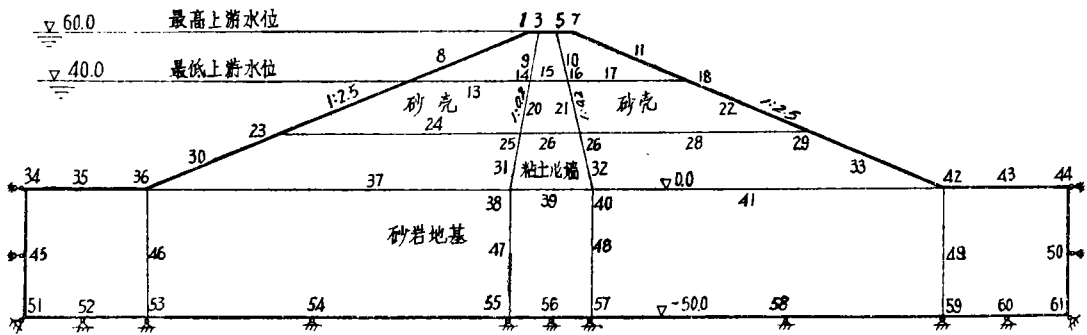


图 3 例2的断面尺寸及网格划分

法则。本文给出了非关联流动法则下切线刚度矩阵的对称表示公式。按其计算既可以考虑材料的非关联特性，使计算比较符合材料的实际变形情况；又可以采用对称解法求解，使所需计算机内存容量和计算机时间都比较少。初步计算表明：本文建议的方法比以往考虑关联流动法则的计算方法具有较快的收敛速度，较广的适用范围和较可靠的极限稳定安全系数。

## 参 考 文 献

- [1] Barton, N. and V. Choubey, The shear strength of rock joints in theory and practice, *Rock Mechanics*, 10 (1977), 1—54.
- [2] Davis, E. H., Theory of plasticity and the failure of soil masses, *Soil Mechanics*, ed. I. K. Lee, Butter Worth (1969).
- [3] Mroz, Z., Non-associated laws in plasticity, *J. Mech. and Phys. Appl.*, 2 (1963), 21—41.
- [4] Naylor, D. J. and G. N. Pande, *Finite Elements in Geotechnical Engineering*, Pine-ridge press, Swansea, U. K. (1981).
- [5] Owen, D. R. J. and E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, U. K. (1980).
- [6] Pande, G. N. and S. T. Pietruszczak, Symmetric tangential stiffness formulation for non-associated plasticity, C/R/405, the Univ. College of Swansea, U. K. (1982).
- [7] Pande, C. N. and W. Xiong, An improved multi-laminate model of jointed rock masses, *Numerical Models in Geomechanics*, A. A. BaLKEMA/ROTTERDAM (1982), 218—226.
- [8] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill (1977).

## Symmetric Formulation of Tangential Stiffnesses for Non-Associated Plasticity

Xiong Wen-lin

(Wuhan Institute of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan)

### Abstract

A numerical scheme is presented which makes it possible to use the symmetric equation solvers in tangential stiffness programs for non-associated materials.